Föreläsningsanteckningar

FTMA970 - Inledande matematisk analys F

2009

Föreläsare: Bernhard Behrens

Antecknare: Karin Skoglund Keiding

INLEDANDE MATEMATISK ANALYS.

SYMBOL	LÄS
$\vee$	eller
$\wedge$	och
$\neg$	icke (negation)
$\Rightarrow$	medför (implikation)
$\Leftrightarrow$	ekvivalent

MÄNGDER.

DEF.

en <u>mängd</u> är en sammanfattning av bestämda objekt, verkliga eller tilltänkta, som kallas <u>element</u> i M, till en enhet och det kan på ett objektivt sätt avgöras om ett x är element i M eller ej.

denna viktiga relation "vara element i" betecknas: $\in$

DEF.

M en mängd, vi skriver:

$x \in M$ för "x är ett element i M" (/ligger i M)

$x \notin M$ för "x är <u>ej</u> ett element i M" dessa mängder bestäms av matematisk utsaga.

ex. $M = \{x : x = 1 \overset{\text{eller}}{\vee} x = 2\}$ då $1 \in M$, $3 \notin M$

om möjligt skriver elementen mellan "mängd parenteserna"

$M = \underbrace{\{1, 2\}}_{\text{helt enkelt alla element.}}$

VIKTIGA SPECIELLA MÄNGDER.

$\emptyset = \underbrace{\{x : x \neq x\}}_{}$ eller $\{x : x + 1 = x + 2\}$

finns ej sådant element

TOMMA MÄNGDEN (empty set)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ NATURLIGA TAL

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2 \ldots\}$ HELTAL

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ RATIONELLA TAL

$\mathbb{R}$ = REELLA TAL

[$\mathbb{C} = \{a + ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ KOMPLEXA TAL]

INTERVALL: $a, b \in \mathbb{R}$ $a \leq b$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ SLUTET

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ÖPPET

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ HALVÖPPET

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

fast vänd

$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$[a,a] = \{a\}$ dvs. mängd är a

$]a,a[= \emptyset$ (NONSENS... hihi nee) tomma mängden

$\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$

DEF. A, B mängder.

1. $A = B$ om $(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$ $\quad \Longleftrightarrow$

   dvs A, B har samma element

2. $A \underset{\text{delmängd till}}{\subseteq} B$ om $(x \in A \Longrightarrow x \in B)$ $\quad \Longrightarrow$

   A delmängd till B

   $A \subsetneqq B$ om $A \subseteq B$ och $A \neq B$

   dvs A <u>äkta</u> delmängd i B

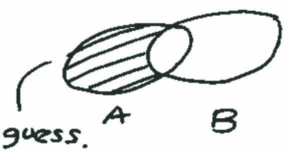
3. $A \cup B = \{x : x \in A \overset{\text{eller}}{\vee} x \in B\}$ $\quad \vee$

   UNIONEN av A och B

4. $A \cap B = \{x : x \in A \overset{\text{och}}{\wedge} x \in B\}$ $\quad \wedge$

   SNITTET av A och B.

5. $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ $\quad \neg$



I guess.

   MÄNGDDIFFERENSEN.

   alla mängder ska vara delmängder till en mängd U

   (alla x : $x \in U$) komplement till u?

   då är $U \setminus B = B^u = \{x \in U, x \notin B\}$

6. $A \overset{\text{kryss}}{\times} B = \{(a,b)\ a \in A, \overset{\text{och}}{\wedge}\ b \in B\}$

   mängden av alla ordnade par (a, b)

   KARTESISKA MÄNGD-PRODUKTEN av a och b.

$\emptyset \subsetneqq \mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}$

ex.

$A = \{1,2,3\}$ $\qquad A \cup B = \{1,2,3,4\}$ $\qquad$ eller menar han $A \setminus B$? probably!!

$B = \{2,3,4\}$ $\qquad A \cap B = \{2,3\}$ $\qquad$ dvs. $\dfrac{A \cup B}{B}$

$A \mid B = \{1\}$

bara lite INDUKTION emellan.

dvs. induktion ...

induktions-förankring → I) $P(N_0)$ är sann — testar m. t.ex. $n=1$

induktions-steget → II) $P(n) \overset{\text{medför}}{\Longrightarrow} P(n+1)$ testar... förutsätter att $P(n)$ gäller. utvidgar sen till $P(n+1)$

för alla n t.o.m ett visst $m_0 \geq n_0$

induktions-axiomet → III) då gäller $P(n)$ för alla $n \geq n_0$

$$I + II \Longrightarrow III$$

DEF. M en mängd

$P(M) = \{A : A \subseteq M\}$ kallas POTENSMÄNGD av M.

power set

OBS: tomma mängden delmängd i varje mängd !!

$$\emptyset \subseteq M \quad [x \in \emptyset \Longrightarrow x \in M]$$

$$M \subseteq M$$

t.ex. $M = \{1,2\}$ $P(M) = \{\emptyset, \underbrace{\{1\}, \{2\}, \{12\}}\}$

4 st. delmängder. 2^2 st. element.

DEF.

A, B mängder — kartesiska mängdprodukten dvs. alla ordnade par.

en delmängd $R \subseteq A \times B$ kallas (relation)

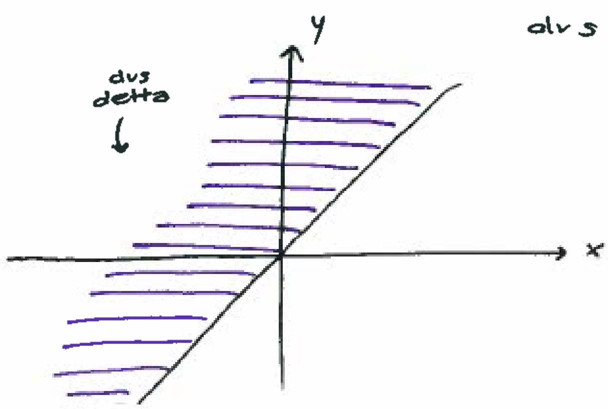
RELATION (från A till B)

dvs. riktning.

