INLEDANDE MATEMATISK ANALYS

2011 LP1

MED JANA MADJAROVA

AV: MILICA BIJELOVIĆ

ANALYS: Kontinuitet, "nära"

ELEMENTÄRA FUNKTIONER:
- Potensfunktioner (x^a)
- Exponentialfunktioner (a^x)
- Trigonometriska funktioner $\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$
- Samt deras inverser och ändliga sammansättningar av sådana funktioner

Binomialsatsen s 60!

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^{1000}$

$(a+b)^n$ Newtons binomialformel

$$(a+b)^n = a^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n \text{ över } 1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n =$$

$$= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b^n \qquad a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

def binomialkoefficienterna

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}}$$

$n=2$: $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n = 2$

$n=3$: $\binom{n}{1} = n = 3$

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$

Bevis (binomialfunktionen)

① $a=0$ $\quad (0+b)^n = b^n =$ h.l

② $a \neq 0$ $\quad (a+b)^n = \left(a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^n = a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)\right)^n$ Sätt $x = \frac{b}{a}$

$(1+x)^n = ?$

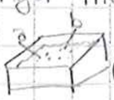
$(1+x)^n = \underbrace{(1+x)(1+x)\ldots(1+x)}_{n \text{ ggr}}$

$x^0 = 1$: kan bara fås på ett sätt, genom att multiplicera alla ettor med varandra

x^1: multiplicera x ur en av "paranteserna" med ettorna ur alla övriga: $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ ggr}} = n \cdot x$

x^2: x ur två faktorer multiplicerat med ettorna ur alla övriga koefficienten = antalet sätt att välja 2 ur n faktorer

Givet en mängd med n element, hur många delmängder med två element har den?



(n) $\boxed{n}\boxed{n-1}$ $\{a,b\} = \{b,a\}$ Antalet ⊛ $= \frac{n(n-1)}{2}$

$1 \leq k \leq n-1$ $\quad x^k$: kan endast fås genom att multiplicera x ur k faktorer med ettan ur övriga

$\Rightarrow$ koefficienten $= \underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{antalet sätt att välja } k \text{ av de } n \text{ faktorerna}}$

Givet en mängd med n element hur många delmängder k element har den?

$\boxed{n \mid n-1 \mid n-2 \mid \dots \mid n-k+1}$ $\quad n(n-1)\dots(n-k+1)$ = antalet sätt att välja k ordnade element av de n

$\underbrace{\qquad}_{k-1}$ $\quad n \overset{\Downarrow}{-} (k-1)$

Oordnade:
Måste dividera med antalet sätt att ordna k element (permutationer)

$\boxed{k \mid k-1 \mid k-2 \mid k-3 \mid \dots \mid 1} = k!$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k} = \binom{n}{k}$$

x^n: koefficienten $= 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots + x^n}$ → s. 63

Sätt in tillbaka $x = \frac{b}{a}$

$$a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)\right)^n = a^n\left(1+\binom{n}{1}\left(\frac{b}{a}\right)+\binom{n}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\dots+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right) = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

Kombinatoriskt bevis
Antalet permutationer (omordningar) av k element $= k! \overset{\text{def}}{=} 1\cdot 2\cdot\dots\cdot k$
Antalet sätt att välja k (oordnade) element n st = antalet kombinationer =
$= C_n^k = \binom{n}{k} = \boxed{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}}$

$\binom{n}{0} \overset{\text{def}}{=} 1$ (stämmer med kombinatoriska tolkningen)

$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = 1$

$\boxed{0! \overset{\text{def}}{=} 1}$

$(1+x)^4 = (1+3x+3x^2+x^3)(1+x) = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$ $\qquad \boxed{\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}}$

Induktivt: från exemplen till det generella.
Deduktivt: från det generella till det konkreta

MATEMATISKA INDUKTIONEN s 129 →

Man stegar sig fram
$1 \curvearrowright n=2 \curvearrowright n=3 \dots (n=m \curvearrowright n=m+1)$ oavsett m

Peanos axiom för $\mathbb{N}$
1.-4.
5. Induktionsaxiomet: Låt $M \subset \mathbb{N}$ s.a 1) $1 \in M$
2) $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$

Då gäller $M = \mathbb{N}$
Binomialsatsen låt $M = \{n \in \mathbb{N} : (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots + x^n\}$
Uppenbart att $1 \in M$, Om vi kan visa att om $(1+x)^n = \dots$ medför $(1+x)^{n+1} = \dots$, då $M = \mathbb{N}$

ind 3| Visa att $\forall n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

1. $n=1$: $\text{v.l} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}$ $\quad \text{h.l} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ för $n=1$ $\text{v.l} = \text{h.l} = \frac{1}{2}$

Påståendet är sant för $n=1$
2. (Induktionsantagandet)
Antag att påståendet är sant för $n=m$.
3. Är då påståendet sant för $n=m+1$?
under antagandet 2

INDUKTIONSPRINCIPEN: $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ familj av påståenden, numrerade med de naturliga talen
Vi vet: P_1 sant
Om P_m är sant, så är P_{m+1} sant.

$\boxed{\text{Enligt induktionsaxiomet är } P_n \text{ sant } \forall n \in \mathbb{N} \quad (M = \text{mängden av alla } m \text{ s.a } P_m \text{ är sant})}$

Ind 3
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \overset{?}{=} \frac{n}{n+1}$$

① $n=1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}$ sant för $n=1$

② Induktionsantagandet:
Vi antar att påståendet är sant för $n=m$,
dvs vi antar att
$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m}{m+1}$$

③ Är det då (dvs under antagandet i ②) sant för $n=m+1$?
$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enligt antagandet} \\ \text{i ②}}}{=} \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m(m+2)+1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m^2+2m+1}{(m+1)(m+2)} = \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} = \frac{m+1}{(m+1)+1}$$

HL = VL för $n = m+1$

Enligt induktionsaxiomet är likheten sann $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ind 4
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}_{(\text{förreövningen})}}_{?}$$

① $n=1$ vl: 1 hl $= \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2 = 1$ ⇒ påståendet är sant

② Vi antar att påståendet är sant för $n=m$
dvs $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$

③ Är det då (dvs under antagandet i ②) sant för $n=m+1$
$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enligt antagandet} \\ \text{i ②}}}{=} \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + \underbrace{(m+1)^3}_{\frac{m^2}{4}(m+1)^2 + (m+1)^3 = (m+1)^2\left(\frac{m^2}{4}+m+1\right)} = (m+1)^2\left(\frac{m^2}{4}+m+1\right) = (m+1)^2\,\frac{m^2+4m+4}{4} = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{2^2}$$
$=$ hl för $n=m+1$

⇒ Enligt induktionsaxiomet är påståendet sant $\forall n \in \mathbb{N}$

? $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

① $n=1$
② Antag att $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)^2$

③ $n=m+1$
$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enligt ②}}}{=} \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)^2 + (m+1)^3 \overset{?}{=} \left(\sum_{k=1}^{m+1} k\right)^2$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{m} k + (m+1)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)^2 + 2(m+1)\sum_{k=1}^{m} k + (m+1)^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)^2 + \overbrace{\boxed{2(m+1)\frac{m(m+1)}{2} + (m+1)^2}}^{\boxed{(m+1)^3}}$$

HYPOTES:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^l$ = polynom av n av grad $l+1$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^5 = a_6 n^6 + a_5 n^5 + a_4 n^4 + a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$
$l \in \mathbb{N}$
$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ sätt in

LIKHETSTECKNET
$5=5$ sann likhet
$4+1=6-1$ sann likhet
$x+1=2x-3$ sant för vissa x, falskt för andra x

Ekvationslösning: likhet mellan uttryck. Likheten kan vara sann eller falsk, beroende på vissa variablers värden.

Lösa: hitta alla vaiabelvärden som omvandlar likheten till en sann likhet (mellan tal)

$x=4$: lösning $4+1=2\cdot4-3$
$x=3$: ej lösning v.l $=4$ h.l $=3$

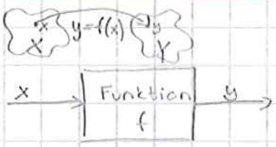
Identiteter : $\cos^2 x+\sin^2 x=1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)=g(x)\ \forall x\in D$ samma som $f(x)\equiv g$ i D

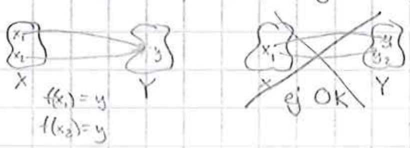
Tillägna ett värde : (Låt) $x=4$
($4=x$ meningslöst)

$a=b \iff b=a$

Funktionsbegreppet

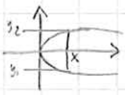


Sätt att ange en funktion:
- formel, tabell, graf (m.m)



Ex ① $f(x)=x^2$

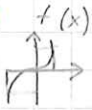
② Omvänt



ej en funktion! Man måste bestämma sig för antigen den övre halvan eller den undre.

def: f kallas injektiv om $\forall x_1,x_2\in D_f$ s.a. $x_1\neq x_2$ gäller att $f(x_1)\neq f(x_2)$

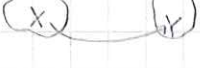
Ex ① $f(x)=x^2$ ej injektiv
③ $f(x)=\sin x$ ej injektiv (antar varje värde i intervallet $[-1,1]$ oändligt många ggr)
④ $f(x)=x^3$ är injektiv



$x_1^3=x_2^3 \Rightarrow x_1=x_2$
$x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$ — $x_1=x_2$; $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=0$ (får ej hända)
$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2-\frac{1}{4}x_2^2+x_2^2=(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{4}x_2^2$
$\Rightarrow \begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_2=0 \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=0 \Rightarrow x_1=x_2$

$\Rightarrow f$ injektiv. **s. 87**

def $f: X\to Y$; f kallas surjektiv om $\forall y\in Y\ \exists x\in Y : f(x)=y$



Ex ⑤ $\sin: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ej surjektiv $\nexists x\in\mathbb{R}$ s.a $\sin x=2$

⑥ $\sin: \mathbb{R}\to[-1,1]$ surjektiv!

def $f: X \to Y$ kallas bijektiv om f är både injektiv och surjektiv

Ex ④ $f(x) = x^3$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv

Bernoullis olikhet

$\boxed{(1+x)^n \geq 1 + nx}$ $\boxed{\forall x \geq -1, \ \forall n \in \mathbb{N}}$

Bevis ① Binomialsatsen för $\boxed{x \geq 0}$

$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + x^n$ där

$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$; $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$

$\Rightarrow (1+x)^n = 1 + nx + \overbrace{\left(\binom{n}{2}x^2 + \ldots + x^n\right)}^{\geq 0} \geq 1 + nx$

② Matematisk induktion

(i) $n = 1$ $\quad$ v.l $= (1+x)^1 = 1 + x$, h.l $= 1 + 1 \cdot x = 1 + x$

$\Rightarrow$ v.l = h.l $\Rightarrow$ olikheten är sann för $n = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(ii) Antag att $(1+x)^m \geq 1 + mx$, $\forall x \geq -1$, för något m : $m \in \mathbb{N}$

(iii) Gäller då olikheten för $m+1$, dvs $(1+x)^{m+1} \geq 1 + (m+1)x$? $\forall x \geq -1$

$(1+x)^{m+1} = (1+x)^m(1+x)$

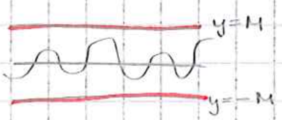
Enligt antagandet $(1+x)^m \geq 1 + mx$ $\quad | \quad (1+x) \geq 0$

$\Rightarrow (1+x)^{m+1} \geq (1+mx)(1+x) = 1 + mx + x + mx^2 = 1 + x(m+1) + \underbrace{mx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (m+1)x$

Enligt induktionsaxiomet är olikheten sann $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \geq -1$

FUNKTIONERS EGENSKAPER s.95

def $f: D_f \to \mathbb{R}$ $\quad$ f kallas begränsad i D_f om $\exists$ $M \in \mathbb{R}$ s.a $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in D_f$



Ex $\sin x$ $\quad \cos x$

Ex Obegränsad

e^x i $\mathbb{R}$

$\tan$ i $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

f kallas uppåt begränsad i D_f om $\exists$ $C \in \mathbb{R}$ s.a $f(x) \leq C$ $\forall x \in D_f$	(Ex $1 - x^2$)
och nedåt begränsad i D_f om $\exists$ $c \in \mathbb{R}$ s.a $f(x) \geq c$ i D_f	(Ex $x^2 - 1$)

Beroende av såväl f som D_f

Ex $\left(\tan: \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}\right) \to$ begränsad

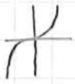
(exponentialfunktionen $(-\infty; 1000) \to \mathbb{R}$) $\to$ begränsad

$0 < e^x < e^{1000}$ $\quad \forall x \in (-\infty, 1000)$

Jämna och udda funktioner

x^n, n jämnt
$(-x)^{2k} = x^{2k}$

x^n, n är udda
$(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$



def $f \begin{matrix}(-a,a)\\ [-a,a]\end{matrix} \to \mathbb{R}$
kallas jämn om $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in \begin{matrix}(-a,a)\\ [-a,a]\end{matrix}$
f kallas udda om $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \begin{matrix}(-a,a)\\ [-a,a]\end{matrix}$
x och $-x$ ska kunna sättas in samtidigt

Ex! jämna funktioner
$\cos x$ i $\mathbb{R}$ $\quad |x|^3$ i $\mathbb{R}$
$|x|$ i $\mathbb{R}$ $\quad \sin|x|$ i $\mathbb{R}$
udda funktioner:
$\sin x$
$\tan x$

f, g jämna $\Rightarrow f+g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g\neq 0} \Rightarrow$ jämna

f, g udda $\Rightarrow f+g$, udda
$f \cdot g$, jämn
$\frac{f}{g\neq 0}$, jämn

f jämn g udda $\Rightarrow$ $f+g$??? (varken eller)
$f \cdot g$ udda
$\frac{f}{g\neq 0}$ udda

GRAF TILL EN FUNKTION s. 39

def $f: X \to Y$
Graf till funktionen kallas mängden $\boxed{G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}}$

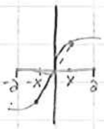
$f: \underset{\mathbb{R}}{D_f} \to \mathbb{R}$

$(x, f(x))$ talpar av reella tal
kan tolkas som koordinater till punkter i planet

f jämn
D_f symmetrisk m.a.p 0

Grafen till en jämn funktion är symmetrisk m.a.p y-axeln

f udda



$f(0) = -f(-0)$ (Om f är definierad i 0)
$\Rightarrow f(0) = 0$

Elementära funktioner s. 47

Potensfunktioner: $n \in \mathbb{N}$

$x^n \overset{def}{=} \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ ggr}}$

$x^{-n} \overset{def}{=} \frac{1}{x^n}$ $\quad x \neq 0$

$x^0 \overset{def}{=} 1$ $\quad x \neq 0$

$\sqrt[n]{x}$ $\boxed{x > 0}$ Det positiva tal vars n-te potens är $x = x^{\frac{1}{n}}$

$x^{\frac{m}{n}} \overset{def}{=} (x^m)^{\frac{1}{n}}$

Vi har definierat x^{α} för $x > 0$ och $\alpha \in \mathbb{Q}$

Alla reella tal kan approximeras med rationella, dvs om $\alpha \in \mathbb{R}$, så

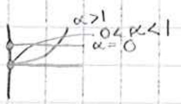
$\exists \left\{ \frac{p_n}{q_n} : p_n \in \mathbb{Z},\ q_n \in \mathbb{N} \right\}_{n=1}^{\infty}$ s.a $\frac{p_n}{q_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$

$x>0 \quad x^{\frac{p_n}{q_n}} \to x^{\alpha}$ (kontinuitetsresonemang)

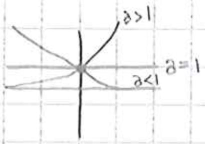
Exponentialfunktioner s.74

$a>0 \quad a^x: \ a^n,\ a^{\frac{p}{q}},\ a^{\alpha^x} \quad \frac{p_n}{q_n} \to \alpha^x,\ a^{\frac{p_n}{q_n}} \to a^{\alpha^x}$

Grafer: $f(x) = x^{\alpha}$, $x>0$



$f(x) = a^x$, $a>0$



$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$

$a^n \cdot a^m = \underbrace{\underbrace{a\cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ggr}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ ggr}}}_{n+m \text{ ggr}}$

sen för rationella tal, gränsövergång för reella tal

$a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} \overset{?}{=} a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{mn}} = \left(a^{m+n}\right)^{\frac{1}{mn}} =$ det tal vars mn:te potens är lika med a^{m+n}

? $\left(a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}}\right)^{mn} \overset{?}{=} a^{m+n}$ $\quad$ v.l $= a^{mn/m} \cdot a^{mn/n} = a^{m+n}$

Ivo 8) $\quad 2(\sqrt{n+1}-1) \overset{?}{<} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \overset{?}{<} 2\sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

① $n=1 \quad 2(\sqrt{2}-1) \overset{?}{<} 1 \overset{\text{sant}}{<} 2\cdot 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 3 \underset{\text{kvadrera}}{\Longleftrightarrow} 8<9$ (båda positiva)

Olikheterna är sanna för $n=1$

② Antag att olikheterna är sanna för något m, dvs för $n=m$ för något m

③ Är de då sanna för $n=m+1$?

? $\quad 2(\sqrt{m+2}-1) \overset{?}{<} \underbrace{\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{k}}}_{S_{m+1}} < 2\sqrt{m+1}$

$S_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}}$

Enligt ② $\quad \underbrace{2(\sqrt{m+1}-1) + \frac{1}{\sqrt{m+1}}}_{2(\sqrt{m+2}-1) \overset{?}{\leq}} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} < \underbrace{2\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m+1}}}_{\overset{?}{\leq} 2\sqrt{m+1}}$

$2\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} \leq 2\sqrt{m+1} \quad \Big| \boxed{\sqrt{m+1} > 0}$

$2\sqrt{m(m+1)} + 1 \overset{?}{\leq} 2(m+1)$

$2\sqrt{m(m+1)} \leq 2m+1 \,\Big|^2$ (positiva tal i v.l och h.l)

$\Leftrightarrow \quad 4m^2 + 4m \leq 4m^2 + 4m + 1$

$0 \leq 1$ $\quad$ sant!

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} \leq 2\sqrt{m+1}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{m+1}$ $\Rightarrow$ Enligt induktionsaxiomet är den högra olikheten sann $\forall n \in \mathbb{N}$

ELEMENTÄRA FUNKTIONER (FORTS.)