ex. "ordningsrelation $<$" på $\mathbb{R}$

$$< \; = \{(x,y) : y-x \text{ är positiv}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

dvs $x < y$



DEF. X, Y mängder:

en **AVBILDNING** (map) f från X till Y är ~~ett~~ tillordning som ordnar till varje $x \in D_f \subseteq X$ ett entydigt bestämt element $y = f(x) \in Y$

D_f kallas definitionsmängd till f.

värde-mängd $V_f = \{f(x) : x \in D_f\}$

$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$ kallas **GRAFEN** till f.

vi skriver:

$f : X \longrightarrow Y$ "$\longrightarrow$" säges: avbildning från X till Y

$x \longmapsto f(x) = y$ "$\longmapsto$" säges: elementvis tillordn. dvs till varje tal x ordnas..

ex. ①

$Id_X : X \longrightarrow X$

$x \longmapsto Id(x) = x$ identitetets avbildning (på x)

② $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(D_+ = \mathbb{R}^2, V_+ = \mathbb{R})$

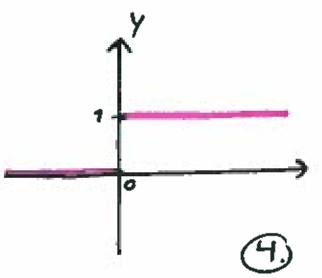
$(x, y) \longmapsto x + y$

värden funktion.

③ Θ [thäta] $: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $D_\Theta = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \longmapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

ej def. i noll.



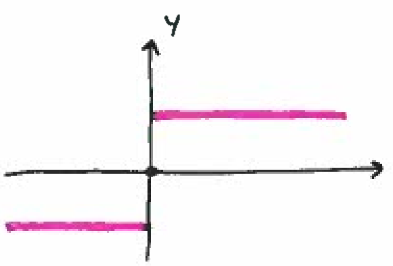
$y = \theta(x)$ $V_\Theta = \{0, 1\}$

dvs. antar ej noll.

④ signum $sgn : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ $D_{sgn} = \mathbb{R}$ för alla x!

$V_{sgn} = \{-1, 0, 1\}$



$y = sgn(x)$

DEF. (sammansättning av en funktion)

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$\underbrace{g : Y \longrightarrow Z}$$

då defineras avbildningen

med

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

$V_f \subseteq D_g$

$$x \longmapsto g \circ f(x) = gf(x)$$

det som kommer från $f(x)$ stoppas i $g(x)$

$(D_{g \circ f} = V_f)$

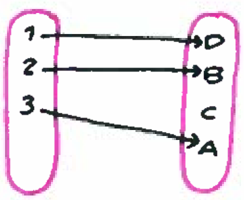
DEF. $f : X \longrightarrow Y \quad M \subseteq X$

a) f är INJEKTIV på M om $M \subseteq D_f$

och för $x_1, x_2 \in M$ gäller:

$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

entydig! one-one-map.

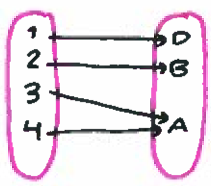


ej sur- eller bijektiv

det finns till alla $x \in D_f$ ngt värde i V_f men behöver ej anta alla värden $\in V_f$

eller va?

b) f är SURJEKTIV om $V_f = Y$ hela!!! ["avbildning på Y"]

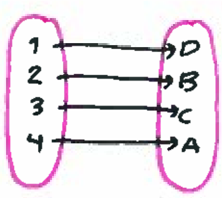


ej in- eller bi-jektiv

eller ska det vara här?

c) f är BIJEKTIV om $D_f = X \quad V_f = Y$

dvs både surjektiv & injektiv



EXEMPEL.

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

f injektiv bijektiv $\left(D_f = V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2$$

f injektiv på $[0, \infty[$ ej på $\mathbb{R}$

NYTTIG OBSERVATION.

om $f: X \longrightarrow Y$ är injektiv på D_f

så har ekvationen $y = f(x)$ ← "sök x så att $f(x) = y$"

en entydigt bestämd lösning

$x \in D_f$, dvs till $y \longmapsto x$ ← lösningen till $y = f(x)$

DEF. om $f: X \longrightarrow Y$ är injektiv (på D_f)

så kallas funktionen

$$f^{-1}: Y \longrightarrow X$$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = x$$

för den INVERSA FUNKTIONEN

med. $D_{f^{-1}} = V_f$

$$\boxed{D_{f^{-1}} = V_f \qquad V_{f^{-1}} = D_f}$$

- f injektiv på M om $x_1 \neq x_2$ $\Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $(x_1, x_2 \in M)$
- f injektiv om f är injektiv på D_f

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{injektiv}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x} \quad \text{bijektiv!}$$

FÖR INJEKTIV F.

(a) $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{D_f}$ dvs. $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(\overbrace{f(x)}^{y}) = x$ för $x \in D_f$

$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{V_f}$ dvs $f \circ f^{-1}(y) = f(\overbrace{f^{-1}(y)}^{y}) = y$ för $y \in V_f$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} y = f(x) & \Longleftrightarrow & x = f^{-1}(y) \\ y \in V_f & & x \in D_f \end{array}}$$

VÄLKÄNDA EGENSKAPER
av $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

DEF. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$

- f är BEGRÄNSAD UPPÅT på M om $M \subseteq D_f$ och $f(x) \leq M_1$ för alla $x \in M$
  för ngt $\underline{\underline{M_1}}$
- f är BEGRÄNSAD NEDÅT ....
  $f(x) \geq M_2$
  för ngt $\underline{\underline{M_2}}$
- f är BEGRÄNSAD på M om begr. ⇧ samt ⇩ på M.
- f är BEGRÄNSAD (uppåt, nedåt) om f begr. ⇧/⇩ på D_f

DEF. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ I ett intervall

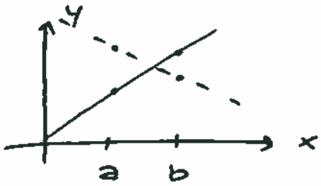
- f är VÄXANDE på I om $I \subseteq D_f$ och $f(x_1) \leq f(x_2)$ för $x_1, x_2 \in I$
  $x_1 < x_2$
- f är STRÄNGT VÄXANDE ...
  $f(x_1) < f(x_2)$ $x_1 < x_2$
- f är AVTAGANDE
  $f(x_1) \geq f(x_2)$ $x_1 < x_2$
- f är STRÄNGT AVTAGANDE
  $f(x_1) > f(x_2)$ $x_1 < x_2$

- f är (strängt) MONTON på I om
  f (str.) VÄXANDE...
  eller f (str.) AVTAGANDE...