- x^{α}, $x>0$, $\alpha \in \mathbb{R}$
  (x^n, $n \in \mathbb{N}$ kan $x \in \mathbb{R}$)
- a^x, $a>0$, $x \in \mathbb{R}$

$a^x = y$

Problem: Givet y, finn x s.a $a^x = y$

1) $a^x > 0 \ \forall x \Rightarrow$ Det kan bara finnas en lösning för $\boxed{y>0}$

2) $a \neq 1$, om inte $y=1$

$y=1 \begin{cases} a=1 \to \text{alla } x \in \mathbb{R} \text{ uppfyller } 1^x = 1 \text{ (ointressant)} \\ a \neq 1 \to x=0 \end{cases}$

$a>0$, $a \neq 1$

def $f: D_f \to \mathbb{R}$, f kallas växande, om:
$\forall x_1, x_2 \in D_f$ s.a $x_1 \leq x_2$ gäller $f(x_1) \leq f(x_2)$

$f: D_f \to \mathbb{R}$, f kallas avtagande, om:
$\forall x_1, x_2 \in D_f$ s.a $x_1 \leq x_2$ gäller $f(x_1) \geq f(x_2)$

$f = \text{const}$ (konstant) både växande och avtagande.

def $f: D_f \to \mathbb{R}$, f kallas strängt växande om:
$\forall x_1, x_2 \in D_f$ s.a $x_1 < x_2$ gäller $f(x_1) < f(x_2)$

$f: D_f \to \mathbb{R}$, f kallas strängt avtagande om:
$\forall x_1, x_2 \in D_f$ s.a $x_1 < x_2$ gäller $f(x_1) > f(x_2)$

$a>1$, ? a^x strängt växande
$m, n \in \mathbb{N}$, $m<n \Rightarrow a^m < a^n$

$a^{\frac{1}{m}} > a^{\frac{1}{n}}$
$\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$ $(m<n)$

$\frac{p_n}{q_n} \to x$ $\quad a^x$ strängt växande för $a>1$

f strängt växande i $D \Rightarrow f$ injektiv i D $\quad (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

$f(x) = a^x$, $a>1 \Rightarrow f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ injektiv

? surjektiv ? $f(\mathbb{R}) = 0, \infty$ $\quad x \to -\infty \to a^x = \frac{1}{a^{|x|}} \to 0$ $\quad x \to \infty \to a^x \to \infty$

kontinuitet $\Rightarrow f$ antar alla värden mellan 0 och $\infty \Rightarrow f$ surjektiv $\Rightarrow \boxed{f \text{ bijektiv}}$

def $f: X \to Y$ bijektiv
$f^{-1}: Y \to X$ s.a $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$
(f invers) $\quad f^{-1}$ kallas inversfunktionen till f

$f(\underbrace{f^{-1}(y)}_{x \text{ s.a } f(x)=y}) = y \qquad f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{=y}) = x$

Ex
1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$ varken injektiv eller surjektiv
2. $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ $\quad f(x) = x^2$ ej injektiv men är surjektiv
3. $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ $\quad f(x) = x^2$ både injektiv och surjektiv $\to$ bijektiv
   $\Rightarrow \exists f^{-1}(y) = \sqrt{y}$
4. $f: (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ $\quad f(x) = x^2$ bijektiv $\quad \exists \ f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

LOGARITMER s.78

$f(x) = a^x$ $\quad a>1$ $\quad f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bijektion
$\exists f^{-1}: (0, \infty) \to \mathbb{R}$

def $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$ $\quad a \neq 1$ $\quad y>0$ $\quad 0<a$

? $\log_a(st) = \log_a s + \log_a t$ $\quad s, t > 0$
$\Leftrightarrow a^{\text{v.l.}} = a^{\text{h.l.}}$?
$a^{\log_a(st)} = st$
$a^{\log_a s + \log_a t} = a^{\log_a s} \cdot a^{\log_a t} = st$
enligt exponentialfunktionens egenskaper

Arcusfunktionerna s. 119

Inverserna till de trigonometriska funktionerna, begränsade till lämpliga intervall.

Ex) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (varken injektiv eller surjektiv)

$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ (ej injektiv men surjektiv)

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ bijektiv, inverterbar

def) $\arcsin x$ är det tal $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, för vilket $\sin y = x$

$\arcsin x = y \iff \sin y = x \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(I grafen är den speglad i bisektrisen med sinusfunktionen)

$\sin(\arcsin \frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$ $\qquad \arcsin(\sin \frac{3\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

$\arcsin(\sin \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

$\arcsin(\sin \pi) = 0$

$\cos : [0, \pi] \to [-1,1] \to$ bijektion inversen $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$

$\arccos(\cos 3\pi) = \pi$

Binomialsatsen s. 60

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} \overset{def}{=} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \quad \binom{n}{0} \overset{def}{=} 1 = \binom{n}{n}$$

Induktionsbevis: Behövs koppling mellan $\binom{n+1}{\ldots}$ och $\binom{n}{\ldots}$

Pascals triangel:

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$; $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$

Hypoteser: ① $\binom{n}{k} \overset{?}{=} \binom{n}{n-k}$

förlänger med $(n-k)!$

$$\boxed{\text{Bevis:}} \quad \binom{n}{k}_{k\geq 1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \cdot \boxed{\frac{(n-k)\cdot\ldots\cdot 1\cdot 2}{(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} = \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$$

Hypotes ② $\binom{n+1}{k+1} \overset{?}{=} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$

$$\left.\begin{array}{l} k=0 \quad ? \ \binom{n+1}{1} = 1 + \binom{n}{1} \\ \binom{n+1}{1} = \frac{n+1}{1} \ ; \ \binom{n}{1} = n \end{array}\right\} \text{sant för } k=0$$

$$k \geq 1: \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k+1)} \overset{?}{=} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)!}$$

gemensam faktor

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{k+1+n-k}{k+1} = \frac{(n+1)n\ldots(n-k+1)}{(k+1)!}$$

$$\boxed{\Rightarrow \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad \binom{n}{k} = 0 \text{ för } k > n}$$

INDUKTIONSBEVIS FÖR BINOMIALSATSEN

① $n=1 \quad (1+x)^1 = 1 + \binom{1}{1}x$
$\Rightarrow$ påståendet sant för $n=1$

② Antag att påståendet är sant för $n=m$ för något naturligt tal m

③ Är det då sant för $n=m+1$?

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)\cdot(1+x)^m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enligt antagandet} \\ \text{i ②}}}{=} (1+x)\left(1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\ldots+\binom{m}{m-1}x^{m-1}+x^m\right) = (1+x)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{k+1}$$

$x^k = 1\cdot x^k, \quad x^k = x\cdot x^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}x^k = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k-1}x^k + 1 + x^{m+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left[\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right]x^k + 1 + x^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}x^k$$

$\Rightarrow$ ENLIGT INDUKTIONSAXIOMET ÄR PÅSTÅENDET SANT $\forall n \in \mathbb{N}$

(UPPGIFT 10 (ind))

$3^n \geq n^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$n = 1,2,3$ separat

$n \geq 4$ induktion

Ant. $3^n \geq n^3$

$3^{m+1} = 3\cdot 3^m \geq 3m^3 \geq (m+1)^3$

$3m^3 - m^3 \geq 3m^2 + 3m + 1$

$2m^3 \overset{?}{\geq} 3m^2 + 3m + 1$

$2 \overset{?}{\geq} \frac{3}{m} + \frac{3}{m^2} + \frac{1}{m^3}$

$\frac{3}{m} + \frac{3}{m^2} + \frac{1}{m^3}$

$\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} < 2$

(1.73)

$m(t) = m(0)e^{-\lambda t}$

Halveringstid: $T \qquad m(T) = \frac{1}{2}m(0)$

? samband mellan T och λ

T: $m(T) = m(0)e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}m(0) \qquad (m(0) > 0)$

$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \quad | \ln$

$-\lambda T = \ln\frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda T = \ln 2}$

(1.86)

a) $f: [0,\infty) \to \cancel{\mathbb{R}}\ [0,\infty)$
$f(x) = x^2$
$f^{-1}\ [0,\infty) \to [0,\infty)$
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

b) $g(x) = e^x$
$g: \mathbb{R} \to (0,\infty)$
$g^{-1}: (0,\infty) \to \mathbb{R}$
$g^{-1}(x) = \ln x$

c) $h(x) = x^3 \quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
injektiv i $\mathbb{R}$
$h^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

d) $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x \quad ? \ [0,\infty)$

$f \circ g(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x))$

(1.87 f)

Ev invers till $f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}}, \quad x > 0$

$f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$

? injektiv i $(0,\infty)$

? ~~V.~~ begränsa till värdemängden $\quad ? \ (1,\infty)$

Injektiv

$\sqrt{1+\frac{1}{x_1}} = \sqrt{1+\frac{1}{x_2}}$

$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x_1} = 1+\frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \quad | \ x_1, x_2 \neq 0$

$x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ i $(0,\infty) \Rightarrow f$ injektiv

$f((0,\infty)) = ?$

$f(x) > 1 \quad \forall x > 0$

$f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1$ Gränsvärde

$\underset{x>0}{x \to 0} \quad \frac{1}{x} \to \infty$

$\sqrt{1+\frac{1}{x}} \to \infty$

$\Rightarrow f$ bijektiv från $(0,\infty)$ till $(1,\infty)$

$\Rightarrow f^{-1}: (1,\infty) \to (0,\infty)$

$f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}} = y \Big|^2 \quad y \geq 0$

$1 + \frac{1}{x} = y^2$

$\frac{1}{x} = y^2 - 1 \qquad \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow y^2 > 1 \Rightarrow y > 1$

$x = \frac{1}{y^2-1} = f^{-1}(y)$

(1.76) a) $\dfrac{x^2-10x+1}{2x^3+4x^2+1} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

$$\frac{x^2-10x+1}{2x^3+4x^2+1} = \frac{x^2(1-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^3(2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3})} \xrightarrow[x\to\infty]{} \text{"}\frac{1-0+0}{\infty(2+0+0)}\text{"} = \text{"}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0$$

d) $$\frac{x^2+10x+1}{2x+1} = \frac{x^2(1+\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2})}{x(2+\frac{1}{x})} \xrightarrow[x\to\infty]{} \text{"}\frac{\infty(1+0+0)}{2+0}\text{"} = \infty$$

$$\frac{x^2+1}{3x^2-1} = \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(3-\frac{1}{x^2})} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{3}$$

ANTALET DELMÄNGDER TILL EN MÄNGD MED n ELEMENT

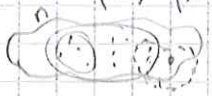
$\binom{n}{k}$ = antalet delmängder med k element i en mängd med n element

$\boxed{n \mid n-1 \mid \dots \mid n-k+1}$ = antalet permutationer (omordningar av k element)
dela med $k!$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

$x=1$ i binomialsatsen

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$



MÄNGD, ANTAL ELEMENT?

∘	∘	∘	∘	∘
1	2	3	4	5

A, B har lika många element om $\exists$ bijektion $f: A \to B$

$1, 2, 3, \dots, n, \dots$
$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$

En oändlig mängd:
En sådan som har en äkta delmängd med lika många element som mängden själv.

$\mathbb{Z}$ har lika många element som $\mathbb{N}$

$\mathbb{Q}$ har lika många element som $\mathbb{N}$

$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots\}$

Alef 0 $\aleph_0$ = antalet element i $\mathbb{N}$ $\qquad 2^{\aleph_0} = c \qquad c$ = kontinuum

$\mathbb{R}: (0,1)$ Antag att $(0,1)$ kan ordnas i en följd (Motsatsbevis)

$0,a_{11}a_{12}a_{13}\dots \qquad 0,a_{k1}a_{k2}\dots a_{kk}\dots \qquad b_1 \neq a_{11}, 9 \qquad \notin$ följden

$0,a_{21}a_{22}a_{23}\dots \qquad 0,b_1b_2\dots b_k\dots \qquad b_2 \neq a_{22}, 9$

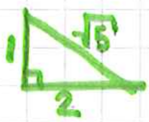
$b_k \neq a_{kk}, 9$

ARCUS

(1a) $\cos(2\arctan\frac{1}{2}) =$
$= \cos^2(\arctan\frac{1}{2}) - \sin^2(\arctan\frac{1}{2})$
$= \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

$\arctan x = y \Leftrightarrow \tan y = x$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\cos y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\sin y = \frac{1}{\sqrt{5}}$



$\cos(2\arctan x) = \cos^2(\arctan x) - \sin^2(\arctan x) = 2\cos^2(\arctan x) - 1 = 1 - 2\sin^2(\arctan x)$

Uttryck $\cos(\arctan x)$ och/eller $\sin(\arctan x)$ direkt som funktion av x

$$\boxed{\tan(\underbrace{\arctan x}_{=y}) = x}$$

Uttryck $\cos y$ / $\sin y$ som funktion av $\tan y$

$\tan^2 y = x^2 = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y}$

$x^2 = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y}$

$\cos^2 y \, x^2 = 1 - \cos^2 y$

$\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$

$\boxed{\cos y = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} > 0$ ty $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(4a) $\arctan x = \arccos 2x$

$\Rightarrow$ $\cos\arctan x = \cos\arccos 2x$

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 2x$ $(\sqrt{1+x^2} \neq 0)$

$\underbrace{2x\sqrt{1+x^2} = 1}_{\text{krävs } x\geq 0}$ $\Leftrightarrow$ för $x \geq 0$ $4x^2(1+x^2) = 1$

$4x^4 + 4x^2 - 1 = 0$

$(2x^2+1)^2 - 1 - 1 = 0$

$2x^2 + 1 = \cancel{\pm}\sqrt{2}$

$2x^2 = \sqrt{2} - 1$

$x_{1,2} = \cancel{\pm}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ $(x \geq 0)$

En lösning: $x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

MISSAR

① Definitionsmängd

② $\Rightarrow$ / $\not\Leftarrow$

① $\tan: (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

$\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$

$\arccos: [-1,1] \to [0, \pi]$

D_f: $2x: [-1,1] \Leftrightarrow \boxed{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$

$\frac{1}{2} \overset{?}{>} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} > 0$

② Kan det vara så att $\cos(\text{v.l}) = \cos(\text{h.l})$ men $\text{v.l} \neq \text{h.l}$?

$\underbrace{\arctan x}_{\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})} = \underbrace{\arccos 2x}_{\in[0,\pi]}$ $\Rightarrow$ båda $\in [0, \frac{\pi}{2})$, $x \geq 0$

$\cos(\text{v.l}) = \cos(\text{h.l}) \Rightarrow \text{v.l} = \text{h.l}$ (för att båda $\in [0, \frac{\pi}{2})$)

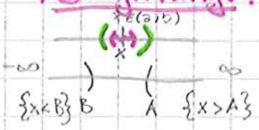
GRÄNSVÄRDEN KAP 2.

"$f(x)$ närmar sig A när x närmar sig B" (och inget annat)

$\frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\to} 0$

"Närma sig": komma nära hur nära som helst

Omgivning: s. 44



Av praktiska skäl $(x-\delta, x+\delta)$, $\delta>0$

$f: D_f \to \mathbb{R}$

Punkter som man kan närma sig kallas hopningspunkter

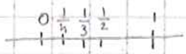
Ex $(0,2) \cup \{3\}$ Hopningspunkter: $[0,2]$

$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$?

Hopningspunkt ① ex. $(0,1) \cup \{-1\}$

hopningspunkter: $[0,1]$

② $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$



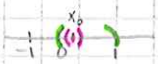
$0 \Rightarrow$ hopningspunkt

Def: $M \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

x_0 kallas hopningspunkt till M om varje omgivning till x_0 innehåller punkter från M, skilda från x_0

Def $M \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in M$

x_0 kallas inre punkt för M om $\exists$ omgivning till x_0 som ligger i M



$\boxed{(0,1) \cup \{-1\}}$ inre punkter: $(0,1)$ $\quad 0 < x_0 < 1$

$\delta = \frac{1}{2}\min(x_0 - 0, 1 - x_0)$ $\quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (0,1)$

0, 1 ej inre punkter

---

x_0 : $x_0 \in \mathbb{R}$ eller $\pm\infty$

l : $l \in \mathbb{R}$, eller $\pm\infty$

Def $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ gränsvärdet av f när x går mot x_0

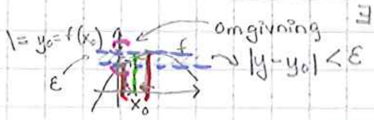
$f: D_f \to \mathbb{R}$, x_0 hopningspunkt till D_f

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ om $\forall$ omgivning U till l $\exists$ omgivning V till x_0: $f(V \cap D_f) \subset U$ utom ev. $f(x_0)$

Hur liten omgivning till l vi än väljer, finns en omgivning $V = V(U)$ till x_0 s.a V avbildas i U m.h.a f

Hur nära l vi än vill komma kan vi åstadkomma det genom att ta x tillräckligt nära x_0

$\exists$



x_0 :	$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$	l :	$(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$
	(a, ∞) $\quad x_0 = \infty$		(α, ∞) $\quad (l = \infty)$
	(∞, b) $\quad x_0 = -\infty$		$(-\infty, \beta)$ $\quad (l = -\infty)$

x_0, l (ändliga reella tal)

Def $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=l \quad \text{om} \quad x_0 \text{ är hopningspunkt till } D_f \quad \text{och} \quad \forall\, \varepsilon>0 \leftarrow (\forall U) \quad \exists\, \delta>0 \leftarrow (\exists V) \quad \text{s.a} \quad \forall x\in D_f \cap \{0<|x-x_0|<\delta\} \text{ gäller } \underbrace{f(x)\in(l-\varepsilon,\, l+\varepsilon)}_{|f(x)-l|<\varepsilon}}$

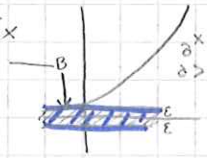
$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ om $\forall\alpha\ \exists A$ s.a $\forall x\in D_f\cap(A,\infty)$ gäller $f(x)>\alpha$ $\quad (f(x)\in(\alpha,\infty))$

(∞ måste vara hopningspunkt för D_f)

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ om $\forall\varepsilon>0$ $\exists B$ s.a $\forall x\in D_f,\ x<B$ $(x\in(-\infty,B))$ gäller $|f(x)-l|<\varepsilon$

$(f(x)\in(l-\varepsilon,\, l+\varepsilon))$

Ex



$\lim_{x\to-\infty} a^x=0$

OBESTÄMBARA GRÄNSVÄRDEN s. 145

7 st: "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\infty-\infty$", "$0\cdot\infty$", "∞^0", "0^0", "1^∞"

Redskap: Standardgränsvärden **s. 160**

$\left(a>1 \quad \lim_{x\to\infty} a^x=\infty\right)$

$\lim_{x\to\infty,\ a>1} \frac{a^x}{x^\alpha}=\infty$	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$	$(1+x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} e$
$\lim_{x\to\infty,\ \alpha>0}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$	$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} e$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{def av } e}{=} e$	

? $\lim_{x\to\infty,\ a>1} a^x$ **Bevis:** $a=1+p,\ p>0$

$a^x=(1+p)^x \qquad \forall x>1\ (x\to\infty) \quad \exists n\in\mathbb{N}$ s.a $n\le x<n+1$

$(1+p)^x \ge (1+p)^n \ge 1+np \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Bernoullis olikhet

$x\to\infty \Rightarrow n\to\infty \Rightarrow 1+np\to\infty \Rightarrow (1+p)^x\to\infty$

$p>0 \Rightarrow a^x\to\infty$

Olikheter och gränsvärden?