Sats: om $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strängt monoton på D_f — (då är detta intervall)
så är f injektiv

Bevis:
låt $a, b \in D_f$ $\quad a \neq b$

då är antingen $a > b$ ...
och då gäller $f(a) > f(b)$ eller $f(a) < f(b)$
om f str. växande / avtagande



Def. $x > 0 \quad n \in \mathbb{N}$

(1) $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ faktorer}}$ $\qquad x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

(2) funktionen $f_n(x) = x^n$ strängt växande på $[0, \infty[$

alltså injektiv.

visas m. induktion:

$0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$
2 värden av x
$\Rightarrow a^3 < b^3$
$\Rightarrow a^n < b^n$

den till f_n inversa funktionen betecknas:
$f_n^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = x^n \Longleftrightarrow x = y^{\frac{1}{n}} \\ y > 0 \qquad\qquad x > 0 \end{array}}$$

(3) för $m \in \mathbb{N}$
$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ och $x^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$

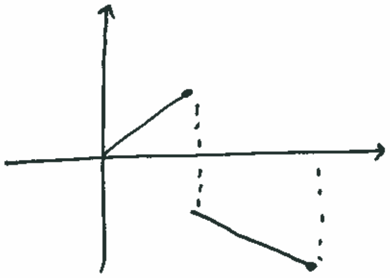
(4) $x^0 = 1$

$f : x \longrightarrow x^r$
kan utvidgas mer...
1) om $r > 0$ till $D_f = [0, \infty[$
2) om $r \in \mathbb{N}$ till $D_f = \mathbb{R}$ — nej det måste va fel.
3) om $r = \frac{1}{n}$ — udda tal till $D_f = \mathbb{R}$ — dvs alla
$(-8)^{1/3} = -2$

definerat potensfunktionerna
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad D_f = [0, \infty[$
$x \longmapsto x^r$
för varje $r \in \mathbb{Q}$ rationella tal

2013. strängt monoton $\Longrightarrow$ injektiv.

gäller omvändning ?.. NOOO !!



$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$D_f = [0, 2]$

ej monoton !!

STARTA MED $\mathbb{N}$ ...

$a + b = b + a$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$a \cdot b = b \cdot a$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

finn 1 : $a \cdot 1 = a$

utvidgar $\mathbb{N}$ (naturliga tal 1, 2, 3 ...) till $\mathbb{Z}$ — heltal 0, 1, −1, 2, −3 ...

gnm att tillfoga lösningar:

$a + x = b$

så att ex. $a + 0 = a$ gäller.

utvidgar $\mathbb{Z}$ (heltal) till $\mathbb{Q}$ (rationella tal $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{4}$)

vad är, tex. $2x = 3$?.. utvidga

tillfoga alla lösningar

$a \cdot x = b$ $x = \frac{b}{a}$

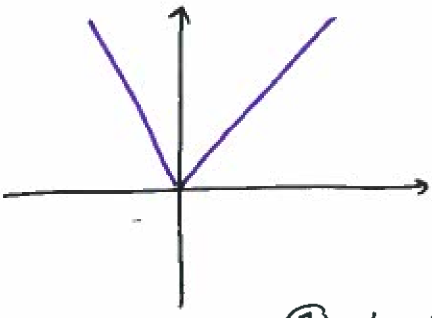
utvidgar till $\mathbb{R}$ genom ett "fullständighetsaxiom"

↳ man tillfogar alla gränsvärden

DEF. funktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

kallas (ABSOLUT) BELOPP



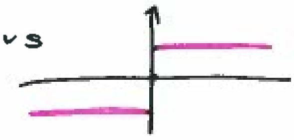
$D_{|\,|} = \mathbb{R}$

$V_{|\,|} = [0, \infty[$

avståndsbegrepp behövs

$\longrightarrow$ hantera gränsvärden.

① $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$ dvs



② $|x-a|$ = avstånd mellan x & a

$x, a \in \mathbb{R}$

③ $\varepsilon > 0$

$\{x : |x-a| < \varepsilon\}$

$= \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

ÖPPET intervall!!

DEF. $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

ett öppet intervall kallas

OMGIVNING till a $\quad (\varepsilon > 0, \delta > 0)$

5415. regler för absolutbelopp

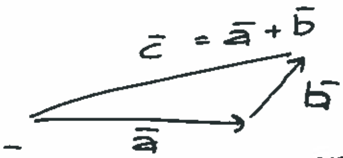
$a, b \in \mathbb{R}$

(1) triangelolikheten

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$

står bara plus på de flesta ställen

Cauchy-Schwartz-olikheten



en sida alltid kortare än de andra 2

men gäller för minus med!!

(2) $$|a \pm b| \geq \big||a| - |b|\big|$$

(3) $$|ab| = |a| \cdot |b|$$

(4.) hehe.. $$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad b \neq 0$$

GOOD TO REMEMBER!!!

Bevis.

(1.) $\pm a \leq |a|$

$\pm b \leq |b|$

$\pm(a \pm b) \leq |a| + |b|$

dvs $|a \pm b| \leq |a| + |b|$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad a, A \in \mathbb{R}$

vi vill uttrycka (bra, mkt matematiskt korrekt)

funktionsvärdena $f(x)$ $\underbrace{\text{närmar sig}}_{\text{går mot}}$ tal A

då x $\underbrace{\text{närmar sig}}_{\text{går mot}}$ pkt. a.

FORMULERING:

"Avståndet $|f(x) - A|$ går mot 0 då $\underbrace{r = |x - a| \text{ går mot } 0}$"

dvs.

$|r|$ går mot 0

blir mindre än vilket $\varepsilon > 0$ som helst

SATS.

$$\boxed{\text{för } r \in \mathbb{R} \text{ gäller: } \quad r = 0 \underset{\text{om \& endast om}}{\Longleftrightarrow} |r| < \varepsilon \quad \text{för alla } \varepsilon > 0}$$

THINK
THINK
THINK

DEF. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}, \; A \in \mathbb{R}$

f har GRÄNSVÄRDET A då x går mot a

om det till varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$

sådana att $\big(|f(x) - A| < \varepsilon$ för alla $x \in D_f$ ← i y-direction

sådana att $\underbrace{a \neq x}_{\text{OBS.}}$, $|x - a| < \delta\big)$ ← i x-direction

betecknas

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \qquad \text{eller} \qquad f(x) \longrightarrow A \text{ då } x \longrightarrow a$$

exempel.

Påstående:

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad \text{för } a \in [0, \infty[$$

Bevis: låt $\varepsilon > 0$ helt godtyckligt men hur litet som helst.

vi ska visa: finns ett δ så att

$$|x - a| < \delta \overset{\text{medför}}{\Longrightarrow} |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$$

$x \geq 0$

kolla på $f(x)$ dvs vad x har medfört

Fall ① $a = 0$ testa?

välj $\delta = \varepsilon^2$ då gäller

$(x \neq 0)$ $|x - 0| = x < \varepsilon^2$

$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \varepsilon$

dvs. vill visa så att detta logiska med x stämmer!!

VSV.

$\sqrt{x} - \sqrt{0} = \sqrt{x} \underbrace{>}_{=} \varepsilon$ måste va omvänt va?..

$\Longleftrightarrow x < \varepsilon^2$ här har vi ju x & det är också han vi söker δ till!

$x - a = x - 0 = x < \delta$

Fall ② $a \neq 0$ Yes och nu testar detta!

välj $\delta = \sqrt{a} \cdot \varepsilon$

då gäller

$|x - a| < \delta = \sqrt{a} \cdot \varepsilon$

$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \dfrac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$

detta är ju samma som så $|f(x) - A|$ helt enkelt!!

V.S.V.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\underbrace{\sqrt{x} + \sqrt{a}}_{\geq 0}}$$

$$\leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

dvs $|x - a| < \sqrt{a} \cdot \varepsilon$

kollar att förutsättning för x ger för f(x), typ.

starta med δ

finn detta "in terms of" ε

för att kunna jämföra!!

EXEMPEL.

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

gränsvärdet i y som det skall bli

$|f(x) - A|$ dvs... $|x^2 - 9| = |x-3| \cdot |x+3| < \varepsilon$

dvs $|x-a|$

$$|x-3| < \frac{\varepsilon}{|x+3|} < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$$

dvs. kolla så finner ett δ !!

$|x-3| \cdot |x+3| < \varepsilon$

$|x-3| < \dfrac{\varepsilon}{|x+3|}$

$|x-3| < \delta$

välj $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|x+3|}$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ varför x bort?...

$|x-3| < \dfrac{\varepsilon}{x+3}$

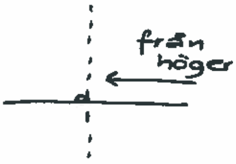
$\Longrightarrow |x-3| \cdot |x+3| < \varepsilon$ yes det stämmer.

alltså V.S.V i detta fallet?...

VARIATIONER...

DEF. f har gränsvärde A då x går mot a från <u>höger</u> om det till varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för $x \in D_f$ så att $\underbrace{a < x < a + \delta}_{\text{just 1 sida !!}}$

tillhör



... från <u>vänster</u>...

så att
$a - \delta < x < a$

se det som : $x \longrightarrow a_+$ $\quad x = a + \eta$

$x \longrightarrow a_-$ $\quad x = a - \eta$

då $\eta > 0$ och

$\eta \longrightarrow 0$

ANM:
såklart skall x kunna gå mot a
dvs. $D_f \cap \,]a - \eta, a + \eta[\, \neq \emptyset$
för alla $\eta > 0$

"$f(x)$ blir större än vilket tal $\omega > 0$ som helst"

DEF. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$

f har GRÄNSVÄRDE A då x går mot oändligheten om det till varje $\varepsilon > 0$ finns $\omega > 0$ så att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för alla $x \in D_f$, sådana att $x > \omega$

skiljer sig mot tidigare

$$\left[\lim_{x \to \infty} f(x) = A \right]$$

... då x går mot minus oändlighet... till varje $\varepsilon > 0$ finns $\omega < 0$ så att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för alla $x \in D_f$, såna att $x < \omega$ ...

vilket som helst..

DEF. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

egentligen ej gränsvärde då, eller hur?

f går mot OÄNDLIGHETEN då x går mot a om det till varje $\omega > 0$ finns $\delta > 0$ så att $f(x) > \omega$ för alla $x \in D_f$ så att $0 \leq \underbrace{|x-a|}_{\text{dvs absolutt beloppet!!}} < \delta$

även:

- $f(x) \longrightarrow -\infty$ då $x \longrightarrow a$
  ... dvs $\omega < 0$ så att $f(x) < \omega$ ... (any)
- $x \longrightarrow a^{+}$ $\quad f(x) \longrightarrow \infty$
  finns $\delta > 0$ så att $a < x < a + \delta$
- $x \longrightarrow a^{-}$
- $f(x) \longrightarrow \infty$ då $x \longrightarrow \infty$
  $\qquad\qquad -\infty \qquad\qquad\qquad -\infty$

Def. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) \longrightarrow -\infty$ då $x \longrightarrow -\infty$
om det till varje $\omega\ (<0)$ finns M
så att $f(x) < \omega$ för alla $x \in D_f$, $x < M$

exempel.
Varje reellt tal r är gränsvärde av en följd rationella tal $r_n \in \mathbb{Q}$

t.ex $r = A,\ a_1 a_2 a_3 \ldots$ (decimaltal)