$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ om $\forall\alpha\ (-\infty,\alpha)$ $\exists\,\delta>0$ s.a. $\forall x\in D_f\cap(-\delta,\delta)$ $x\neq 0$ gäller $f(x)<\alpha$ $\quad f(x)\in(-\infty,\alpha)$

$\boxed{\lim_{x\to\infty,\ a>1}\frac{a^x}{x^\alpha}=\infty}$ **Bevis:** ① $\alpha=1$ $\quad \frac{a^x}{x} \overset{?}{\underset{x\to\infty,\ a>1}{\longrightarrow}} \infty \qquad a>1 \Leftrightarrow a=1+p,\ p>0$

$\forall x\in\mathbb{R}\ x\ge 1 \quad \exists n_x\in\mathbb{N} \quad n_x\le x<n_x+1$ (n beror av x)

bernoullis olikhet el binomialsatsen

$\frac{a^x}{x}=\frac{(1+p)^x}{x}\ge\underbrace{\frac{(1+p)^n}{n+1}}_{\text{mindre tal: mindre täljare, större nämnare}}\overset{*}{\ge}\frac{(1+np)}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{n(p+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})}=p$ Säger ingenting om $\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}$

$* \quad \frac{(1+p)^n}{n+1}\overset{**}{\ge}\frac{1+np+\binom{n}{2}p^2}{n+1}=\frac{1+np+\frac{n(n-1)}{2}p^2}{n+1}=\frac{n^2\left(\frac{p^2}{2}+(\dots)\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\xrightarrow[n\to\infty,\ x\to\infty]{}\infty$

② $\alpha\le 0 \Rightarrow \frac{a^x}{x^\alpha}\ge a^x \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

③ $0<\alpha<1 \Rightarrow \frac{a^x}{x^\alpha}\ge\frac{a^x}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$

④ $a>1$ $\left(\frac{a^x}{x^\alpha}=\left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha,\ \text{där } b=a^{\frac{1}{\alpha}}\ \text{(bevis i boken)}\right)$

Annat **bevis:**

$$\frac{(1+p)^x}{x^\alpha} \geq \frac{\text{"två steg längre än } \alpha\text{"}}{(n+1)^\alpha}$$

$$\geq \frac{1+\binom{n}{1}p+\binom{n}{2}p^2+\dots+\binom{n}{k_0+2}p^{k_0+2}}{(n+1)^{k_0+1}}$$

$$= \frac{n^{k_0+2}\frac{p^{k_0+2}}{(k_0+2)!}(1+O\to 0)}{n^{k_0+1}(1+O_0)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$\alpha:\ \exists\ k_0\in\mathbb{N}:\ k_0\leq\alpha<k_0+1$

indikation fixt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=0 \quad \text{för } a>1,\ \alpha>0$$

Bevis: $\log_a x=t$ (Sätt $t=\log_a x$)

$\Rightarrow x=a^t$ (per def) $\Rightarrow \frac{\log_a x}{x^\alpha}=\frac{t}{(a^\alpha)^t}\xrightarrow[\substack{t\to\infty\\x\to\infty}]{}0$ $\quad \left.\begin{matrix}a>1\\ \alpha>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a^\alpha>1$

? $t\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$? $\log_a x\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$ Sant!

$\alpha>0$
$a>1$

$$\boxed{\log_a x \ll x^\alpha \ll a^x \quad x\to\infty}$$

ordningsmässigt större för stora x

Sats (Gränsvärdenas egenskaper)

$f,g:D\to\mathbb{R}$, x_0 hopningspunkt till D

$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=L$ (x_0, l, L ändliga tal)

Då gäller: ① $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=l+L$ → s.146

② $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=l\cdot L$

③ om $L\neq 0$: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{L}$ (räcker att visa $\frac{1}{g(x)}\to\frac{1}{L}$, kombinera med ②)

Bevis:

① $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_\varepsilon>0$ s.a $\forall x\in D$, $0<|x-x_0|<\delta$

? så gäller $|(f(x)+g(x))-(l+L)|<\varepsilon$

Givet: $\forall\varepsilon_1>0$ $\exists\alpha_\varepsilon>0$ s.a. $\forall x\in D$, $0<|x-x_0|<\alpha_\varepsilon$ gäller $|f(x)-l|<\varepsilon_1$

$\forall\varepsilon_2>0$ $\exists\beta_\varepsilon>0$ s.a. $\forall x\in D$, $0<|x-x_0|<\beta_\varepsilon$ gäller $|g(x)-L|<\varepsilon_2$

ε: hur litet som helst

$|f(x)+g(x)-(l+L)|=|(f(x)-l)+(g(x)-L)|=$ ⊛

TRIANGELOLIKHETEN: $a,b\in\mathbb{R}$ s. 46

$\Rightarrow \boxed{|a+b|\leq|a|+|b|}$

Bevis:

(I) (skiss) $a,b\geq0$ $a,b\leq0$

$a\geq0$ $b<0$ → $a+b\geq0$

$a\geq0$ $b<0$ → $a+b<0$

(II) h.l, v.l ≥0 ⇒ olikheten är ekvivalent med

$|a+b|^2\leq(|a|+|b|)^2$

$|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=|a|^2+2ab+|b|^2\leq|a|^2+2|ab|+|b|^2=$

$\forall x\in\mathbb{R}$ gäller $x\leq|x|$ $=|a|^2+2|a||b|+|b|^2=(|a|+|b|)^2$

⊛ $\leq|f(x)-l|+|g(x)-L|$

Tag $\varepsilon>0$, godtyckligt

$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}>0\Rightarrow\exists\alpha_\varepsilon>0:\ \forall x\in D,\ 0<|x-x_0|<\alpha_\varepsilon$ $\quad |f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2}$ $\quad \exists\beta_\varepsilon>0:\ \forall x\in D,\ 0<|x-x_0|<\beta_\varepsilon$ $\quad |g(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$

Välj $\delta_\varepsilon=\min(\alpha_\varepsilon,\beta_\varepsilon)$

$\forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ $x\in D$

båda gäller

$\Rightarrow |x-x_0|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |x-x_0|<\alpha_\varepsilon$, $<\beta_\varepsilon$ $\Rightarrow$ ⊛ $\leq|f(x)-l|+|g(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$,

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=l+L.$

(Arc 3) **PÅSTÅENDE:**

$$\arctan\frac{1}{F_{2n}} = \arctan\frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2n+2}} \qquad (n \in \mathbb{N},\ F_n = \text{Fibonaccital})$$

Bevis:

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{F_{2n}}\right) = \tan\left(\arctan\frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

$$\arctan\frac{1}{F_{2n}} = \arctan\frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2n+2}} + k\pi$$ eftersom $\boxed{0<\arctan\frac{1}{F_{2n}},\arctan\frac{1}{F_{2n+1}},\arctan\frac{1}{F_{2n+2}}<\frac{\pi}{2} \text{ så är } k=0}$

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{F_{2n}}\right) = \tan\left(\arctan\frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{F_{2n}} = \left(\frac{1}{F_{2n+1}} + \frac{1}{F_{2n+2}}\right) \Big/ \left(1 - \frac{1}{F_{2n+1}}\cdot\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \Leftrightarrow \underbrace{F_{2n+1}F_{2n+2}}_{(F_{2n+1})^2 + F_{2n+1}F_{2n}} - 1 = F_{2n}F_{2n+2} + F_{2n}F_{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow (F_{2n+1})^2 - 1 = F_{2n}F_{2n+2}$$

GRÄNSVÄRDEN (FORTS.)

def| $f: D \to \mathbb{R}$, x_0 hopningspunkt till D

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ om $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ s.a $\forall x \in D: 0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ gäller $|f(x)-l|<\varepsilon$

$f \to \pm\infty \notin \mathbb{R}$ oegentligt gränsvärde (inte ett gränsvärde i fråga om underförstått ändliga gränsvärden)

Påstående

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \text{ och} \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = l_2\end{array}\right\} l_1 = l_2}$$

Bevis| Antag $l_1 < l_2$ $\quad (\overset{l_1}{|})\ (\overset{l_2}{|})$

Välj $\varepsilon_0 = \frac{l_2 - l_1}{3} > 0$ $\quad \exists\ \delta_1 > 0 : \forall x \in D\ \ 0<|x-x_0|<\delta_1 \quad |f(x)-l_1|<\varepsilon$

$\exists\ \delta_2 > 0 : \forall x \in D\ \ 0<|x-x_0|<\delta_2 \quad |f(x)-l_2|<\varepsilon$

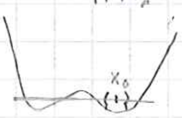
(ε valdes som ett tal därav beteckningen ε_0)

Sätt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

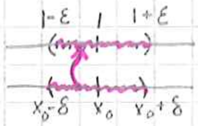
$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-l_{1,2}| < \varepsilon_0$ Motsägelse!

Påstående Om f har ett gränsvärde (egentligt), när $x \to x_0$, så är f begränsad nära x_0

Bevis| f är begränsad nära x_0 om $\exists C \in \mathbb{R}$ $\delta>0$ s.a $\forall x\in D$, $|x-x_0|<\delta$ $\ |f(x)| \le C$



Vi vet (givet) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$



Tag $\varepsilon = 1$ (t.ex) $\quad \exists\ \delta_1>0:\ x\in D\ 0<|x-x_0|<\delta_1 \} \Rightarrow f(x) < l+1$

$\exists\ \delta_2>0:\ x\in D\ 0<|x-x_0|<\delta_2 \} \Rightarrow f(x) > l-1$

Eventuellt $x_0 \in D$, $f(x_0)$

Tag $C = \underset{\text{om } x_0\in D}{|f(x_0)|} + \underbrace{|l+1| + |l-1|}_{|l|+1}$

$\Rightarrow \exists\ \delta>0 : |f(x)| \le C$ när $|x-x_0|<\delta$

Sats| $\boxed{x\to x_0 \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = 0,\ g(x) \text{ begränsad nära } x_0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0}$

Ex| $\underset{0}{x}\cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{begränsad}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Bevis Tag $\varepsilon > 0$ (godtyckligt)

? $\exists\ \delta > 0: \ 0 < |x - x_0| < \delta \ (x \in D)$

$\Rightarrow |f(x)g(x) - 0| < \varepsilon$

$|f(x)g(x)| \leq C\,|f(x)|$ nära x_0, ty g är begränsad

$\exists\ \delta' > 0: \ |f(x)| < \varepsilon$ när $0 < |x - x_0| < \delta'$ ty $f \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta'$ medför $|f(x)g(x)| < \underbrace{C \cdot \varepsilon}$

kan fortfarande göras hur litet som helst

$$\boxed{\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0}$$

Sats "Aritmetiska" operationer med gränsvärden $+, -, \cdot, /$

lätt, visas senare

Sats (Sammansatta funktioner)

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "F \circ f"'] & E \arrow[r, "F"] & G \end{tikzcd}$$

$f: D \to E$

$F: E \to G$

$D, E, G \subset \mathbb{R}$

x_0 hopningspunkt till D

$\lim_{x \to x_0} f(x) = t_0$

t_0 hopningspunkt till E

$\lim_{t \to t_0} F(t) = L$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \underbrace{F \circ f(x)}_{F(f(x))} = L$

Den yttre funktionen går mot den inre funktionens gränsvärde

Ex $e^{\sin x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} e^0 = 1$

Sats (Instängningsregeln)

$f, g, h: D \to \mathbb{R}$ x_0 hopningspunkt till D

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ i D (i en omgivning till x_0)

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Lemma om de två poliserna.

Sats (gränsvärden och olikheter)

$f: D \to \mathbb{R}$ x_0 hopningspunkt till D

$f(x) \leq C$ i en omgivning till x_0

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$\Rightarrow l \leq C$

Även om $f(x) < C$ så är ändå $l \leq C$

Sats $\boxed{\exists \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

OBS! x i radianer

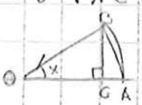
Bevis

$\left.\begin{array}{l} \sin x \text{ udda} \\ x \text{ udda} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sin x}{x}$ jämn dvs $\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin(x)}{x}$ $\Rightarrow$ det räcker att titta på $x > 0$

$x \to 0_+$ $\Rightarrow$ utan inskränkning $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(dvs $\underset{x > 0}{x \to 0}$)

? $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\sin x < x$



$\triangle ABC$ rät vinkel vid C $\Rightarrow |AB| > |BC| = \sin x$

$\overset{\frown}{AB} > |AB|$

$\parallel$

x

$\Rightarrow x > \sin x$

Olikhet mellan x och $\tan x$? $\tan x > x$

Arean av $\triangle OAD = \frac{1 \cdot \tan x}{2}$

ingår i $\triangle OAD$ men $\neq$

Arean av cirkelsektorn $OAB = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{x}{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \Rightarrow x < \tan x$

$\underbrace{x\cos x}_{\to 0} < \sin x < x \qquad x>0$

$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

? $\cos x \underset{x\to 0}{\to} 1$? $1-\cos x \underset{x\to 0}{\to} 0$

$0 \le |1-\cos x| = \left|2\sin^2\frac{x}{2}\right| < 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 \underset{x\to 0}{\to} 0$

$\Rightarrow \cos x \underset{x\to 0}{\to} 1$

$\underset{\downarrow\ 1}{\cos x} < \frac{\sin x}{x} < \underset{\downarrow\ 1}{1} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Ex

- $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{3}$ $(t=3x)$

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}\cdot\frac{3x}{x}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\cos x)}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t} = \sin 1$ $\quad \cos x = t \underset{x\to 0}{\to} 1$

OBESTÄMBARA GRÄNSVÄRDEN (Ex)

"$\frac{0}{0}$" $\left\{ \frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1 \quad \frac{2x}{x} \underset{x\to 0}{\to} 2 \right.$

"$\frac{\infty}{\infty}$" $\left\{ \frac{a^x}{x^a} \underset{x\to\infty}{\to} \infty \right.$

"$0\cdot\infty$" $\left\{ \underset{0}{f(x)}\underset{\infty}{g(x)} = \frac{f(x)^{\to 0}}{1/g(x)_{\to 0}} = \frac{g(x)^{\to\infty}}{1/f(x)_{\to\infty}} \right.$

"$\infty-\infty$" $\left\{ \begin{array}{l} \text{man försöker omvandla till en kvot} \\ x-\sqrt{x^2+x+1} = \frac{x^2-(x^2+x+1)}{x-\sqrt{x^2+x+1}} \underset{x\to\infty}{\to} -\frac{1}{2} \\ x-\sqrt{x^2+x+1} \underset{x\to-\infty}{\to} -\infty \\ \text{"}-\infty-\infty\text{"} \end{array} \right.$

GODTAGBART

"1^∞", "0^0", "∞^0" $\left\{ \begin{array}{l} (f(x))^{g(x)} \underset{\text{def}}{=} e^{g(x)\ln f(x)} \quad \boxed{f(x)>0} \\ (= a^{g(x)\log_a f(x)}) \end{array} \right.$ $\quad g(x)\ln f(x) \to \text{"}0\cdot\infty\text{"}$

Sats Varje växande uppåt begränsad funktion har ett gränsvärde.

Sats Följden $\boxed{\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}}$ är växande och uppåt begränsad. $\to$ s. 156

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Def $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Bevis

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\boxed{\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}}+\ldots+\frac{1}{n^n}$

$\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} < \frac{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}{k!} = \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$

$< \frac{1}{1\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{k-1}} = \frac{1}{2^{k-1}}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1/2} = 3$

$\Rightarrow$ Följden är uppåt begränsad

? (strängt) växande $\to$ s. 155

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \qquad 1-\frac{1}{n+1} > 1-\frac{1}{n}$

$-\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{n}$

? $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\ldots(1-\frac{k-1}{n+1})}{k!} > \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots\overbrace{(1-\frac{k-1}{n})}^{=0}}{k!}$

$\overset{(=)}{\ge} \sum_{k=0}^{n}\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\Rightarrow$ följden är strängt växande och uppåt begränsad

$\Rightarrow$ konvergent (har gränsvärde)

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow[\substack{x\to\infty \\ x\to-\infty}]{} e \qquad x\in\mathbb{R}}$$

$x\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists\, n_x\in\mathbb{N}:\quad n_x \le x < n_x+1 \qquad x\ge 1$

$x\to\infty \Leftrightarrow n_x\to\infty$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ x\to\infty}]{} \frac{e}{1} = e$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ x\to\infty}]{} e\cdot 1 = e$$

$\Rightarrow$ enligt instängningsregeln $\exists \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\Big\}\ x\to\infty$

$x\to-\infty \quad t=-x\to+\infty$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{t}\right)^t} = \frac{1}{\left(\frac{t-1}{t}\right)^t} = \left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^t = \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right) \xrightarrow[\substack{t-1\to\infty \\ x\to-\infty}]{} e\cdot 1 = e \Big\}\ x\to-\infty$$

$$\left(y=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0 \qquad \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

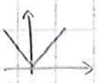
KONTINUERLIGA FUNKTIONER

Def 1 $f: D_f\to\mathbb{R}$

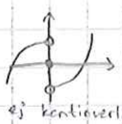
$\boxed{x_0\in D_f}$, x_0 hopningspunkt för D_f

f kallas kontinuerlig i x_0 om $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \boxed{= f(x_0)}$ $\Rightarrow$ (behövs inte med bokens def av lim uppfylls automatiskt)

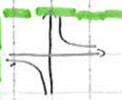
kontinuerlig



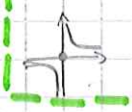
kontinuerlig



ej kontinuerlig

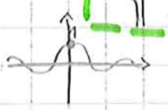


$f(x)=\frac{1}{x}$ kontinuerlig i hela sin definitionsmängd $=\mathbb{R}\setminus\{0\}$



$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ej kontinuerlig!

$f(x)\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ kontinuerlig i $\mathbb{R}$



Alla elementära funktioner är kontinuerliga (i sina definitionsmängder).

Satsen om mellanliggande värde (Bolzano)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f kontinuerlig i $[a,b]$

$f(a)\cdot f(b)<0$ (måste alltså ha olika tecken)

$\Rightarrow \exists\,\xi\in(a,b):\ f(\xi)=0$

Sats (Weierstraß)

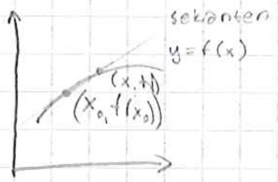
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$
slutet, begränsat

f är kontinuerlig i $[a,b]$

$\Rightarrow f$ ~~ant~~ är både ett största och ett minsta värde i $[a,b]$

DERIVATAN Kap. 3

Tangenten



Ekv av sekanten

$$\frac{y-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \text{lutningen av sekanten}$$

tangenten i (x_0, y_0) på kurvan
gränsvärde av sekanten som
passerar genom $(x_0, f(x_0))$ och $(x+h, f(x+h))$ när $h \to 0$

s.186

Ekv av TANGENTEN: $\frac{y-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$ Derivatan av f i punkten x_0

Definition av derivatan

Låt f: x tillhör definitionsområdet av f. Antar att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ existerar}$$

Då är f deriverbar i x. gränsvärdet kallas för derivatan av f i x och betecknas

$$\begin{cases} \frac{df}{dx}(x);\ Df(x); \\ D_x f(x),\ f'(x) \end{cases}$$

Anmärkning: i gränsvärdet måste man betrakta både $h>0$ och $h<0$ och "ensidiga" gränsvärden måste vara lika.

BERÄKNING AV DERIVATAN

- $f(x) = x$
  $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$$

- $\boxed{f(x) = |x|}$ → s 193
  $$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

  - $h>0$; $f(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$

  - $h<0$; $f(0) = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$

Slutsats: I punkten noll existerar derivatan inte men det finns ensidiga derivator.

- $f(x) = x^2$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

STANDARTA DERIVATOR

1. $C' = \lim_{h\to 0} \frac{C-C}{h} = 0$

$\alpha \neq 0$ 2. $\boxed{(x^\alpha)'} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^\alpha(1+\frac{h}{x})^\alpha - x^\alpha}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha-1} \lim_{h\to 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} = \boxed{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}$

3. $\boxed{(e^x)'} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = \boxed{e^x}$

$a>0$ $\boxed{(a^x)'} = (e^{x\ln a})' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)\ln a} - e^{x\ln a}}{h\cdot\ln a} \cdot \ln a = e^{x\ln a} \cdot \ln a \lim_{h\to 0} \frac{e^{h\ln a}-1}{h\ln a} = \boxed{a^x \cdot \ln a}$

$x>0$ 4. $\boxed{(\ln x)'} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h/x} \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\frac{1}{x}}$

STANDARTA GRÄNSVÄRDEN

1. $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$
2. $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$
3. $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$
4. $\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^\alpha - 1}{h} = \alpha$

Bevis

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^\alpha - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{e^{\alpha\ln(1+h)}-1}{\alpha\ln(1+h)}}_{1 \text{ st gräns } 1} \cdot \underbrace{\frac{\alpha\ln(1+h)}{h}}_{\alpha \cdot \text{ st grän } 2}$$

$$= \alpha$$

5. $\boxed{(\sin x)'} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos x \sin h}{h}}_{\cos x} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h}}_{0} = \boxed{\cos x}$

6. $\boxed{(\cos x)'} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{-\sin x \sin h}{h}}_{-\sin x} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} = \boxed{-\sin x}$

RÄKNEREGLER s.194

1 $\boxed{(cf)' = c\cdot f'}$ $(cf(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\cdot f'$

2. $\boxed{(f \pm g)' = f' \pm g'}$

Om f och g är deriverbara, så blir $f \pm g$ deriverbara och formeln gäller

$(f(x)+g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$

3 $\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$

$(f(x)\cdot g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) + f(x)g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot f(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

4. $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$ $(g(x) \neq 0)$

5. Derivatan av sammansättning

ex. $\sin(x^2)$

$\ln(\cos(x))$

e^{x^3+1}

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Ex) $(\sin(x^2))' = \cos(x^2)\cdot 2x$

$(\ln(\cos(x)))' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)$

$(\sin(e^{x^2}))' = \cos(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ i bemärkelsen

① $\exists \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (växande och uppåt begränsad)

② $e \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\to-\infty}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Logaritmer är en kontinuerlig funktion

$(1+x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} e \Rightarrow \underbrace{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{\frac{\ln 1+x}{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} \ln e = 1$

Sätt $t = \ln(1+x)$; $e^t = e^{\ln(1+x)} = 1+x$

$e^t - 1 = x$

$\frac{e^t-1}{t} = \frac{x}{\ln(1+x)}$. $t\to 0 \Leftrightarrow x \to 0$

$\Rightarrow \frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ t\to 0}]{} 1$

def f kallas deriverbar i x_0, $x_0 \in D_f$, inre punkt i D_f (tillhör D_f och är hopningspunkt)
om $\exists \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)}$
i så fall $f'(x_0)$ f:s derivata i x_0

def f kallas deriverbar i D om f deriverbar i x $\forall x \in D$
$h = x - x_0$ $\quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Sats f i $D_f \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ inre punkt i D_f
Då gäller:
f deriverbar i $x_0 \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = \varepsilon(x_0, h)$ s.a
$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + h\varepsilon$ $\quad \varepsilon \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Sant även om $h = 0$

Bevis $\boxed{\Rightarrow}$
Antag att f är deriverbar i x_0
$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0) - A \cdot h}{h}}_{\text{Sätt } \varepsilon(x_0,h)} = 0$ $\quad \lim_{h \to 0} \varepsilon = 0$

$\Rightarrow \boxed{f(x_0+h) - f(x_0) - Ah = h\varepsilon}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Antag $f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + h\varepsilon$ $\quad \varepsilon \xrightarrow[h \to 0]{} 0$
$\Rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A + \varepsilon \xrightarrow[h \to 0]{} 0 + A$
$\Rightarrow \exists \lim \ldots \Rightarrow f$ deriverbar i x_0

ε i detta fall är en funktion som går mot noll

$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + h\varepsilon}$

$\varepsilon(x_0, h) = \begin{cases} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0 \cdot h)}{h} & h \neq 0 \\ \text{vad som helst om } h = 0 \end{cases}$ $\quad \ldots + h\varepsilon$
$h = 0 \Rightarrow h\varepsilon = 0$

Kedjeregeln (deriveringsregeln för sammansatt funktion)
Om g är deriverbar i x_0 och f är deriverbar i $g(x_0)$, så är $f \circ g$ deriverbar i x_0, och $(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Bevis Sätt $t_0 = g(x_0)$
f deriverbar i $t_0 \Rightarrow f(t_0+k) - f(t_0) = Ak + k\varepsilon_1(t_0, k)$, där $A \in \mathbb{R}$ $\quad \varepsilon_1 \xrightarrow[k \to 0]{} 0$
g deriverbar i $x_0 \Rightarrow g(x_0+h) - g(x_0) = Bh + h\varepsilon_2(x_0, h)$ där $B \in \mathbb{R}$ $\quad \varepsilon_2 \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) \overset{*}{=} ABh + h\varepsilon(x_0,h)$, $\quad \varepsilon \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ $\qquad$ * Vill få ut

$(t_0 + k = g(x_0) + k = g(x_0+h))$ $\quad$ Sätt $k = g(x_0+h) - g(x_0)$

$f(t_0+k) = f(g(x_0+h))$
$f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) = f(t_0+k) - f(t_0) = Ak + k\varepsilon_1 =$

$= A(g(x_0+h) - g(x_0)) + k\varepsilon_1 = A(Bh + h\varepsilon_2) + k\varepsilon_1 =$
$= (AB)h + \underbrace{h \cdot A\varepsilon_2 + k\varepsilon_1}_{= h\varepsilon,\ \varepsilon \xrightarrow[h \to 0]{?} 0}$

$\varepsilon = A\varepsilon_2 + \frac{k}{h}\varepsilon_1 \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ $\quad$ ($\varepsilon_2 \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, $\frac{k}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} g'(x_0)$, $\varepsilon_1 \to 0$)

$\varepsilon_1 \xrightarrow[k \to 0]{} 0$
$\varepsilon_1 \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \to$ Ty $h \to 0 \Rightarrow k \to 0$ ty g kontinuerlig

$\Rightarrow \exists (f \circ g)'(x_0) = AB \cdot f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Sats g deriverbar i $x_0 \Rightarrow g$ kontinuerlig i x_0

Bevis $g(x_0+h)-g(x_0) = Bh + h\varepsilon_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0+0=0$
$\Rightarrow g$ kontinuerlig i x_0

Invers funktions derivata:
$f: D \to \underbrace{f(D)}_{f\text{:s värdemängd}}$ bijektion

$f(f^{-1}(y)) = y \qquad f^{-1}(f(x)) = x$

Derivera m.h.a kedjeregeln

$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} \neq 0$

$f(x)=y$ Förutsätter att f^{-1} deriverbar

Arcus 2c $\underbrace{4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}}$ | tan

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}\right) = \frac{\tan(4\arctan\frac{1}{5}) - \frac{1}{239}}{1+\tan(4\arctan\frac{1}{5})\cdot\frac{1}{239}}$$

$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{2\tan(2\arctan\frac{1}{5})}{1-\tan^2(2\arctan\frac{1}{5})} = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{10}{12}\Big/\frac{119}{144}\Big) = \frac{120}{119}$$

$$\tan\left(2\arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{2}{5}\Big/\frac{24}{25} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}} = \frac{120\cdot 239 - 119}{119\cdot 239 + 120} = \frac{119\cdot 239 + 239 - 119}{119\cdot 239 + 120} = 1$$

$\arctan(\tan\varphi) = \varphi$ endast om $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$0 < 4\arctan\underbrace{\tfrac{1}{5}}_{<1} < 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi$

$0 < \arctan\frac{1}{239} < \frac{\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{4} < -\arctan\frac{1}{239} < 0$

$-\frac{\pi}{4} < \varphi < \pi$ $\qquad \tan\varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ första kvadranten

Satsen om invers funktions derivata

$\exists (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ där $y = f(x)$ $\forall x \in I$

$f: I \to \mathbb{R}$ $f(I)$
(I intervall) f bijektion
f är deriverbar i I, $f' \neq 0$ i I
f^{-1} kontinuerlig i $f(I)$

Bevis $\dfrac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k}$

finns det $\lim\limits_{k\to 0}$?

$\exists \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \neq 0$ i I

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
låt $\boxed{h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)} = f^{-1}(y+k) - x$
$f^{-1}(y+k) = x+h \Leftrightarrow y+k = f(x+h)$

$k \to 0 \Rightarrow h \to 0$ Sant, ty f^{-1} kontinuerlig

$\exists \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \dfrac{1}{f'(x)}$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{x+h-x}{f(x+h)-f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{f'(x)}$$

$\boxed{h \neq 0 \text{ ty } k \neq 0, \; f^{-1} \text{ bijektiv}}$

HÄRLED DERIVATAN AV FUNKTIONEN ARCTAN.

$\left((\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \right)$

tan betraktas på ett speciellt intervall $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$

$\tan x_1 - \tan x_2 = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} - \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \frac{\sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cos x_2}$

$\frac{\pi}{2} > x_1 > x_2 > -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x_1 - x_2 > 0$

$x_1 - x_2 < \pi$

$\boxed{\begin{matrix} \cos > 0 \text{ i } \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ \sin > 0 \text{ i } [0,\pi] \end{matrix}}$

$\Rightarrow \boxed{\tan x_1 > \tan x_2}$

$\Rightarrow$ tan strängt växande i $\left[\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

tan bijektion i $\left[\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow$ invers $\arctan: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{(\tan(x))'} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x)\cdot \sin x}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}} \neq 0$

Sats f bijektion som är strängt monoton (dvs. växande/avtagande) i ett intervall I

$\Rightarrow$ $\exists f^{-1}$ kontinuerlig $\Rightarrow$ arctan kontinuerlig

$\boxed{(\arctan y)'_y} = \frac{1}{(\tan x)'_x} = \frac{1}{1/\cos^2 x} = \boxed{\cos^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$

$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\boxed{y}^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x \cdot \boxed{y^2} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \boxed{\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1]$

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

speglar $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$

(2.36,1) $x(x - \sqrt{x^2-1}) = \frac{x(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\cancel{x}(\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 1)}{\cancel{x}(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}$

$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = |x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

$x \to \infty \Rightarrow x > 0$

(8,j) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{e^{4x}-1} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^{3x}-1}{3x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{4x}{e^{4x}-1}}_{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

$\boxed{\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1}$

(9) a) $\lim_{x\to 0_+} x^x$ $\quad \boxed{x \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$

$\boxed{x^x \overset{\text{def}}{=} e^{x \ln x}}$ $x > 0$ $\quad \Rightarrow x^x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Vi vet att $\frac{\ln t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ sätt $t = \frac{1}{x}$

$x \ln x = \frac{\ln\frac{1}{t}}{t} = -\frac{\ln t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

b) $(\sin x)^x \overset{\text{def}}{=} e^{x \ln(\sin x)}$ $\quad x \ln \sin x = \frac{\overset{1}{x}}{\sin x} \overset{0}{\sin x \ln(\sin x)} \xrightarrow[x\to 0_+]{} 0$

$x \to 0+$ $\quad \sin > 0$ i $(0, \text{litet})$

$x \ln \sin x$

$\sin x \cdot \ln \sin x \xrightarrow[x\to 0_+]{} 0$

(11) g) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$

$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (x>0)}} (x^2)^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{2}{x}} = e^{\frac{2}{x}\ln x} \xrightarrow[x\to\infty]{} e^0 = 1$

h) $\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n = 2^\infty = \infty$

(12) a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$

b) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x} = \lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y} = 1}$ $\boxed{y = \arctan x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}$

(14) c) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan 2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan 2x}{3x \cdot 2} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

1

d) $\lim_{x\to 0} x^3 e^{1/x} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t^3} = \infty$

$\left(\frac{a^x}{x^c} \quad a>1, \ x\to\infty \right)$ $\boxed{x = \frac{1}{t}}$

e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{2x - \pi} = \lim_{t\to 0} \boxed{\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}{\sin(\frac{\pi}{2} - t)}} \cdot \frac{1}{-2t}$

$\boxed{t = \frac{\pi}{2} - x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0}$ $= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{\cos t} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

(17) b) $h(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(2x+1)}{\cancel{x-1}} = \boxed{3 \Rightarrow \text{funktionen är kontinuerlig}}$

Derivator av komplexvärda funktioner

$f: D \to \mathbb{C}$ (f har värden i $\mathbb{C}$ och är definierad i $\mathbb{C}$)

$D \subset \mathbb{R}$

$f(x) = e^{ix} \overset{\text{def}}{=} \cos x + i \sin x$

$\operatorname{Re} f = \cos x$

$\operatorname{Im} f = \sin x$

konjugat $\to$ $\overline{e^{ix}} = \cos x - i \sin x = e^{-ix}$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) + i\sin(x+h) - \cos x - i \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$

$= -\sin x + i \cos x$

antag att det är en vanlig exp funktion $\to$ $(e^{ix})' = ie^{ix} = i\cos x - \sin x$

utveckla

$e^{i(x_1 + x_2)} = \cos(x_1 + x_2) + i \sin(x_1 + x_2) = \ldots = e^{ix_1} \cdot e^{ix_2}$

$f(x), \quad f(x) \in \mathbb{C}$

$\operatorname{Re} f = u, \quad \operatorname{Im} f = v$

$f'(x) = u'(x) + i v'(x)$

$$\boxed{\begin{array}{l} x + iy = z \\ e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \end{array}}$$

Derivator av högre ordning

$f''(x) \overset{\text{def}}{=} (f')'(x)$

$f'''(x) = (f'')'(x)$

$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$

$f(x) = x^3 e^{2x}$

$f^{(10)}(x)$

$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{2x} + x^3 2 e^{2x}$

$f''(x) = 6x e^{2x} + 3x^2 \cdot 2e^{2x} + 3x^2 \cdot 2e^{2x} + x^3 4 e^{2x}$

$f'''(x) = 6e^{2x} + 6x \cdot 2e^{2x} + 6x \cdot 2e^{2x} + 3x^2 \cdot 4e^{2x} + 6x \cdot 2e^{2x} + 3x^2 \cdot 4e^{2x} + 3x^2 \cdot 4e^{2x} + x^3 8 e^{2x}$

(Binomialkoefficienter)

$D \subset \mathbb{R}$

$C(D)$ = mängden av alla funktioner som är kontinuerliga i D

f kont i $(a,b) \iff f \in C((a,b))$

$C^1(D)$ = mängden av funktioner med kontinuerlig förstaderivata i D

$C^k(D)$ = —— " —— " —— " —— derivata av ordning k i D

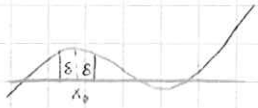
$C^\infty(D)$

$\sin \in C^\infty(\mathbb{R})$ sinusderivatan är kontinuerlig i $\mathbb{R}$ oavsett hur många gånger man deriverar.

DERIVATORS EGENSKAPER

def $f: D \to \mathbb{R}$

$x_0 \in D$



f har lokalt $\begin{matrix}\text{minimum}\\ \text{maximum}\end{matrix}$ i x_0 om

$\exists\, \delta > 0$ s.a $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap D$ gäller $f(x_0) \overset{\leq}{\geq} f(x_0)$

lokala maxima och minima kallas lokala extrema.

Sats (Fermat)

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$

f har lokalt extremum i $x_0 \in (a,b)$

f deriverbar i (a,b)

$f'(x_0) = 0$

f har lokalt extremum i x_0

$\exists\, f'(x_0)$

x_0 inre punkt i def. mängden

Geometriskt: i motsvarande punkt på grafen $(x_0, f(x_0))$ är tangenten horisontell.

Bevis $\exists\, f'(x_0) \iff \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Antag att f har lokalt minimum i x_0

$\overset{\text{def}}{\Rightarrow} f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ för något $\delta > 0$

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$x \in (x_0-\delta, x_0)$

$\Rightarrow x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$

$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$

$\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$

$\Rightarrow x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$

$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

$\boxed{\text{lika, båda} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)}$

$\Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) \leq 0 \\ f'(x_0) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$

LETA EFTER LOKALA EXTREMA:

tre kategorier av punkter

- intervalländpunkter
- punkter där $\nexists\, f'$
- punkter där $\exists f$, inre punkter $f' = 0$

största (minsta) värde = globalt maximum (minimum) i hela mängden där vi betraktar funktionen

strängt maximum (minimum)

$f(x_0) \underset{(<)}{>} f(x) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$.

$0<|x-x_0|<\delta$, för något $\delta>0$

f | deriverbar i x_0, x_0 inre punkt i D_f, $f'(x_0)=0 \not\Rightarrow f$ har lokalt extr. i x_0 (terasspunkt)

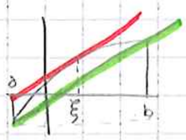
Lagranges medelvärdessats

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$

f kontinuerlig i $[a,b]$

f deriverbar i (a,b)

$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ s.a $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Rolles sats

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$

f kontinuerlig i $[a,b]$

f deriverbar i (a,b)

$f(a)=f(b)$

$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ s.a $f'(\xi)=0$

Bevis ① $f \equiv const$, dvs $f(x)=f(a)=f(b)$ $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$

② $f \not\equiv const \Rightarrow \exists\ x_1 \in (a,b) : f(x_1) \neq f(a)=f(b)$

Antag $f(x_1) > f(a) = f(b)$

f kontinuerlig på slutet och begränsat intervall $[a,b]$

$\Rightarrow f$ antar ett största värde i $[a,b]$, $f(\underset{\xi}{x_0}) = \max\limits_{[a,b]} f$

$\underset{\xi}{x_0} \neq a$, $\underset{\xi}{x_0} \neq b$, ty $\underbrace{f(a), f(b)}_{\text{ej störst}} < f(x_1) \Rightarrow \underset{\xi}{x_0} \in (a,b) \Rightarrow f'(\underset{\xi}{x_0})=0$

$\boxed{\text{Inre punkt}}$

ξ är punkter som finns men som man inte kan hitta!