$r_n = A,\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$

då gäller $\lim_{n \to \infty} r_n = r$

kollar på decimaler tills de är $< \varepsilon$

så kan man definera exponentialfunktion
för $r \in \mathbb{Q}$ har vi x^r ? för reellar
definerar vi :

$$x^r = x^{\lim r_n}$$ där $r_n \in \mathbb{Q}$ med $r_n \longrightarrow r$ $n \longrightarrow \infty$

Sats standard gränsvärde

a) $\frac{1}{x} \longrightarrow \infty \iff x \longrightarrow 0_+$

b) $\frac{1}{x} \longrightarrow -\infty \iff x \longrightarrow 0_-$

$\left(\frac{1}{|x|} \to \infty \text{ då } x \longrightarrow 0 \right)$

c) $\frac{1}{x} \longrightarrow 0_+ \iff x \longrightarrow \infty$

d) $\frac{1}{x} \longrightarrow 0_- \iff x \longrightarrow -\infty$

Lite bevis.

a) $\Longleftarrow$ påstående

$$\frac{1}{x} \longrightarrow \infty \quad \text{då } x \longrightarrow 0_+$$

höger sidan

låt $\omega > 0$

hitta ett δ så att

$$0 < x < \delta \implies \frac{1}{x} > \omega$$

dvs $x < \frac{1}{\omega}$

dvs $\frac{1}{x} - \infty < \varepsilon$?...

nesh

välj $\delta = \frac{1}{\omega}$ då gäller

$\implies \frac{1}{x} > \omega$

vill vi ha?

c) påstående $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

hitta ω så att

$x > \omega \implies$

$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$

$\frac{1}{x} < \varepsilon$

$\frac{1}{\varepsilon} < x$ vill vi ha

låt $\varepsilon > 0$

$\omega = \frac{1}{\varepsilon}$ då gäller $x > \omega$

$$\implies \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \implies x > \frac{1}{\varepsilon} = \omega \quad \text{VSV.}$$

GRÄNSVÄRDESREGLER.

Sats.

$$f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a \in \mathbb{R}$$

I) om $f(x)$ & $g(x)$ har ett gränsvärde
då $x \longrightarrow a$,
så har även $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ detta.
(om $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$)

that is:

$$\lim_{x \to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} (f(x)) \cdot \lim_{x \to a} (g(x))$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

VIDARE: om $f(x) \leq g(x)$ $\quad x \in]a-\delta, a+\delta[\cap D_f \cap D_g$

så gäller $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$ $\quad$ för ngt $\delta > 0$

II) om $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ och g är begränsad
så är $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$

(dvs. på D_f både $\Uparrow$ och $\Downarrow$

III.) om $f(x) \longrightarrow \infty$ då $x \longrightarrow a$
och $\lim_{x \to a} g(x) = A$ så gäller:

(a) $f(x) + g(x) \longrightarrow \infty$ då $x \longrightarrow a$

(b) $f(x) \cdot g(x) \longrightarrow \begin{cases} \infty & \text{om } A > 0 \\ -\infty & \text{om } A < 0 \end{cases}$

c) $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$ $\quad$ då $f(x) \longrightarrow \infty$

IV) $\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \left(\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = A \right)$

i omgivningen omkring.

V) gränsvärdet är entydigt

VI) "instängningslagen" — h(x) instängd emellan

(för) om $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

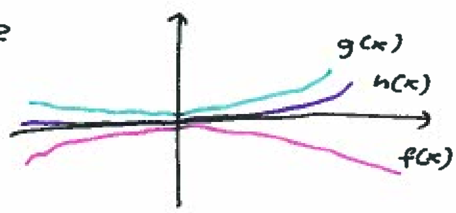
för $x \in \,]a-\delta, a+\delta[\, \cap D_f \cap D_g$

och $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = A$

går mot samma gränsvärde

så gäller även

$\lim_{x \to a} h(x) = A$



!!!! VII) om f är växande på ngt intervall $]\omega, \infty[$

och begränsad uppåt

så existerar $\lim_{x \to \infty} f(x)$

app C
bevis: lv 6

(kan tas som axiom för $\mathbb{R}$)

VIII) gränsvärde för sammansatta fkt.

kommer ur f(x) in i g(y)

om $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a} f(x) = b \\ \lim_{y \to b} g(y) = A \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to a} g \circ f(x) = A$

om

$f(x) \neq b$ i ngt $]a-\delta, a+\delta[$

$\lim_{y \to b} g(y) = g(b)$

exempel.

$\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ då $x \longrightarrow \infty$ ger:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \longrightarrow 0 \cdot 0$$

$$\frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{x^2}} = 0 \cdot \frac{1}{1+3 \cdot 0} = 0$$

dvs. $3 \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}}_{0}$

eller

$x^2+3 \longrightarrow \infty$

$\Longrightarrow \frac{1}{x^2+3} \longrightarrow 0$ då $x \longrightarrow \infty$

dvs. regeln

$f(x)+g(x) \longrightarrow \infty$ då $x \longrightarrow a$

$\frac{\sin x}{x^2+3} \longrightarrow 0$ då $x \longrightarrow \infty$

är ju begränsad $|\sin x| \leq 1$

ty $\frac{1}{x^2+3} \cdot \sin x \longrightarrow 0$

eller $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x^2+3}\right| \leq \frac{1}{x^2+3}$

$0 \quad 0$

KLÄMT IN.

instängningslagen

som $0 \leq |\sin x| \leq 1$

ex. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ saknar gränsvärde då $x \longrightarrow 0$

ty $\underbrace{\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1}_{\text{ej samma}}$

gränsvärde existerar om båda finns

Bevis.

I) "+" förutsättning: $\lim_{x \to a} f(x) = A$

$\lim_{x \to b} g(x) = B$

påstående

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B$$

skall hitta δ så att skillnad

$$|f(x) + g(x) - A - B| < \underline{\underline{\varepsilon}}$$

för

$a \neq x \in D_f \cap D_g \cap \,]a-\delta, a+\delta[$

bevis

låt $\varepsilon > 0$

$$|(f(x) - A) + (g(x) - B)| \leq$$

$$|f(x) - A| + |g(x) - B|$$ — triangelolikheten!!!