Vanliga fel

- Trigonometriska funktioners tecken i olika intervall
  - Titta på intervallet!
- Minustecken bör inte blandas ihop med negativt
  - $t<0 \quad |t|=-t$
  - $|f(x)| = \underset{f(x)\geq 0}{f(x)}, \ \underset{f(x)\leq 0}{-f(x)}$
- Olika svarsalternativ
  - Kolla vilka svar som är fel!
- **DEFINITIONSMÄNGD!**
- Läs uppgifterna ordentligt
- Förkorta! Dock ej i ekvationer eftersom man kan förkorta med 0

Lagranges medelvärdessats

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$

f kontinuerlig i $[a,b]$; f deriverbar i (a,b)

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b): \quad f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Bevis Går ut på att hitta λ, μ s.a funktionen $\varphi(x) = f(x) - \lambda x - \mu$ uppfyller villkoren i Rolles sats.

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a) &= f(a) - \lambda a - \mu \\ \varphi(b) &= f(b) - \lambda b - \mu \end{aligned}\right\rangle =$$

$$f(a) - \lambda a - \mu = f(b) - \lambda b - \mu$$

$$\boxed{\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Välj μ s.a $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ Eller välj $\mu = 0$

$f(a) - \lambda a = \mu$

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x \quad (\text{valt } \mu = 0)$$

$$\varphi(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b$$

$$\varphi(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a$$

$$\varphi(a) - \varphi(b) = f(a) - f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-b) = f(a) - f(b) + f(b) - f(a) = 0$$

$\Rightarrow \varphi$ uppfyller villkoren i Rolles sats

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b): \varphi'(\xi) = 0$

$$\boxed{\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0} \Rightarrow \text{påståendet är sant.}$$

Cauchys medelvärdessats

$f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$

f, g: kontinuerliga i $[a,b]$

f, g deriverbara i (a,b), $g' \neq 0$ i (a,b)

$$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b): \quad \frac{f(b)-f(a)}{\underbrace{g(b)-g(a)}_{\neq 0 \text{ Rolles sats}}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Sats $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

f kontinuerlig i $[a,b]$

f deriverbar i (a,b)

$f' > 0$ i (a,b)
(< 0)

$\Rightarrow f$ strängt växande i $[a,b]$
(avtagande)

Bevis Tag $a \le x_1 < x_2 \le b$

$f' > 0$ (övriga helt analogt)

Tillämpa Lagranges sats på f i $[x_1, x_2]$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (x_1, x_2)$ s.a $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$$\Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = \overbrace{f'(\xi)}^{>0}\overbrace{(x_2 - x_1)}^{>0}$$

$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f$ strängt växande

Sats (INTEGRALKALKYLENS HUVUDSATS)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$
f kontinuerlig i $[a,b]$
f deriverbar i (a,b)
$f' = 0$ i (a,b)
$\Rightarrow f \equiv \text{const}$ i (a,b)

Bevis Tag $a \le x_1 < x_2 \le b$

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ för något $\xi \in (x_1, x_2)$

$\Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow \underbrace{f \equiv \text{const}}_{f(x) = C \ \forall x \in [a,b]}$ i $[a,b]$

OBS! Intervall!

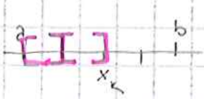
(2.20) $f(x) = 8x^3 - 36x^2 + 46x - 15$
? $\exists$ minst ett nollställe i vardera
$(0,1)$ $(1,2)$ $(2,3)$

$\left.\begin{array}{l} f(0) = -15 < 0 \\ f(1) = 3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Enligt satsen om mellanliggande värden $\exists\ \xi_1 \in (0,1) : f(\xi_1) = 1$ ty f är kontinuerlig

Man lokaliserar nollstället

Sats $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
f kontinuerlig i $[a,b]$
f deriverbar i (a,b)
$f' \underset{(<)}{>} 0$ i (a,b) (avtagande)
$\Rightarrow f$ strängt växande i $[a,b]$

Sats f uppfyller kraven ovan $f' \ge 0$ i $[a,b]$
$f' = 0$ i ändligt många punkter
$\Rightarrow f$ strängt växande i $[a,b]$
$f'(x_k) = 0 \quad k = 1 \ldots n$
$f' \ne 0 \quad \forall x \ne x_k$



titta på "småintervallen"

f växande (eller strängt växande) i $[a,b] \Rightarrow f' \ge$ i (a,b)
Antag att $\exists\ x_0 \in (a,b) : f'(x_0) < 0$

Titta på differenskvoten!

$f(x_0) \ne 0 \Rightarrow f \ne 0$ i en omgivning till x_0
f kontinuerlig, $f(x_0) \ne 0 \Rightarrow f \ne 0$ i en omgivning till x_0
Antag $f(x_0) > 0$ (utan inskränkning)
? $f > 0$ i $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ för något $\delta > 0$
f är kontinuerlig i $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \underset{(a,b)}{D}, \ |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$
Tag $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\ \delta_0 > 0 : \forall x \in (a,b) \ |x - x_0| < \delta_0$

$$\boxed{0 < \frac{1}{2} f(x_0) < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0 \ \forall x}$$

$f'(x_0)<0 \not\Rightarrow f'<0$ i en omgivning till x_0

$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ deriverbar} \Rightarrow f \text{ är kontinuerlig} \\ \qquad\qquad\quad \not\Rightarrow f' \text{ är kontinuerlig} \end{array}}$

Ex ① $\sin\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow}$ saknar gränsvärde

$\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$ ej kontinuerlig $\forall A$

② $x\sin\frac{1}{x} = 0$ $\quad x\to 0$ $\quad \sin\frac{1}{x}$ begränsad $\qquad f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ f kontinuerlig i $\mathbb{R}$

$|f(x)| \leq |x|$

? $\exists f'(0)$. $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x\sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \sin\frac{1}{x}$

$\Rightarrow$ $f(x)$ kontinuerlig men ej deriverbar i 0

③ $g(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\qquad |g(x)| \leq x^2$

$\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x} - 0}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \exists\, g'(0) = 0$

g' ej kontinuerlig i 0

$\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} g'(x)$

$x \neq 0$: $g(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$

$g'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \underbrace{2x\sin\frac{1}{x}}_{\to 0,\ x\to 0} - \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{saknar gränsvärde},\ x\to 0}$

$\boxed{\text{Man måste övertyga sig att den ena termen har ett gränsvärde}}$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} g'(x) \Rightarrow$ ej kont

Sats (Darboux)

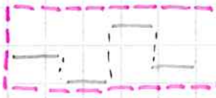
$f: (a,b) \to \mathbb{R}$

f deriverbar i (a,b)

$x_1, x_2 \in (a,b)$: $f'(x_1) \neq f'(x_2)$

$\Rightarrow \forall \lambda$ mellan $f'(x_1)$ och $f'(x_2)$ $\exists\, \xi$ mellan x_1 och x_2 s.a. $f'(\xi) = \lambda$

(Om f' kontinuerlig så följer det ur satsen om mellanliggande värde)

Ex  kan inte vara derivatan av en deriverbar funktion

Grafritning

$f: D \to \mathbb{R}$

def x_0 kallas stationär punkt för f om $\exists f'(x_0) = 0$

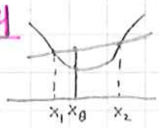
Karakterisering av stationära punkter

Analogt förfarande om $\nexists f'(x_0)$

Ex ① $f(x) = |x|$

② $f(x) = \sqrt{|x|}$

Konvexa/Konkava funktioner

def  (grafen ligger under sekanten)

$x_\theta = (1-\theta)x_1 + \theta x_2$, $\theta \in [0,1]$

$x_{\theta=0} = x_1 \qquad x_{\theta=1} = x_2$

f konvex $\underset{\text{intervall}}{:\ I}$ om $\boxed{f((1-\theta)x_1 + \theta x_2) \leq (1-\theta)f(x_1) + \theta f(x_2)}$ $\boxed{\forall x_1, x_2 \in I \;,\; \forall \theta \in [0,1]}$

def f konkav i I om

$\boxed{f((1-\theta)x_1+\theta x_2) \ge (1-\theta)f(x_1)+\theta f(x_2)}$ $\quad \boxed{\forall x_1,x_2 \in I,\ \forall \theta \in [0,1]}$

$\Leftrightarrow \boxed{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \forall x_1,x_2 \in I}$

Sats $f:(a,b) \to \mathbb{R}$

f konvex/konkav i (a,b)

$\Rightarrow f$ kontinuerlig i (a,b)

f deriverbar:

konvex/konkav: grafen ligger helt på ena sidan tangenten (lokalt)

Konvex: Grafen växer brantare än tangenten $\Leftrightarrow$ f' växande

Konkav: —— " —— " —— " —— " —— $\Leftrightarrow$ f' avtagande

Om $\exists f''$: $f''>0 \Rightarrow f'$ strängt växande $\Rightarrow f$ strängt konvex

$f''<0 \Rightarrow$ —— " —— avtagande $\Rightarrow$ —— " —— konkav

lok max i konkav; $\left.\begin{matrix} f''(x_0)<0 \\ f'(x_0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f$ har lok max i x_0

lok min i konvex; $\left.\begin{matrix} f''(x_0)>0 \\ f'(x_0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f$ har lok min i x_0

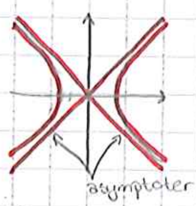
$f''(x_0)=0$? Teckenstudie av f'.

Inflexionspunkt: en punkt i vilken f:s graf byter konvexitetsegenskap

Ex $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x \ge 0 \\ -\sqrt{|x|} & x<0 \end{cases}$

ASYMPTOTER

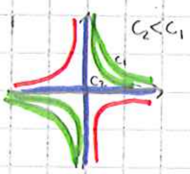
Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



$xy=C$

1) $C>0$

$x \neq 0$ $y=\frac{C}{x}$



2) $C=0$

$xy=0 <\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$

3) $C<0$

$y=f(x)$

1) VERTIKALA ASYMPTOTER

- På ändliga ställen
- I ändpunkter till definitionsintervall

Ex $f(x)=\ln x \quad D_f=(0,\infty)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

Def Vertikal asymptot för $f(x)$ när $x \to x_0$ kallas linjen $x=x_0$ förutsatt att

$f(x) \xrightarrow[x \to x_{0\pm}]{} \overset{+}{(-)}\infty$

Ex $f(x)=\frac{x}{1-x^2} \quad D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

$\lim_{x\to -1_-} f(x) = \frac{"-1"}{-0} = +\infty$

$\lim_{x\to +1_-} f(x) = \frac{"-1"}{+0} = -\infty$

2) VÅGRÄTA ASYMPTOTER

Linjen $y=y_0$ kallas vågrät asymptot för $f(x)$ när $x \to \overset{+}{(-)}\infty$

om $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=y_0$

Ex $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} e$

3) SNEDA ASYMPTOTER

hyperbeln: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

i I kv $xy \ge 0$

$y=b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} \quad x \ge 0$

Sned linje $y=kx+m$

$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx-m)=0 \Rightarrow \frac{f(x)-kx-m}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0 \quad \frac{kx}{x}=k$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{x}-k \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0 \Rightarrow \boxed{\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} k}$ $\boxed{m:\ m=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-kx}$ Allt detta fungerar förutsatt att $\exists$

sned asymptot dvs. $\exists\ k,m$ s.a $f(x)-kx-m \to 0$

Ex) ① $f(x)=\ln x$

Om $\exists k$ så $k=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$m=\lim_{x\to\infty}(\ln x-0x)=\infty \Rightarrow \nexists$ sned/vågrät asymptot till $\ln x$

② $f(x)=b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$, $\quad x\geq a>0$

$\frac{f(x)}{x}=b\frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}{x}=b\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}}}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{b}{a}=k$

$f(x)-\frac{b}{a}x=b\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}-\frac{x}{a}\right)=\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)=\frac{b}{a}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0_-$

③ $\frac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$

vågrät asymptot $y=0$ i $\pm\infty$

GRAFRITNING

① D_f
② All information ur $f(x)$: Nollställen, tecken, symetrier (jämn/udda), periodicitet, gränsvärden, asymptoter (Ibland: monotonicitet, min/max...)
③ $f'(x)$ monotonicitet, lokala extrema
④ $f''(x)$ konvexitet
⑤ Tabell
⑥ Rita grafen

(4.1 e) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

① D_f $\quad x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq\pm1$

② $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

tecken $\quad (-\infty,-1)$ $f<0$ $\quad (-1,0)$ $f>0$ $\quad (0,1)$ $f<0$ $\quad (1,\infty)$ $f>0$

f är udda

$\lim_{x\to-\infty}$, $\lim_{x\to-1_-}$, $\lim_{x\to-1_+}$, $\boxed{\lim_{x\to1_-}, \lim_{x\to1_+}, \lim_{x\to\infty}}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\infty$? $\exists$ sned asymptot

Om $\exists$ sned asymptot $y=kx+m$

$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1$

$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=0_+$ ovanifrån

$\Rightarrow y=x$ sned asymptot i $+\infty$

$\lim_{x\to1_-}\frac{x^3}{x^2-1}="\frac{1}{-0}"=-\infty$

$\lim_{x\to1_+}\frac{x^3}{x^2-1}="\frac{1}{+0}"=+\infty$

③ $f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{x^2-1}=0$

$x_{1,2}=0 \quad x_{3,4}=\pm\sqrt{3}$

x	0		$\sqrt{3}$	
y'	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ f har lokalt min i $\sqrt{3}$
f strängt avtagande i $(0,1),(1,\sqrt{3})$
växande i $(\sqrt{3},\infty)$

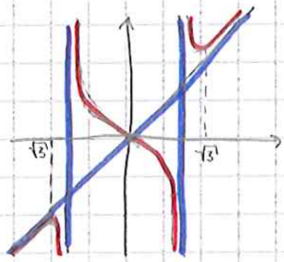
④ $f''(x)=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^{\cancel{2}}-2\cancel{(x^2-1)}\cdot2x(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^{\cancel{4}}}$

$=\frac{x[4x^4-4x^2-6x^2+6-4x^4+12x^2]}{(x^2-1)^3}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0 \Leftrightarrow x=0$

$(-\infty,-1)$	$"\frac{-}{+}"$	$f''<0$
$(-1,0)$	$"\frac{-}{-}"$	$f''>0$
$(0,1)$	$"\frac{+}{-}"$	$f''<0$
$(1,\infty)$	$"\frac{+}{+}"$	$f''>0$

(5)

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f			$0\ -$		$+ \ \cup \ +$	$+$ as. $y=x$
f'			$0\ -$		$+\ 0\ +$	
f''			0		$+\ +$	



$f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ (4.12 b))

① D_f : $x > 0$, $x \neq 1$

② Nollställen: inga

$f > 0$ för $x > 1$

$f < 0$ för $x < 1$

jämn/udda: meningslöst att fråga, ty D_f ej symmetrisk m.a.p. 0

$D_f = (0,1) \cup (1, \infty)$

$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \text{"}\dfrac{+0}{-\infty}\text{"} = -0$

$\lim_{x \to 1_-} f(x) = \text{"}\dfrac{1}{-0}\text{"} = -\infty$

$\lim_{x \to 1_+} f(x) = \text{"}\dfrac{1}{+0}\text{"} = \infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Linjen $x = 1$ är en vertikal asymptot. ?∃ sned asymptot i ∞

Om ja, $y = kx + m$, så

$k = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

$m = \lim_{x \to \infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \infty$

$\Rightarrow \nexists$ sned asymptot i ∞

③ $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

(Vi förväntar oss lokalt min)

x	0	1	e
f'	$-$		$-\ 0\ +$

④ $f''(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(\ln x)^{\cancel{2}} - 2\cancel{\ln x} \cdot \frac{1}{x}(\ln x - 1)}{(\ln x)^{\cancel{4}\,3}}$

$= \dfrac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$

x	0	1	e^2
f''	$-$		$+\ 0\ -$

$\left(\dfrac{+}{-}\right)$ $\left(\dfrac{+}{+}\right)$ $\left(\dfrac{-}{+}\right)$

Inflexionspunkt

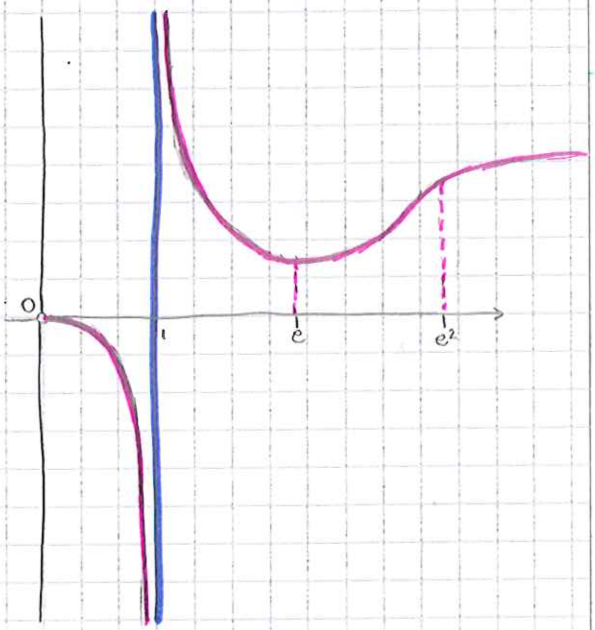
(5)

x	0	1	e	e^2	∞
f	$-0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow$	$e \nearrow$	$\frac{e^2}{2} \nearrow$	$+\infty$
f'	$-$	$-$	$0\ +$	$+$	
f''	$-$	$+$	$+$	$0\ -$	$-$

f konkav i $(0,1)$

— " — i (e^2, ∞)

konvex i $(1, e^2)$



$\lim_{x \to 0_+} f'(x) = \text{"}\dfrac{-\infty}{+\infty}\text{"} = \text{"}\dfrac{1}{-\infty}\text{"} = -0$

$f'(x) = \dfrac{\ln x \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)}{(\ln x)^2}$

$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

$x > 0$: $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$x < 0$: $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x} \cdot -1 = \dfrac{1}{x}$

(3.13 a) $\boxed{\big(\ln(\underbrace{x + \sqrt{x^2+1}}_{>0})\big)'} = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \dfrac{1 \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$

Olikheter och derivator

$\sin x \overset{?}{\leq} x \quad x \in [0, \infty)$

$f(x) = x - \sin x$

$f(0) = 0 - \sin 0 = 0$

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$

$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f \text{ växande} \end{array}\right\} \Rightarrow f \geq 0 \text{ i } [0, \infty)$

"Fusk": Vi använder $(\sin x)' = \cos x$; för att härleda de används $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ och för att härleda det används $\sin x \leq x$

Metoden är dock annars en bra metod!

$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad x \in [0, \infty)$

$g(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$

$g(0) = 0$

$g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \overset{?}{\leq} 0$

$g'(0) = 0$ Vi vet

$g''(x) = -x + \sin x \leq 0$ i $x \in [0, \infty)$

$\Rightarrow g'$ avtagande $\Rightarrow g'(x) \leq 0$ i $[0, \infty) \Rightarrow g$ avtagande $\Rightarrow g \leq 0$

$\Rightarrow \sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x \in [0, \infty)$

PRIMITIVA FUNKTIONER

1) Vad är en primitiv funktion? Hur många finns det?
2) Vad har primitiva funktioner för egenskaper?
3) Finns det "tillräckligt många" (för att det ska vara intressant) funktioner som har primitiva?
4) Finns det funktioner som inte har en primitiv?
5) Hur hittar man den primitiva till en funktion?
6) Tillämpningar

Def F kallas primitiv (funktion) till f i D, om $\exists\ F' = f$ i D.
(omvändning till derivata)

Ex 1) x^2 är primitiv till $2x$
2) $\ln(x + \sqrt{x+1})$ är primitiv till $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
3) $x^2 + 1$ är primitiv till $2x$

Sats $f: \underset{\text{Intervall}}{I} \to \mathbb{R}$

F är en primitiv till f i I

$\Rightarrow$ Alla primitiva till f ges av $\Phi_C = F + C$, där $C \in \mathbb{R}$

Bevis 1) ? $\Phi_C = F + C$ primitiv till f i I

$\Phi_C' = (F+C)' = F' + C' = f + 0 \Rightarrow \Phi_C$ är primitiv till f i I

2) Finns det andra primitiva till $f: I$?
Antag att Φ är primitiv till f i I
$(\Phi - F)' = \Phi' - F' = f - f \equiv 0$ i I
$\Rightarrow \Phi - F$ har derivata $\equiv 0$ i ett intervall
$\Rightarrow \Phi - F = \text{const} \Rightarrow \Phi = \Phi_C$ för något C

$f = \frac{1}{x} \quad F = \ln|x| + C \Rightarrow$ egentligen fel ty $I = \underbrace{(-\infty, 0)}_{C_1} \cup \underbrace{(0, \infty)}_{C_2}$, $C =$

PRIMITIVA FUNKTIONER

Def F kallas primitiv (funktion) till f i D, om $(\exists)\ F' = f$ i D
F en primitiv till $f \to$ alla primitiva till f i I ges av $F + \text{const}$ $\boxed{\text{i Intervallet } I}$

	f	$F + C$
1	x^n, $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$ (*)
3	e^x $\left(a^x = e^{x \ln a},\ a \neq 1,\ a > 0\right)$	$e^x + C$
4	$\sin x$	$-\cos x + C$
5	$\cos x$	$\sin x + C$

6	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$ (*)
7	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$ (*)
8	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$ $(-\text{arccot}\, x + C)$
9	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin + C$ $(-\arccos + C)$

10	$\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}$	$\ln\|x + \sqrt{x^2+\alpha}\| + C$ (*)

(arcsin kontinuerlig i $[-1, 1]$
deriverbar i $(-1, 1)$)

*C kan stå för olika konstanter på olika delintervall.

Egenskaper

Följer ur derivatans egenskaper:
Primitiv funktion = obestämd integral

Ex $\underbrace{\int}_{\text{alla primitiva}} \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{funktion av } x}$ $\left(\underbrace{\int_b^a f(x)\,dx}_{\text{tal}} = \int_a^b f(a)\,da \right)$

I egenskaperna: när det står $\int f(x)dx$ antas implicit att f har primitiv (i D)

Linearitet:

$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$

$$\boxed{\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)\,dx \quad (\text{t.y } (\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g)}$$

Partiell integration

Metod som grundar sig på satsen om partiell integration som är omvändningen till produktregeln för derivatan.

Satsen om P.I

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

Bevis $(v.l)' = f'(x)g(x)$
$(h.l)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)\cdot g'(x) = f'(x)g(x)$
$\Rightarrow (v.l)' = (h.l)'$ (i D) $\Rightarrow$ Det skiljer konstant mellan de (*) konstanterna är "inbakade" i $\int$-beteckningen

Ex $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \ln x - x + C$

Variabelsubstitution

Metod som grundar sig på omvändningen till kedjeregeln

Satsen om variabelsubstitution

f har primitiv (i $g(D)$), g funktion, deriverbar i D

$\Rightarrow F(g(x)) = \int f(g(x))\,g'(x)\,dx$

Bevis $(v.l)' = (F(g(x)))' \overset{\text{enl kedjeregeln}}{=} F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x) = (h.l)'$

$\Rightarrow$ v.l och h.l skiljer sig med konstant, som är "inbakad" i $\int$
(tolkning: $\exists C$ s.a $F(g(x)) = \int \ldots + C$)

Ex $\int \arctan x \, dx \overset{p.i}{=} x \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}(2x)\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

Elementära funktioners derivator är elementära funktioner
Det finns (många) elementära funktioner vars primitiva inte är elementära.

Exempel på sådana: $e^{-x^2}, e^{x^2}, \frac{1}{\ln x}, \frac{\sin x}{x}$

Partiell integration (som metod)

1. Funktioner med "enkla" derivator $\begin{cases}\ln x\\ \arctan x\end{cases}$
2. $\int$ produkt av funktioner, vars derivator är av samma typ som funktionerna själva: polynom, $e^{\alpha x}$, trigonometriska $\begin{cases}\sin\beta x\\ \cos\beta x\end{cases}$

$$\sum P(x)\, e^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\cos\beta x\\ \sin\beta x\end{Bmatrix} \qquad \text{(kvasipolynom)}$$

3. **Sats** $f: I \to \mathbb{R}$ (intervall)

f kontinuerlig i I $\Rightarrow$ $\exists$ primitiv till f i I

(5.2 f) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-1/2} + C \qquad (x>0)$

(5.9 h) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}(\cos x)'\,dx = \begin{bmatrix} t=\cos x\\ dt=(\cos x)'dx\end{bmatrix} = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|\cos x| + C$

(5.11 f) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\,dx = \begin{bmatrix} t=\ln x\\ dt=\frac{1}{x}dx\end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$

(5.18 a) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx \overset{PI}{=} e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx \overset{PI}{=} e^x\sin x - \left(e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx\right) = e^x\sin x - e^x\cos x - \underbrace{\int e^x\sin x\,dx}_{I}$

$2I = e^x(\sin x - \cos x) + C$

$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

Ex $\displaystyle\int x^2\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int x^2(\sin 2x)'\,dx \overset{PI}{=} \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \frac{1}{2}\int 2x\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \int x\sin 2x\,dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}\int x(\cos 2x)'\,dx = \frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \ldots$

$\displaystyle\int \cos\beta x \qquad \int \sin\beta x$

$\displaystyle\int \sin^2 2x\,dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$

$\displaystyle\int \cos^2\beta x\,dx = \int \frac{1+\cos 2\beta x}{2}\,dx$

$\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)\\ &\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ &\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

$\displaystyle\int \sin^n x\cos^m x\,dx$

1) något av n, m udda, säg $n = 2k+1$

$\displaystyle\int \sin^{2k}x\cdot\sin x\cdot\cos^m x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)^k\cos^m x\cdot(\cos x)'\,dx$

$t = \cos x$

2) både m, n jämna

$\displaystyle\int (\sin^2 x)^k(\cos^2 x)^l\,dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l dx$

RATIONELLA FUNKTIONER

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ P, Q polynom

① Jämför gradtalen i täljare och nämnare; om deg $P \geq$ deg Q, utför polynomdivision.

$\frac{P}{Q} = \underbrace{kvot}_{\text{polynom}} + \frac{P_1}{Q}$ där deg $P_1 <$ deg Q

deg $P <$ deg Q i fortsättningen

② Finn $\underbrace{\text{nollställena}}_{\text{de reella}}$ till nämnaren; faktorisera Q.

α reellt nollställe till Q med multiplicitet m

$\Leftrightarrow Q(x) = (x-\alpha)^m Q_1(x)$ $Q_1(\alpha) \neq 0$ (Faktorsatsen för polynom)

$Q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_k)^{m_k} \tilde{Q}(x)$ $\tilde{Q}$ har inga reella nollställen $\Rightarrow$ deg $\tilde{Q}$ jämnt

$x^{2l+1} + \ldots$

$\underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$; $\underset{x \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$

Sats (om komplexa nollställen till polynom med reella koefficienter)

$P(z)$, med reella koefficienter, z_0 är nollställe till P

$\Rightarrow \bar{z}_0$ är också nollställe till P

(om $z_0 \in \mathbb{R}$ ger satsen inget nytt)

$\tilde{Q}$ $z_0 = x_0 + iy_0$ nollställe, $z_0 \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$ nollställe

Faktorsatsen $\Rightarrow$ $\tilde{Q}(x) = (x-(x_0+iy_0))(x-(x_0-iy_0))\tilde{\tilde{Q}}(x)$

$= ((x-x_0)-iy_0)((x-x_0)+iy_0) =$

$(x-x_0)^2 - (iy_0)^2 = (x-x_0)^2 + y_0^2 =$

$= x^2 \underbrace{- 2x_0 x + (x_0^2+y_0^2)}_{\text{reella}}$

$\Rightarrow \tilde{Q}(x) = (x^2+bx+c)^{l}\tilde{\tilde{Q}}(x)$

$\Rightarrow Q(x) = A(x-\alpha)^m \cdots \underbrace{(x^2+bx+c)^l}_{\text{reell andragradsfaktor som saknar rella nollställen}} \cdots$

③ Partialbråksuppdela $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (deg $P <$ deg Q)

④ Integrera partialbråken

Varje faktor av typen $(x-\alpha)^m$ ger upphov till m partialbråk

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x-\alpha)^m}$$

Varje faktor av typen $(x^2+bx+c)^l$ ger upphov till l partialbråk

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+bx+c)^l}$$

Ex!

$$\frac{2x+1}{(x-2)^4(x^2+1)^2(x^2-2x+2)^3} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-3)^3} + \frac{A_4}{(x-4)^4} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2} + \frac{D_1x+E_1}{(x^2-2x+2)} + \frac{D_2x+E_2}{(x^2-2x+2)^2} + \frac{D_3x+E_3}{(x^2-2x+2)^3}$$

(5.23 b)

$$\int \frac{x+13}{x^2-4x-5}\,dx = \int \frac{x+13}{(x+1)(x-5)}\,dx = -2\int \frac{1}{x+1}\,dx + 3\int \frac{1}{x-5}\,dx = -2\ln|x+1| + 3\ln|x-5| + C(4)$$

C_1 $\quad -1 \quad$ C_2 $\quad 5 \quad$ C_3

$$\frac{x+13}{(x+1)(x-5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5} \qquad \underline{x \neq -1;5}$$

$$x+13 = A(x-5) + B(x+1) \quad \underline{\forall x}$$

$x=5 \quad 18 = 6B,\ B = 3;\quad x=-1;\quad 12=-6A,\ A=-2$

(5.24 a)

$$\int \frac{1}{x(x-3)^2}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{9}\int \frac{1}{x-3}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{9}\ln|x-3| - \frac{1}{3}\frac{1}{(x-3)} + C$$

$$\frac{1}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} \qquad \underline{\forall x \neq 0;3}$$

$$1 = A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx \qquad \underline{\forall x}$$

$x=0 \quad 1 = 9A \quad A = \frac{1}{9}$

$x=3 \quad 1 = 3C \quad C = \frac{1}{3}$

$x^2 \quad 0 = A + B \quad B = -\frac{1}{9}$

$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha| \ (+C)$

$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \frac{1}{(-k+1)(x-\alpha)^{-k+1}} \ (+C)$

$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx \qquad x^2+bx+c$ saknar reella nollställen

$\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^m}\,dx$

$\int \frac{x}{x^2+bx+c}\,dx$

$\int \frac{x}{(x^2+bx+c)^m}\,dx$

$$\boxed{\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx}$$

$$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \underbrace{\boxed{\frac{4c-b^2}{4}}}_{=d^2} > 0$$ ty reella nollställen saknas

$$\int \frac{x}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+d^2}\,dx = \int \frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+d^2}\,d\left(x+\frac{b}{2}\right) - \frac{b}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+d^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = x+\frac{b}{2} \\ dt = dx \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{t}{t^2+d^2}\,dt - \frac{b}{2}\int \frac{1}{t^2+d^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+d^2) - \frac{1}{d^2}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{d}\right)^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+d^2) - \frac{1}{d}\int \frac{\frac{1}{d}}{\left(\frac{t}{d}\right)^2+1}\,dt = \boxed{\frac{1}{2}\ln(t^2+d^2) - \frac{1}{d}\arctan\frac{t}{d} + C}$$

(5.28 c)

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{x+1}{(x-1)^2+2^2}\,dx = \int \frac{(x-1)+2}{(x-1)^2+2^2}\,dx = \int \frac{x-1}{(x-1)^2+2^2}\,dx + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2+2^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left((x-1)^2+2^2\right) + \frac{1}{2}\int \frac{d\left((x-1)/2\right)}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \arctan\frac{x-1}{2} + C$$

INTEGRALER AV FUNKTIONER SOM INNEHÅLLER RÖTTER

① $$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{2t}{t+1}\,dt = 2\int \frac{(t+1)-1}{t+1}\,dt = 2\int dt - 2\int \frac{1}{t+1}\,dt = 2t - 2\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{2+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{t^2 \cdot 6t^5}{2+t^3}\,dt$$

Sätt $t = \sqrt[6]{x}$

$x^{\frac{1}{3}},\ x^{\frac{1}{2}}$

$x = t^6 \quad dx = 6t^5\,dt$

$$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} \qquad \int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}}$$

$$t^2 = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k/q_k}\right)dx$$

Sätt $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/q}$ där q är minsta gemensamma nämnare för $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_k}{q_k}$

2 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

reella nollställen eller inte?

a:s tecken

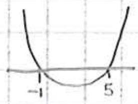
I ax^2+bx+c har två reella nollställen

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{a\frac{x-x_1}{x-x_2}(x-x_2)^2} = \boxed{|x-x_2|\sqrt{\frac{ax-ax_1}{x-x_2}}}$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2-4x-5}}dx = \int \frac{1}{1+\sqrt{(x+1)(x-5)}}dx = \int \frac{1}{1+\sqrt{\frac{x+1}{x-5}}\sqrt{(x-5)^2}}dx = \int \frac{1}{1+|x-5|\sqrt{\frac{x+1}{x-5}}}$$

$x \geq 5$

$x \leq -1$



(spelar ingen roll om $a>0$ eller $a<0$)

I båda fallen: $t^2 = \frac{x+1}{x-5}$

II ett dubbelt reellt nollställe $\sqrt{a(x-x_0)^2} = \sqrt{a}\,|x-x_0|$ $x \geq x_0$, $x < x_0$

(a måste vara >0)

III inga reella nollställen $ax^2+bx+c > 0$ $a>0$

Kvadratkomplettering: $\sqrt{t^2+1}$ $t = \tan u$, $t^2+1 = \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} + 1 = \frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\cos^2 u}$

$\Rightarrow \sqrt{t^2+1} = \frac{1}{|\cos u|}$

$dt = \frac{1}{\cos^2 u}\,du$

Leder till $\int R(\sin u, \cos u)\,du$

IV två reella nollställen $a<0$

Kvadratkomplettering $\rightsquigarrow \sqrt{1-t^2}$ $t = \sin u$, $\cos u$

$\sqrt{1-t^2} = |\cos u|$ $(t = \sin u)$

$dt = \cos u\, du$

Leder till $\int R(\sin u, \cos u)\,du$

V Kvadratkomplettering $\rightsquigarrow \sqrt{x^2+\alpha}$ $\alpha>0$ $\alpha<0$

$a>0$

Substitution som påminner om

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx = \ln\left|\underbrace{x+\sqrt{x^2+\alpha}}_{=t}\right| + C$$

$t = x+\sqrt{x^2+\alpha}$

$t^2 - 2tx + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + \alpha$

$x = \frac{t^2-\alpha}{2t}$ Ingen rot

$dx = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-\alpha)}{4t^2}\,dt$

För $\alpha<0$: $t>0$, $t<0$

Testa enklare substitution: Sätt $u = \sqrt{x^2+\alpha}$ $u^2 = x^2+\alpha$ $x = \sqrt{u^2-\alpha}$ $dx = \frac{1}{2\sqrt{u^2-\alpha}}2u\,du$

rötterna är kvar!

HYPERBOLISKA FUNKTIONER

def $\boxed{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$

def $\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ Hyperboliska ettan

($x^2 - y^2 = 1$ hyperbel)

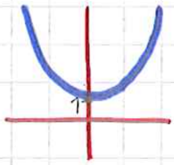
$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

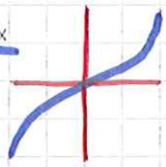
$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

...

cosh x



sinh x



$\sinh x = y$

$e^x - e^{-x} = 2y$

$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$

$(e^x)_{1,2} = \boxed{\frac{y \pm \sqrt{y^2+1}}{1}}$, $e^x > 0$

$\boxed{x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})}$

$$\boxed{\begin{gathered}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \text{inversen av sinh}\end{gathered}}$$

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2+bx+c)^m}\,dx$$

Steg 1: Kvadratkomplettering: $\displaystyle\int \frac{B\overbrace{(x+\frac{b}{2})}^{=t} + (C - \frac{Bb}{2})}{(\underbrace{(x+\frac{b}{2})}_{t})^2 + \underbrace{\frac{4c-b}{4}}_{=d^2})^m}\,\underbrace{d(x+\frac{b}{2})}_{dt}$

$$\int \frac{t}{(t^2+d^2)^m}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+d^2)'}{(t^2+d^2)^m}\,dt = \begin{bmatrix} u = t^2+d^2 \\ du = 2t\,dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^m} = \frac{1}{2}\,\frac{u^{-m+1}}{-m+1} + C = \ldots$$

tillbaka till t tillbaka till x

partiell integration

$$I_m(t) \quad \int \frac{1}{(t^2+d^2)^m}\,dt = \frac{1}{d^2}\int \frac{d^2+t^2-t^2}{(t^2+d^2)^m}\,dt = \frac{1}{d^2}\int \frac{1}{(t^2+d^2)^{m-1}}\,dt - \frac{1}{d^2}\int \frac{t \cdot t}{\underbrace{(t^2+d^2)^m}_{f'}}\,dt$$

$$= \frac{1}{d^2} I_{m-1}(t) - \frac{1}{d^2}\Big[\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{(t^2+d^2)^{m-1}}}_{f}\cdot t - \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{(t^2+d^2)^{m-1}}\cdot 1\,dt\Big]$$

negativt tal

$$= \frac{1}{d^2} I_{m-1}(t) + \frac{1}{2d^2(m-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+d^2)^{m-1}} - \frac{1}{2d^2(m-1)} I_{m-1}(t) = \frac{1}{2d^2(m-1)}\frac{t}{(t^2+d^2)^{m-1}} + \frac{1}{d^2}\Big(1 - \frac{1}{2(m-1)}\Big) I_{m-1}(t)$$

Ex! $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{\boxed{1+x^2-x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x\cdot x}{(x^2+1)^2}\,dx =$

$$\left(f = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}\right)$$

$$= I_1(x) - \frac{1}{2}(-1)\frac{1}{x^2+1}\cdot x + \frac{1}{2}(-1)\underbrace{\int \frac{1}{x^2+1}\cdot 1\,dx}_{I_1} = \frac{1}{2} I_1(x) + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + C$$

Integraler av $R(\sin x, \cos x)$

- Övertyga dig om att standardsubstitution behövs!
- Försök sänka gradtalet!
- Standardsubstitution leder till $\int$ av rationell funktion

$\boxed{\left.\begin{matrix}\sin x \\ \cos x\end{matrix}\right\} \text{ uttrycka den i } \tan\frac{x}{2}}$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

$$\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$t = \tan\frac{x}{2}$ $\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$dt = \left(\tan\frac{x}{2}\right)' dx = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}\cdot 2\,dt$$

(Man kan också sätta $x = 2\arctan t \in (-\pi, \pi)$

$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$ $\qquad x \notin (-\pi, \pi)$ $\quad x = 2\arctan + C_1$)

(5.39 a)

$$\int\frac{1}{2+\sin x} = \begin{bmatrix} t = \tan\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\end{bmatrix} = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\,dt = \int\frac{1}{1+t^2+t}\,dt = \int\frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \int\frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3/4}\int\frac{1}{\frac{4(t+\frac{1}{2})^2}{3}+1} = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C$$

(Förenkla?)