VET:

finns δ_1 och δ_2 så att

$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ för $a \neq x \in D_f \cap \,]a-\delta_1, a+\delta_1[$

$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ .... $D_g \cap \,]a-\delta_2, a+\delta_2[$

välj $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ då gäller för

$a \neq x \in D_f \cap D_g \cap \,]a-\delta, a+\delta[$

$$|f(x) - A + g(x) - B| <$$

$$|f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

BEVIS om $f(x) \longrightarrow \infty$ då $x \longrightarrow a$

så gäller $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

hitta δ

låt $\varepsilon > 0$

$\left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| < \varepsilon$

vet: finns δ så

$f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$ för

$a \neq x \in \left]a-\delta, a+\delta\right[\cap D_f$

$\frac{1}{f(x)} < \varepsilon$

$\varepsilon > \frac{1}{f(x)}$

⇕

$f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$

för $a \neq x \in \left]a-\delta, a+\delta\right[\cap D_f$

då har vi

$$\left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| = \frac{1}{f(x)} < \varepsilon \quad \text{för}$$

V.S.V...

men berörs ej $|x-a|$?..

DEF. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$

a) f är **KONTINUERLIG** i pkt a om

$a \in D_f$ i def. mängd!! och $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

b) f är **KONTINUERLIG** på M om

$M \subseteq D_f$

f är kontinuerlig i varje $a \in M$

c) f är **KONTINUERLIG** om f är kontinuerlig på hela D_f

kont. i D_f (i varje $a \in D_f$)

exempel.

① $f(x) = \sqrt{x}$ kontinuerlig!

ty $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ för varje $a \in D_f = [a, \infty[$

har bevisat!! kolla gränsvärde från 2 håll ...& 2 fall?..

② $\theta(x)$ kontinuerlig, ty kont. i varje pkt .. i $\underbrace{D_{f(\theta)}}_{\text{äsch lite wrong}}$ $a \in D_\theta = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

③ $\operatorname{sgn} x$ ej kont... (i 0!!)

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ är kont. i a om $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

dvs. till varje $\varepsilon > 0$ finns δ så att:

$|x-a| < \delta \Longrightarrow \underbrace{|f(x) - f(a)| < \varepsilon}_{\text{omgivn. till a}}$, dvs. till varje omgivning $U(f(a))$ till $f(a)$ finns en omgivning $U(a)$ till a

så att $x \in U(a) \Longrightarrow f(x) \in U(f(a))$

$: x \longrightarrow a \Longrightarrow f(x) \longrightarrow f(a)$

$\Longrightarrow g(f(x)) \longrightarrow g(f(a))$!!!!

f är kont. i a om det till — hit bara.

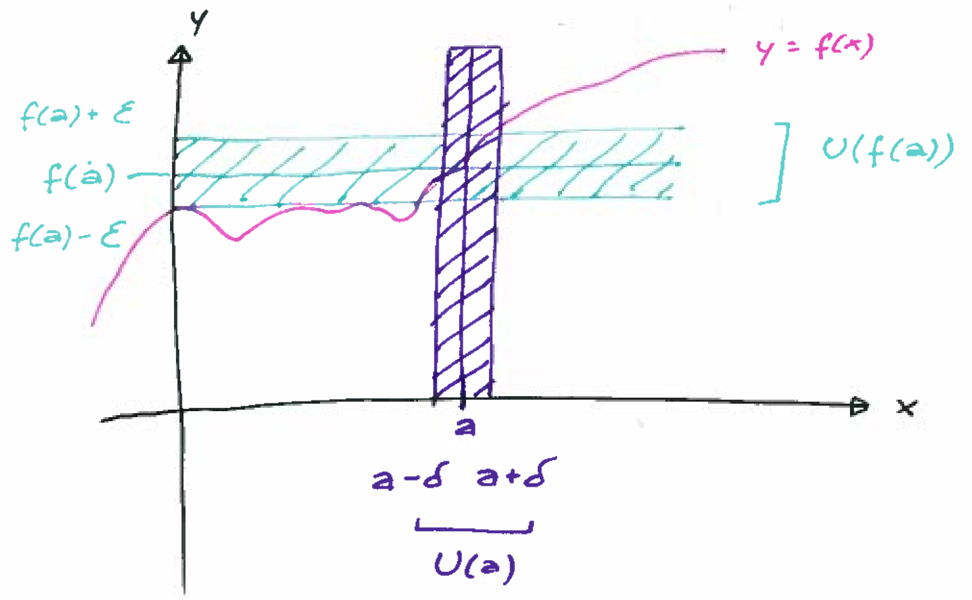
varje omgivn. $U(f(a))$

$g(\ ) \longrightarrow g(b)$

$O \longrightarrow b$

till $f(a)$ finns en omgivn. $U(a)$ till a sådan att $U(a)$ avbildas in i $U(f(a))$

dvs. $f(U(a)) \subseteq U(f(a))$



exempel:

a) konstant fkt: $f(x) = C$

b) identitet: $f(x) = x$

c) belopp: $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

och $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$ alltså $f(0)$ — kont. även där!! — kont. på $[0, \infty[$

ger :

Sats.

a) om f, g är kontinuerliga så
är även $f+g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ kontinuerliga
) dvs $g(a) \neq 0$

b) om f är kont. i a
och g är kont i $f(a)$
så är $g \circ f$ kont i $\underline{\underline{a}}$.

c) om f är strängt monoton och kontinuerlig så är f^{-1} kontinuerlig.

Bevis.

låt $\varepsilon > 0$

finns δ_2 så att : $|y - f(a)| < \delta_2$

$\Longrightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$

till detta δ_2 finns δ_1 så att :

$|x - a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_2$

$\Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \underline{\underline{\varepsilon}}$ f kont i a.

VSV.

Sats ger:

om f kont. så är även

$c \cdot f, \; |f|, \; f^n, \; f^{\frac{1}{n}}, \; f^{\frac{m}{n}}$ $\left(\begin{matrix} m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix}\right)$

polynom & rationella
fkt : $\frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$ kont.!

sgn x $\Longrightarrow$ ej kont.