Ex)

$$\int\frac{1}{2+\cos^2 x} = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2}}\,dt$$

t^4 i nämnare

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int\frac{2}{5+\cos 2x} = \begin{bmatrix} u = \tan\frac{2x}{x} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

leder istället till t^2 i nämnare

(5.40 c)

$$\int\frac{\cos x}{\sin x+\sin^2 x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx\end{bmatrix} = \int\frac{1}{t(1+t)}\,dt$$

(4.40 f)

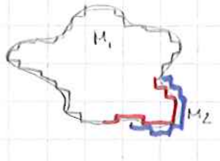
$$\int\frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx = \int\frac{1/\cos^2 x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+2} = \int\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x+2}\,dx$$

RIEMANNINTEGRALEN

Bestämd integral $\boxed{\int_a^b}$

Area: mängder i planet $M \subset \mathbb{R}^2$

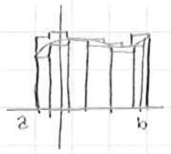
Funktion:
1) $A(M) \geq 0$
2) $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$
$\Rightarrow A(M) = A(M_1) + A(M_2)$
3) $\underbrace{M_1 \cong M_2}_{\text{kongruens}} \Rightarrow A(M_1) = A(M_2)$
4) längdenhet e, $l(e) = 1$
$\Rightarrow$ kvadraten med sidan e har area 1



$A_1 \leq A(M) \leq A_2$

$M_1 \subset M \subset M_2$

$\searrow M \quad M \swarrow$



$f \geq 0$

(541 a) $\int \sin^5 x \, dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x \, dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 \cdot (\cos x)' \, dx \qquad (t = \cos x)$

b) $\int \sin^4 x \, dx = \int \sin^3 x \sin x \, dx = -\sin^3 x \cos x + \int \cos x \, 3\sin^2 x \cos x \, dx =$

$= -\sin^3 x \cos x + 3\int \sin^2 x \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} dx = -\sin^3 x \cos x + 3\int \sin^2 x \, dx - 3\int \sin^4 x \, dx$

$\Rightarrow 4\int \sin^4 x \, dx = -\sin^3 x \cos x + 3\int \sin^2 x \, dx$

$\left(\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x \, dx \right)$ "receptet" om man har en sådan integral

$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}}$

$\int \sin^4 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^2 dx \quad \begin{cases} \int \frac{1}{4} \\ \int \cos 2x \\ \int \cos^2 x \end{cases} \longrightarrow \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx$

c) $\int \sin 5x \cos x \, dx = \sin 5x \cdot \sin x - 5\int \cos 5x \cdot \sin x \, dx = \sin 5x \sin x + 5\cos 5x \cos x + 5^2 \int \sin 5x \cos x \, dx$

Kom ihåg att välja rätt vid partialintegrationen

Integralen vi började med Lös ut!

$\sin 5x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x)$

d) $\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx$

e) $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$

$(\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^2 \qquad \cos^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad$ En metod

$\int \sin^4 x \cos x (\sin x)' dx = \sin^5 x \cos x - \int \sin x (4\sin^3 x \cos x + \sin^4 x (-\sin x)) dx$

$= \sin^5 x \cos x - 4\int \sin^4 x \cos x \, dx + \underbrace{\int \sin^6 x \, dx}_{\text{samma tillvägagångssätt som i b)}}$

(Fast man borde ha integrerat $\sin^5 x$ i början för då slipper man mellanledet)

f) $\int e^{2x} \sin x = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{2}\int e^{2x} 3\cos 3x \, dx$

(Partialintegrera två gånger men kom ihåg att välja samma term båda gånger för att undvika att gå i cirklar!)

CHALMERSINTEGRALEN

(370) $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx$

① $t = x + \sqrt{x^2 + a^2}$

$t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + a^2$

$x = \frac{t^2 - a^2}{2t}$

$dx = \frac{2t \cdot 2t - 2t^2 + 2a^2}{4t^2} dt = \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt$

$\int \left(t - \frac{t^2 - a^2}{2t} \right) \cdot \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt$

potenser av t $\rightsquigarrow$ tillbaka till t

② $x = a \tan t \qquad a > 0$

$\int \sqrt{a^2 \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + a^2} \cdot a \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt =$

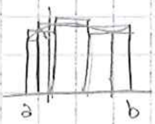
$= a^2 \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = a^2 \int \frac{1}{\cos^2 t \cdot |\cos t|}$

Om $\cos x > 0 \rightarrow a^2 \int \frac{1}{\cos^3 t} dt = a^2 \int \frac{\cos t}{\cos^4 t} = a^2 \int \frac{(\sin t)'}{(1-\sin^2 t)^2} dt$

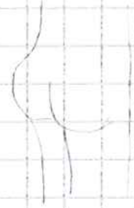
$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int x \frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \underbrace{\int \sqrt{x^2+1}\,dx}_{\text{flyttas till andra sidan}} + \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}_{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}$

$\int \frac{1}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}\,dx$ (Trigonometriska ettan kan användas omvänt)

Riemann integralen (forts.)



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$
slutet och begränsat
f begränsad



$\tau = a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$
τ : indelningen

Darboux summor:

$$S_\tau = \sum_{k=1}^{n} \max^*_{[x_{k-1}, x_k]} f (x_k - x_{k-1}) \qquad s_\tau = \sum_{k=1}^{n} \min^*_{[x_{k-1}, x_k]} f (x_k - x_{k-1})$$

(A: arean under f:s graf, över x-axeln, mellan $x=a$ och $x=b$ (om den finns))

$\boxed{s_\tau \le A \le S_\tau}$

Vad händer om man förfinar indelningen?
τ': $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x'_m < x_m < \ldots < x_n = b$

$$S_{\tau'} = \sum_{k=1}^{m-1} \max^*_{[x_{k-1}, x_k]} f (x_k - x_{k-1}) + \max^*_{[x_{m-1}, x'_m]} f \cdot (x'_m - x_{m-1}) + \max^*_{[x'_m, x_m]} f (x_m - x'_m) + \sum_{k=m+1}^{n} \max^*_{[x_{k-1}, x_k]} f (x_k - x_{k-1})$$

$$? \; S_{\tau'} \le S_\tau \iff ? \; \max^*_{[x_{m-1}, x'_m]} f (x'_m - x_{m-1}) + \max^*_{[x'_m, x_m]} f (x_m - x'_m) \le \max^*_{[x_{m-1}, x_m]} f \cdot (x_m - x_{m+1})$$

(Summorna tar ut varandra i olikheten)

$M_1 \subset M_2 \subset \mathbb{R}$

$\max_{M_1} f \le \max_{M_2} f \qquad \min_{M_1} f \ge \min_{M_2} f$

$$\text{V.l} \le \max^*_{[x_{m-1}, x_m]} f (\cancel{x'_m} - x_{m-1}) + \max^*_{[x_{m-1}, x_m]} f (x_m - \cancel{x'_m}) = \max^*_{[x_{m-1}, x_m]} f (x_m - x_{m-1})$$

$\boxed{\begin{array}{lll} \Rightarrow \tau' \supset \tau & \text{medför} & S_{\tau'} \le S_\tau \\ \tau' \supset \tau & \text{medför} & s_{\tau'} \ge s_\tau \end{array}}$

$s_\tau \le s_{\tau'} \le \ldots \le A \le \ldots S_{\tau'} \le S_\tau$

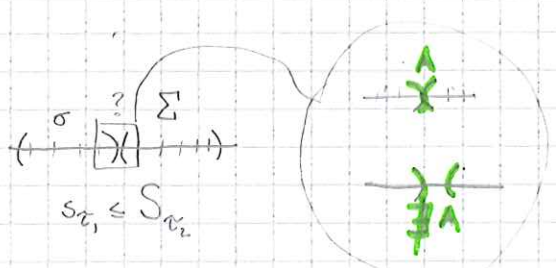
Påstående: τ_1, τ_2 indelningar
$\Rightarrow s_{\tau_1} \le S_{\tau_2}$

Bevis: Bilda en ny indelning $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ $\quad \tau$ förfining av både τ_1 och τ_2

$$\Rightarrow \quad s_{\tau_1} \le s_\tau \le S_\tau \le S_{\tau_2}$$

Betrakta de två talmängderna:
$\sigma = \{ s_\tau : \tau \text{ indelning av } [a,b] \}$

$\Sigma = \{ S_\tau : \tau \text{ indelning av } [a,b] \}$



Fungerar även om $f \ngeq 0$

$\overset{*}{\max}$: $? \exists \max_{[x_{k-1}, x_k]} f$ $\qquad$ f kontinuerlig $\Rightarrow \exists \max, \min_{[x_{k-1}, x_k]} f$

supremum $\approx$ max som gränsvärde
infinum $\approx$ min som gränsvärde

(5.37 b) 1 $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{1\cdot(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2. $x = \sin t$ $\quad \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=|\cos t|} \cdot \cos t\,dt \underset{\cos t \geq 0}{=} \int \cos^2 t\,dt = \dots$

$\underset{\cos t \leq 0}{=} -\int \cos^2 t\,dt = \dots$ $\qquad$ tillbaka till x

$\boxed{\begin{matrix}\cos t \geq 0 \\ \text{t.ex i} \\ t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]\end{matrix}}$ $\quad = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$

$2\sin t \cos t = 2x\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\cos t \geq 0}$

$t \begin{cases} \arcsin x & \text{om } t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ \text{—— " ——} + C & \text{annars} \end{cases}$

3. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{(1-x)(1+x)}\,dx = \int \sqrt{\frac{(1-x)(1+x)^2}{1+x}}\,dx = \int |1+x| \underbrace{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}_{=t}\,dx = \int (1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

$x \geq -1$ $\quad$ $\cancel{x < 1}$

$x \neq 1$ (falskt villkor)

(c) $\int \sqrt{x^2+2x+3}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2+2}\,dx = \begin{bmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \sqrt{t^2+2}\,dt$

(43) 1) $\int \frac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+2}+x}\,dx = \int \frac{x^2+2-2x\sqrt{x^2+2}+x^2}{x^2+2-x^2}\,dx = \int (x^2+1)\,dx - \frac{2}{2}\int \underbrace{x\sqrt{x^2+2}}_{\frac{1}{2}\frac{(x^2+2)^{3/2}}{3/2}}\,dx$

2) $\sqrt{x^2+\alpha}$: $\quad t - x = \sqrt{x^2+2}$ $\qquad \sqrt{x^2+2} - x = t - 2x = t - \frac{t^2-2}{t} = \frac{2}{t}$

$t = x + \sqrt{x^2+\alpha}$ $\quad x = \frac{t^2-2}{2t}$ $\qquad dx = \frac{4t^2-2t^2+4}{4t^2} = \frac{t^2+2}{2t^2}\,dt$

$\int \frac{\frac{2}{t}}{t} \frac{t^2+2}{2t^2}\,dt$

(51) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}$

$x = \tan t$ $\qquad t = x + \sqrt{x^2+1}$

$x^2+1 = \frac{1}{\cos^2 t}$

RIEMANNINTEGRALEN (forts)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$
begränsad

τ indelning

τ : $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Darbouxsummor $\quad$ lilla $\quad s_\tau = \sum_{k=1}^{n} \inf f\,(x_k - x_{k-1})$

stora $\quad S_\tau = \sum_{k=1}^{n} \sup f\,(x_k - x_{k-1})$

τ' förfining av τ dvs $\tau' \supset \tau$ $\quad \Rightarrow \quad s_\tau \leq s_{\tau'}$ $\quad S_\tau \geq S_{\tau'}$

$\boxed{\begin{matrix} s_{\tau_1} \leq s_{\tau_2} \leq \dots & \tau_1 \subset \tau_2 \subset \dots \\ S_{\tau_1} \geq S_{\tau_2} \geq \dots & \tau_1 \subset \tau_2 \subset \dots \end{matrix}}$

τ', τ'' indelningar $\Rightarrow S_{\tau'} \geq s_{\tau''}$

$(\underset{s}{\sigma})(\underset{S}{\Sigma})$ $\qquad$ $(\sigma)(\Sigma)$

MCR

def M uppåt (nedåt) begränsad om $\exists C : x \le C \quad \forall x \in M$

C kallas övre (nedre) begränsning för M.

Ex f:s värdemängd V_f är uppåt begränsad ty f begränsad.

σ uppåt begränsad ty $s \le S_\tau \quad \forall s \in \sigma$

Ex $\mathbb{Q}$ $\quad \{x \in \mathbb{Q} : x < 0$ eller $x \ge 0,\ x^2 < 2\}$ uppåt begränsad av t.ex 2

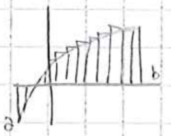
supremum $= \sqrt{2}$

$\nexists$ minsta övre begränsning i $\mathbb{Q}$

$\exists$ minsta övre begränsning i $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}$

Supremumaxiomet

Varje uppåt (nedåt) begränsad mängd av reella tal har en minsta övre (största nedre) begränsning, supremum (infinum)



När funktionen är negativ är det de små Darbouxsummorna som hamnar utanför

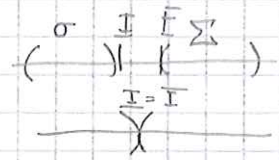
$\sigma = \{s_\tau\}$ uppåt begränsad $\qquad \sum = \{S_\tau\}$ nedåt begränsad

def $\underline{I} = \sup \sigma$

den nedre integralen av f i $[a,b]$

$\overline{I} = \inf \sum$

den övre integralen av f i $[a,b]$



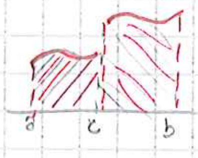
def f kallas Riemannintegrerbar i $[a,b]$ om $\boxed{\underline{I} = \overline{I} = (\mathbb{R}) \text{ Integralen av } f \text{ i } [a,b]}$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

Sats $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f kontinuerlig i $[a,b]$ $\Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$

$\boxed{f \text{ kontinuerlig} \Rightarrow \sup_{[x_{k-1}, x_k]} = \max_{[x_{k-1}, x_k]}}$



(integrerbar! Man integrerar båda bitarna för sig och lägger ihop)

$s_\tau = s_v + s_h$

$S_\tau = S_v + S_h$

Sats $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Då är f Riemannintegrerbar om och endast om f är kontinuerlig nästan överallt i $[a,b]$

Riemanns funktion: $f\ [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{om } x \in [0,1],\ x = \frac{p}{q},\ (p,q) = 1 \end{cases}$$

Dirichlets funktion

$g: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

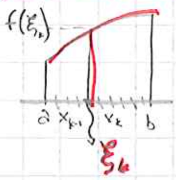
$\exists \int_a^b f(x)\,dx = 0 \qquad \nexists\ (R)\int_a^b g(x)\,dx$

f är kontinuerlig i alla irrationella punkter $\begin{cases} \alpha \notin \mathbb{Q} \\ \frac{p_n}{q_n} \to \alpha \end{cases} \Rightarrow q_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{q_n} \to 0$

$g(x)$ diskontinuerlig i alla punkter

$s_g = 0 \qquad \underline{I} \neq \overline{I}$
$S_g = 1$

Riemannsummor



$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ begränsad $\quad \boxed{s_\tau \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq S_\tau \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]}$

def (alt.) f Riemannintegrerbar i $[a,b]$ om $\exists$ "lim" $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)\,dx$

när $n \to \infty$
$\max |x_k - x_{k-1}| \to 0$
$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ godtyckligt valt

RIEMANNINTEGRALEN (forts)

$\sigma = \{s\}$ uppåt begränsad $\quad \exists \sup \sigma = \underline{I}$ (underintegralen)

$\Sigma = \{S\}$ nedåt begränsad $\quad \exists \inf \Sigma = \overline{I}$ (överintegralen)

Förutsättning $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ f begränsad

def f kallas Riemannintegrerbar om $\underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f(x)\,dx$

Riemannsummor:

$s_\tau \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq S_\tau \qquad a = x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n = b \quad \tau$

Sats $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad f$ kontinuerlig på $[a,b] \Rightarrow f$ Riemannintegrerbar i $[a,b]$

Egenskaper

① Linearitet $\quad \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$

Om f och g är R-integrerbara i $[a,b]$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, så är $\alpha f + \beta g$ R-integrerbar i $[a,b]$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))(x_k - x_{k-1})}_{\exists \text{"lim"} \dots = \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx} = \alpha \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}_{\Downarrow \text{"} \ \int_a^b f(x)\,dx} + \beta \underbrace{\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}_{\Downarrow \text{"} \ \int_a^b g(x)\,dx}$$

"lim" $n \to \infty \quad \max|x_k - x_{k-1}| \to 0 \quad \xi_k$ godtagbart valda i $[x_{k-1}, x_k]$

② $f \geq 0$ i $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \geq 0 \Rightarrow$ "lim"$\dots = \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

③ $f \geq g$ i $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

② på $f - g \quad \int_a^b (f-g)\,dx \geq 0$ ①

③ Triangelolikheten för integraler $\quad |A+B| \le |A| + |B|$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$f \le |f| \qquad -f \le |f|$

$$\Rightarrow \int_a^b \pm f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx \Rightarrow \left.\begin{matrix}\int_a^b f(x)\,dx \\ -\int_a^b f(x)\,dx\end{matrix}\right\} \le \int_a^b |f|\,dx$$

ett av talen $= \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

Om f är R-integrerbar i $[a,b]$ så är $|f|$ R-integrerbar i $[a,b]$

def! $\quad b > a \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

def! $\quad a = b \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad$ (f begränsad)

$a \lesseqgtr \quad \cancel{[a,b]}$

Lineariteten gäller fortfarande $\qquad$ Ex. $\int_1^0 x\,dx < 0 \qquad x \ge 0$

Olikheten gäller med omvänt tecken för $a > b$

④ $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Om $a < c < b$, så följer det ur definitionen. (inkludera c i τ)

Annars använd def, betrakta

ANALYSENS HUVUDSATS (INTEGRALKALKYLENS HUVUDSATS, NEWTON-LEIBNITZ SATS)

$f: [a,b] \to \mathbb{R} \qquad f$ kontinuerlig i $[a,b]$

$\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in (a,b)$, är en primitiv funktion till f.

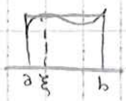
$\Rightarrow$ alla kontinuerliga funktioner har primitiva

Sats! (Integralkalkylens medelvärdessats)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

f kontinuerlig

$\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$ s.a $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$



Bevis! f kontinuerlig på $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\, m = \min_{[a,b]} f, \quad \exists\, M = \max_{[a,b]} f$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad m \le f(x) \le M$

$\Rightarrow m \int_a^b dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le M \int_a^b dx \qquad$ (①, ②')

$\int_a^b dx = b - a$

$s = S = \sum 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = b - a$

$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \qquad (b-a) > 0$

$$\Rightarrow \underset{f(\dots)}{m} \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\mu} \le \underset{f(\dots)}{M}$$

$\Rightarrow \mu$ ligger mellan två funktionsvärden för f, f kontinuerlig $\Rightarrow$ enligt satsen om mellanliggande värde $\exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = \mu \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

6.12 d) $\displaystyle\int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt$ $\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad \begin{matrix}\cos > 0 \\ \sin > 0\end{matrix}$

$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$ $\qquad g'(x) = -\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot(-\sin x) + \sqrt{1-\sin^2 x}\cdot \cos x =$

$= \sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow g(x) = x + C$

$g(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} = \int_{\cos x}^{0} + \int_0^{\sin x} = -\int_0^{\cos x} + \int_0^{\sin x}$

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ldots = 0 = \frac{\pi}{4} + C \Rightarrow C = -\frac{\pi}{4}$

Bevis av huvudsatsen

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a < x < b$ $\qquad$ ($a \le x \le b$ högerderivata i a, vänsterderivata i b)

$? \exists F'(x) = f(x)$; $x_0 \in [a,b]$

$\frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \left(\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) / \Delta x = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt$

$\int_a^{x_0+\Delta x} = \int_a^{x_0} + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x}$

$\exists\, \xi \in$ intervallet mellan x_0 och $x_0 + \Delta x$ s.a $\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)(x_0 + \Delta x - x_0)$

$\Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$ $\quad (\forall x_0 \text{ i } [a,b])$

$\Rightarrow F$ är en primitiv till f

Vad gör man om $\Delta x < 0$? Medelvärdessatsen gäller även för $b < a$:

vi vet $\int_b^a f(t)\,dt = f(\xi)(a-b) = -f(\xi)(b-a)$

Varför $\xi \to x_0$ och $f(\xi) \to f(x_0)$?

$f(\xi) \to f(x_0)$ ty f är kontinuerlig
$\xi \to x_0$ ty $|\xi - x_0| \le |\Delta x| \to 0$

Sats: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, kontinuerlig $\quad \Phi$ en primitiv till f

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$ $\qquad \left[\Phi(x)\right]_a^b$

Bevis: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ en primitiv till $f \Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$ för något C

$\Rightarrow \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + \cancel{C}) - (F(a) + \cancel{C}) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$

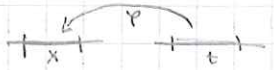
Partiell integration:

$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

Variabelsubstitution:

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

$\begin{cases}\varphi(\alpha) = a \\ \varphi(\beta) = b\end{cases}$



GENERALISERADE INTEGRALER

Inte Riemannintegraler, lim av R.i

Riemannintegralen: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

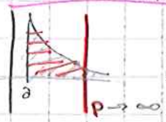
f begränsad

Generaliserade integraler av två typer:

(1) $[a,\infty)$ eller $(-\infty,b]$

(2) $[a,b)$ $f \underset{x\to b}{\to} \pm\infty$; $(a,b]$ f obegränsad i a

(1) f kontinuerlig i $[a,\infty)$ ($\Rightarrow f$ är R-integrerbar i varje begränsat delintervall)



Ändlig area under grafen?

("höjden" ska minska snabbare än basen)

def $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{p\to\infty}\int_a^p f(x)\,dx$, om lim finns $\boxed{f \underset{\infty}{\to} 0}$

Om $\exists$ lim, så kallas integralen konvergent, om $\nexists$ lim är den divergent.

Om integralen är konvergent, så $f \underset{\infty}{\to} 0$ OBS! Det omvända gäller inte

Ex ① $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{p\to\infty}\int_1^p \frac{dx}{x^2} = \lim_{p\to\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^p = \lim_{p\to\infty}\left(1-\frac{1}{p}\right) = 1$ $\Rightarrow$ integralen konvergent ; ... = 1

$h \sim \frac{1}{x^2}$ $b \sim x$ $\to$ $\frac{1}{x} \to 0$

② $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{p\to\infty}\int_1^p \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{p\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^p = \lim_{p\to\infty} 2(\sqrt{p}-1) = \infty$ $\Rightarrow$ integralen divergent

$h \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ $b \sim x$ $\to \sqrt{x} \to \infty$

③ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{p\to\infty}\left[\ln x\right]_1^p = \lim_{p\to\infty} \ln p = \infty$ $h \sim \frac{1}{x}$ $\sim x$ divergent

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ konvergent} \Leftrightarrow \alpha > 1}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^a + \int_a^\infty}_{\text{oberoende lim}}$

$\boxed{\text{OBS! } \displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \int_{-q}^p f(x)\,dx}$ oberoende av varandra

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergent

(2)

f ska $\underset{b}{\to} \infty$ "långsamt"

def $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, om $\exists$ lim

Om $\exists$ lim: konvergent, om $\nexists$ lim: divergent

Krävs: f kontinuerlig i $[a,b)$

Ex ① $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = \infty$ divergent

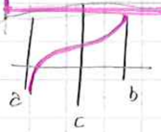
② $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\left[\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0} 2(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2$ konvergent

③ $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_\varepsilon^1 = -\ln\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \infty$ divergent

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta} \text{ konvergent} \Leftrightarrow \beta < 1}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to 0}} \int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x\,dx}$$

oberoende



Cauchys principalvärde: Ett sätt att ge mening åt divergenta integraler i gränsfall.

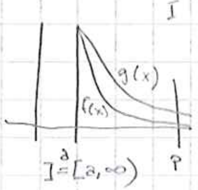
JÄMFÖRELSEKRITERIET

Sats $f,g : \underset{\text{intervall}}{I} \to \mathbb{R}$

f,g kontinuerliga i I $\forall x\in I$ gäller $0 \le f(x) \le g(x)$

$\Rightarrow$ ① Om $\int_I g(x)\,dx$ **konv.**, så är $\int_I f(x)\,dx$ **konv**

② Om $\int_I f(x)\,dx$ divergent, så är $\int_I g(x)\,dx$ divergent



$g \ge f \ge 0$

Bevis (för $I=[a,\infty)$)

$F(p) = \int_a^p f(x)\,dx$

$G(p) = \int_a^p g(x)\,dx$

F, G växande ty tag $p_1 > p_2$

$$F(p_1) = \int_a^{p_1} f(x)\,dx = \int_a^{p_2} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{p_2}^{p_1} \underbrace{f(x)}_{\substack{\ge 0\\ [p_2,p_1]}}\,dx}_{\ge 0} \ge \int_a^{p_2} f(x)\,dx = F(p_2) \Rightarrow F \text{ växande}$$

p.s.s G växande

① Vi vet att $\exists \lim_{p\to\infty} G(p) = \int_c^\infty g(x)\,dx$ konv.

$G(p)$ växande, $\to \int_a^\infty g(x)\,dx \Rightarrow G(p) \le \int_a^\infty g(x)\,dx$

$f \le g$ i $[a,\infty) \Rightarrow \int_a^p f \le \int_a^p g$ $(p>a)$

$\Rightarrow F(p) \le G(p)$ $\forall p > a$

$\Rightarrow F(p) \le G(p) \le \int_a^\infty g(x)\,dx$ ändligt tal (ty konv)

$\Rightarrow F$ uppåt begränsad dessutom växande

$\Rightarrow \exists \lim_{p\to\infty} F(p) = \int_a^\infty f(x)\,dx$ ändligt tal konvergent

② $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent (givet) Antag att $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konv

enl. ① $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ konv Motsägelse! $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx$ divergent

(6.32) a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\ln x}$ $\quad 0 \le \frac{1}{x^2+\ln x} \le \frac{1}{x^2}$ $\quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ konvergent $\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\ln x}$ konvergent.

c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-\ln x}$ Vi vet att $\ln x << x^2$; ∞ $\quad \frac{\ln x}{x^2} \to 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\ln x}{x^2} < \frac{1}{2} \text{ för } x>A}$

$\forall x>A \quad \ln x < \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow -\ln x > -\frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow x^2 - \ln x > \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2-\ln x} < \frac{1}{\frac{1}{2}x^2}$

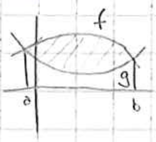
$\Rightarrow \int_A^{\infty}$ konvergent $\Rightarrow \int_1^{\infty}$ konvergent

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x-\ln x}$ $\quad \boxed{\frac{1}{x-\ln x} \ge \frac{1}{x} > 0}$ $\quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x}$ div $\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x-\ln x}$ divergent

TILLÄMPNINGAR

Area

$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$



Längd av en kurva

kurva $\subset$ planet
$\subset$ rummet
($\subset \mathbb{R}^n$)

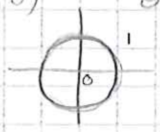
def En kurva är en kontinuerlig funktion

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n)$
(I)

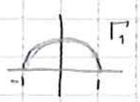
Ex ① $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

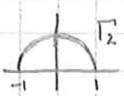
cirkel, enhetscirkeln



② $\Gamma_1 : [0;\pi] \to \mathbb{R}^2$
$\Gamma_1(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\cos\theta, \underset{\ge 0}{\sin\theta})$



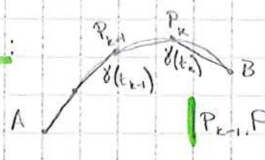
③ $\Gamma_2 : [-1;1] \to \mathbb{R}^2$
$\Gamma_2(t) = (x(t), y(t)) = (t, \sqrt{1-t^2})$



! Två kurvor γ_1 och γ_2 betraktas som samma kurva om den ena kan fås av den andra genom omparametrisering (variabelbyte)

②,③ $t = \cos\theta \qquad \theta = \arccos t \in [0,\pi]$
$t \in [-1,1] \qquad \theta \in [0,\pi]$

Kurvlängd:



$|P_{k-1}P_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$

$$l(\gamma) = \text{"}\lim_{n\to\infty}\text{"} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}$$

$\max|t_k - t_{k-1}| \to 0$ f.ö. indelning godtycklig

om $\exists$ "lim" kurvan kallas rektifierbar

$x, y \in C'([a,b])$ (En gång deriverbara och derivatan är konstant, C')

Medelvärdessatsen

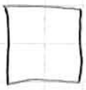
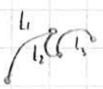
$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k)-y(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\dot{x}(\tau_k))^2(t_k-t_{k-1})^2 + (\dot{y}(\tau_k^*))^2(t_k-t_{k-1})^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\dot{x}(\tau_k))^2 + (\dot{y}(\tau_k^*))^2}\,\underset{\geq 0}{(t_k - t_{k-1})} \approx \text{Riemannsumma} \qquad t_{k-1} \leq \tau_k, \tau_k^* \leq t_k$$

$$x, y \in C'([a,b]) \Rightarrow \exists \text{"lim"} \ldots = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,dt$$

Funktionsgraf $\sum \sqrt{(t_k-t_{k-1})^2 + (\dot{y}(\tau_k^*))^2(t_k-t_{k-1})^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+(\dot{y}(\tau_k^*))^2}\,(t_k - t_{k-1}) =$

$= \text{Riemannsumma} \text{ "}\longrightarrow\text{" } \int_a^b \sqrt{1+(f')^2(t)}\,dt \qquad y = f(t)$

 $\notin C'$ γ styckvis C' 

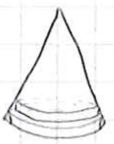
$l = l_1 + l_2 + l_3$

Ex) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (ellips)

$\dfrac{x}{a} = \cos\theta$, $\dfrac{y}{b} = \sin\theta$ $\qquad x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ $\qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta$$ $\nexists$ elementär primitiv för $a \neq b$

elliptisk integral

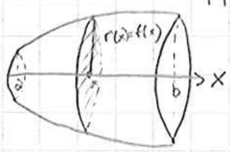


VOLYMBERÄKNINGAR

$V = \int_a^b A(x)\,dx$ skivformeln

$\Delta x = x_k - x_{k-1}$ "$\longrightarrow$" dx

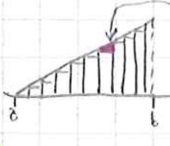
Rotationskropp



$f \geq 0$

$$\boxed{A(x) = \pi f(x)^2 \qquad V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Arean av en rotationsyta



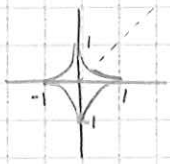
Area $\frac{1}{2}dx \cdot C\,dx \sim (dx)^2$ försumbart

$\int \underbrace{2\pi f(x)}_{\text{om krets}} \cdot l(x)$

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

(7.25) Längden av asteroid

$\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$



av symmetriskäl: fyra lika långa bitar i vardera kvadranten (sin/cos byter tecken)

$$L = 8\int_0^{\pi/4} \sqrt{(3\cos^2\theta \cdot (-\sin\theta))^2 + (3\sin^2\theta \cdot \cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 8 \cdot 3 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta\,\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1}}\, d\theta$$

$$= 24\int_0^{\pi/4} \underset{\geq 0}{\sin\theta}\,\underset{\geq 0}{\cos\theta}\, d\theta = 12\int_0^{\pi/4} \sin 2\theta\, d\theta = 6\left[-\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 6(0+1) = 6$$

DUGGAN

- $\sin(x^2+x+1)$
  $\sin: \mathbb{R} \to [-1,1]$
  begränsad $V_f = [-1,1]$
  kontinuerlig
  deriverbar
  sammansättning av elementära funktioner
  $\sin((-x)^2+(-x)+1) \neq \pm\sin(x^2+x+1)$
  $x=1$ $\sin 1 \neq \pm\sin 3$
  Varken eller, det blir inte samma eller raka motsatsen.

$x\sin\frac{1}{x^2-1}$
$\lim \to 0$
nära ± 1: x begr,
sin [illegible] begränsad
$(-x)\cdot\sin\frac{1}{(-x)^2-1} = -x\sin\frac{1}{x^2-1}$
udda.

$\arccos(\cos x)$
def $\arccos t$ = den vinkel i intervallet $[0,\pi]$ vars cos är t
$\arccos(\cos x) = x$ endast om $x \in [0,\pi]$
$\arccos(\cos(-x)) = \arccos(\cos x)$
jämn.
$\arccos(\underbrace{\cos(x+2\pi)}_{\cos x}) = \arccos(\cos x)$
kontinuerlig, deriverbar utom i $k\pi$

- arccos, arcsin derivatan finns inte i ändpunkterna.

- $\operatorname{arccot} x = \arctan\frac{1}{x}$ $\forall x > 0$
  $\tan(v.l) = \frac{1}{x}$
  $\tan(h.l) = \frac{1}{\cot(v.l)} = \frac{1}{x}$

  $\arctan\frac{1}{x} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
  $\operatorname{arccot} x \in (0,\pi)$
  $x > 0 \Rightarrow \arctan\frac{1}{x} \in (0, \frac{\pi}{2})$
  $\operatorname{arccot} x \in (0, \frac{\pi}{2})$

  $\left.\begin{matrix}\tan(v.l) = \tan(h.l) \\ h.l,\ v.l \in (0, \frac{\pi}{2})\end{matrix}\right\} h.l = v.l$

  $\operatorname{arccot}(2k+1) \stackrel{?}{=} \arctan\frac{k+1}{k} - \arctan 1$

  Interval v.l $\in (0, \frac{\pi}{2})$
  $\arctan\frac{k+1}{k} > \arctan 1$

  $\boxed{\begin{matrix} h.l > 0 \quad \tan(h.l) > 0 \\ h.l \in (0; \frac{\pi}{4}) \end{matrix}}$

13/1 - 2004

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-1}\right)^{2x^2+1} = e^{2x^2+1\ln\frac{x^2+5}{x^2-1}}$$

$$(2x^2+1)\ln\frac{x^2+5}{x^2-1} = (2x^2+1)\ln\left(1+\frac{6}{x^2-1}\right)\frac{6/(x^2-1)}{6/(x^2-1)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 12$$

derivering:

$$\left(e^{(2x^2+1)\ln(\dots)}\right)'$$

(6.33) a) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{x^{3/2}} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ konvergent

$\sim x^{3/2}$ konvergens?

b) $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ divergens? $\quad \frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{x^{1/2}} \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x^{1/2}}$ divergent

$\sim x^{1/2}$

c) $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} < \frac{2}{x^{3/2}}$ för stora x

$\sim x^{3/2}$

$\frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^3-1}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1 \quad \frac{1}{2} < \dots < 2$

konv?

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^5}}$ $\quad \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+x^5}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} < 2 \quad \frac{1}{\sqrt{x+x^5}} < \frac{2}{\sqrt{x}}$

obegr i 0 $\quad \downarrow 1$ för små x

$\sim x^{1/2}$ konvergent

e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ $\quad \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad \boxed{\frac{1}{2x} < \frac{1}{\sin x}} = \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{x} < \frac{2}{x}$

$\to$ för små x

$\int_0^1 \frac{dx}{x}$ div

f) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(e^x+1)}$ konv. $\quad \int_0 \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \frac{1}{\sqrt{x}(e^x+1)} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ konv.

$\int^\infty \frac{1}{e^x} \quad \frac{1}{\sqrt{x}(e^x+1)} < \frac{1}{e^x}$ konv

$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{|x|}(e^x+1)}$

i 0 konv. som förut

i $-\infty$ "$e^{-\infty}$" = 0

$\sim \frac{1}{|x|}$ div

$$\int_1^p \frac{\sin x}{x}\,dx \overset{PI}{=} \underbrace{\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^p}_{p\to\infty} + \int_1^p \cos x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \quad \text{konvergent}$$

$\frac{\cos p}{p} \to 0$

$p \to \infty$ konv

$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| < \frac{1}{x^2}$

Sats: f växande, uppåt begränsad när $x \to \infty$ $(x \to x_0)$

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to\infty} f(x)$

Bevis: (givet supremumaxiomet)

V_f uppåt begränsad för $x > A$

$V_f \quad l \quad c$

$\Rightarrow$ enl. sup-axiomet $\exists \underbrace{\sup V_f}_{= l}$ (minsta övre begränsning)

? $\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = l$

$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha : \forall x > \alpha$

$l - \varepsilon < f(x) \le l$

l är den minsta övre begränsningen för V_f

$\Rightarrow l - \varepsilon$ är ej övre begränsning för V_f

$\Rightarrow \exists \beta \in V_f : \beta > l - \varepsilon$

$\beta \in V_f \Rightarrow \beta = f(\alpha)$

f växande

$\Rightarrow f(x) \ge f(\alpha) \ \forall x \ge \alpha$

$f(\alpha) > l - \varepsilon$

$\Rightarrow f(x) > l - \varepsilon$

$\forall x \ge \alpha$