3 VIKTIGA EGENSKAPER

av kont. funktion.

SATS.

förutsättn. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ slutet !!

kont. på $[a, b]$

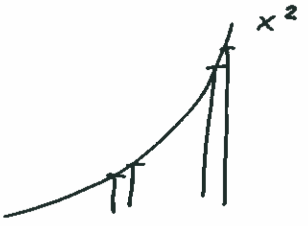
påstående behöver vara detta.

(A) f antar alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$:

s.o.m.v [satsen om mellanliggande värden]

(B) f antar ett minsta & största värde på $[a, b]$

(C) f är "likformigt kontinuerlig" på $[a, b]$



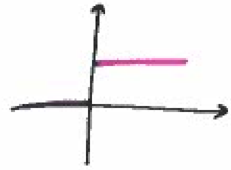
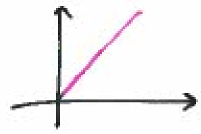
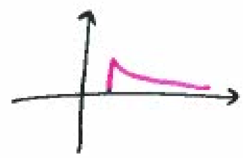
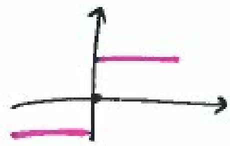
säger: det finns $x_1, x_2 \in [a, b]$ såna att $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ för alla $x \in [a, b]$

FÖLJDSATS.

om f är kont. på $[a,b]$ så att V_f är ett intervall:

f antar minsta värde m
f ... största M
$\xRightarrow{\text{s.o.m.v}}$
f antar alla värden mellan m och M
dvs $V_f = [m, M]$

ANM 1. alla förutsättn. behövs:

FÖRUTSÄTTN.	MOTSATS.	
a) "intervall"	$\theta(x)$ antar på $[-1,1]\setminus\{0\}$ värdet 0 och 1 men ej $\frac{1}{2}$	
b) "slutet intervall"	$f(x)=x$ är kont. på $]0,1[$ men antar varken min eller max	
c) "begr. intervall"	$f(x)=\frac{1}{x}$ kont. på $[1,\infty[$ men antar ej min.	
d) "f kont."	$f(x) = \operatorname{sgn} x$ antar på $[-1,1]$ värdena $-1, 0, 1$ men ej $\frac{1}{2}$	

$|f|$ kont. $\not\Rightarrow$ f kont.

MOTEX: $f(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

$|f(x)| = 1$ på $[-1,1]$ är kont, f är ej kont!!

att f kont. i a innebär att

$\Delta f = \underbrace{f(x) - f(a)}_{\text{differensen}} \longrightarrow 0$

då $\Delta x = x - a \longrightarrow 0$

Δf ett mått för förändring av fkt.
värdena kring a, av större intresse oftast
"relativa förändr. av f(x) kring a"

om $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ existerar så är detta

gränsvärde utmärkt mått för
"förändring av f(x) i a" per längd - enhet.
tids

DEF. $a \in \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$
vi säger:
a INRE PUNKT till M om det finns
omgivning $U(a) \subseteq M$
[dvs: δ_1, δ_2 : $]a-\delta, a+\delta[\subseteq M$]
$\delta_1, \delta_2 > 0$

ex. $M = [0,1]$:
varje $a \in]0,1[$ är
INRE PKT (ty t.ex $a \in]\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}[\subseteq [0,1]$
om $a > \frac{1}{2}$)

0, 1 är ej inre pkt till [0, 1]
ty inget $]-\delta, \delta[\subseteq [0,1]$

DEF. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$ $M \subseteq \mathbb{R}$

vi säger:

a) f är DERIVERBAR i a om a → inre pkt i Df
och $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existerar;
isf kallas detta gränsvärde
DERIVATAN av f i pkt a.
bet. $f'(a)$

b) f är DERIVERBAR på / i mängd M
om f är ⤴ i varje pkt i M. — eller?
var pkt i M är inre pkt i M.

c) f är DERIVERBAR om f är
deriverbar på Df. var pkt i Df är
inre pkt i Df.

d) funktionen $f': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f'(x)$

kallas DERIVATAN av f.

även bet. $f' = \frac{df}{dx}$

$\Delta f = f(x) - f(a)$

$\Delta x = x - a$

gränsvärde av
differenser
som gått mot 0:

$\frac{\Delta f}{\Delta x} \longrightarrow \frac{df}{dx}$

differens
kvot

differential
kvot

då $\Delta x \longrightarrow 0$

$\Delta f, \Delta x$ tal

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ bråk

df, dx ej tal

$\frac{df}{dx}$ ej bråk

exempel

påstående $f(x) = \sqrt{x}$ deriverbart på $[0, \infty[$ med $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (för $x > 0$!!!)

kolla gränsvärde då $\Delta x \to 0$

bevis.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \overbrace{\Delta x}^{\text{skillnad i } x}) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{\Delta x} - \cancel{x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

WOHO!!

we like REGLER:

Första sats:

"deriverbarhet starkare än kont.."

skall $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ha ett gränsvärde då $\Delta x \to 0$ så MÅSTE $\Delta f = f(x) - f(a) \to 0$

SATS.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$

om f deriverbar i $a \to f$ kont. i a.

$\underbrace{\text{EJ OMVÄNT!!!}}$

Bevis:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} \cdot (x-a)$$

$$\longrightarrow f'(a) \cdot 0 = 0 \quad \text{då } x \to a$$

eller?.. nope skall bli $f(a)$ ju

V.S.V

MOTEX:

$f(x) = |x|$ kont. i 0

ej deriverbar i 0:

$\Delta x > 0$ $\quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ $\quad$ dvs $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 1$

pga detta

$\Delta x < 0$ $\quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -1$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ saknar gränsvärde då $\Delta x \to 0$

ej deriverbar...

även beteckna f' : Df deriverings operator

$D : f \longmapsto f'$

SATS. $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

i en gemensam D_f

I) om f & g deriverbara
så också $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$!!

a) $(\overset{\text{konstant}}{c} f)' = c \cdot f'$

b) $(f+g)' = f' + g'$

$\Big\}$ "D är linjär"

c) $(f \cdot g)' = f'g + g'f$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

II) f deriverbar i a
g —"— $f(a)$
$V_f \subseteq D_g$

$\Big\}$ $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \overbrace{f'(a)}$ gånger den inre derivata

III) om f kont. och str. monoton samt deriverbar i x_0 med $f'(x_0) \neq 0$
så gäller

f^{-1} är deriverbar i $y_0 = f(x_0)$
med $Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)}$

OBS! olika punkter!!

b) "deriverbar i a"

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{f(x)+g(x) - (f(a)+g(a))}{x-a}$$

$$= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$\longrightarrow f'(a) + g'(a) \quad \text{VSV.}$$

c) $$\frac{\Delta f\cdot g}{\Delta x} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a}$$

$$= \frac{(f(x)-f(a))g(x)}{x-a} + \frac{f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}$$

$$\longrightarrow f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)$$

ty g är kont. i a !

II) $$\frac{\Delta g\circ f}{\Delta x} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a}$$

$$= (g'(f(a)) + \rho)\cdot(f(x)-f(a))$$

felet $\rho = \frac{g(z)-g(f(a))}{z-f(a)} - g'(f(a)) \longrightarrow 0$

då $z \longrightarrow f(a)$

där $\rho \longrightarrow 0$

då $f(x) \longrightarrow f(a)$

dvs. $g(z) - g(f(a)) = (g'f(a) + \rho)(z - f(a))$

$$\longrightarrow g'(f(a)+0)\cdot f'(a) \quad \text{V.S.V.}$$

III) bevis för str. växande

f kont, str. monoton

$\Longrightarrow$ f^{-1} kontinuerlig

skall visa: f^{-1} deriverbar i $y_0 = f(x_0)$:] [ ] [

vill använda slutet mindre intervall s.o.m.v

a) visa: y_0 inre pkt i $D_{f^{-1}} = V_f$

Bevis: x_0 är inre pkt i D_f

dvs det finns $\delta_1, \delta_2 > 0$: $]x_0-\delta_1, x_0+\delta_2[\subseteq D_f$

då är $x_0 - \frac{\delta_1}{2} < x_0 < x_0 + \frac{\delta_2}{2}$ medför, typ.

och då gäller $f(x_0 - \frac{\delta_1}{2}) < y_0 = f(x_0) < f(x_0 + \frac{\delta_2}{2})$

S.O.M.V ger

$$y_0 \in]f(x_0 - \underbrace{\tfrac{\delta_1}{2}}_{\text{to be abs. sure.}}), f(x_0 + \tfrac{\delta_2}{2})[\subseteq V_f$$

för $[x_0 - \frac{\delta_1}{2}, x_0 + \frac{\delta_2}{2}]$

V.S.V.

b) visa "deriverbar":

$$\frac{\Delta f^{-1}}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

$$= \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{då } x \longrightarrow x_0$$

då f, f^{-1} kont. gäller

$x \longrightarrow x_0 \iff$

$f(x) \longrightarrow f(x_0)$

$y \longrightarrow y_0$

alltså:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = Df(a)$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Sats: $x > 0$

för $r \in \mathbb{Q}$ gäller $Dx^r = rx^{r-1}$

Bevis:

steg 1 $r = 0$

$f(x) = 1$: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1-1}{\Delta x} = 0 \longrightarrow 0$ då $\Delta x \longrightarrow 0$

om topp 0 så denna noll.

steg 2 $r = n \in \mathbb{N}$

visa för alla ⤴ gäller $Dx^n = n \cdot x^{n-1}$

I) $n = 1$ $f(x) = x$ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{\Delta x}$

$$= \frac{x+h-x}{h} = 1 \longrightarrow 1 \text{ då } h \longrightarrow 0$$

II) förutsättn. $Dx^p = px^{p-1}$ för ngt $\underline{\underline{p \geq 1}}$!!!

påstående:

$Dx^{m_0+1} = (m_0+1)x^{m_0}$

bevis

enligt föruts.

$Dx^{m_0+1} = D(x \cdot x^{m_0}) = 1 \cdot x^{m_0} + x \cdot Dx^{m_0}$

$= x^{m_0} + x \cdot m_0 \cdot x^{m_0-1}$

$= \boxed{(1+m_0)x^{m_0}}$ V.S.V

III) ind. axiomet ger $Dx^n = n \cdot x^{n-1}$ för alla $n \in \mathbb{N}$

steg 3 $r \in \mathbb{Z}$

för $n \in \mathbb{N}$ är $x^n \cdot x^{-n} = 1$

alltså $D(x^{-n} \cdot x^n) = D(1) = 0$ skall bli

$D(x^{-n} \cdot x^n) = n \cdot x^{n-1} \cdot x^{-n} + x^n \cdot (D(x^{-n})) = 0$ skall bli...

$\Rightarrow Dx^{-n} = -n \cdot \frac{x^{-1}}{x^n} = -n x^{-n-1}$ makes sense!

hittills jupp.

$Dx^r = r \cdot x^{r-1}$ för alla $r \in \mathbb{Z}$

steg 4 $r = \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}$

påstående $Dx^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

bevis antingen : $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$

derivera $n \cdot (x^{\frac{1}{n}})^{n-1} \cdot Dx^{\frac{1}{n}} = 1$ derivering av x är ju 1.

$n \cdot x^{1-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = 1$

$\Rightarrow Dx^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ V.S.V

eller $f_n(x) = x^n$ har invers

$f_n^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}$

$x = f^{-1}(x) = y^{\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow y = f(x) = x^n$

alltså $D(y^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{Dx^n}$

$= \frac{1}{n \cdot (y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}$

steg 5 $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$

$Dx^{\frac{m}{n}} = D(x^{\frac{1}{n}})^m$

$= m \cdot (x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$ V.S.V.

om f' deriverbar

$$(f')' = f'' = \frac{d^2}{dx^2} f = D^2 f$$

f's andra derivata

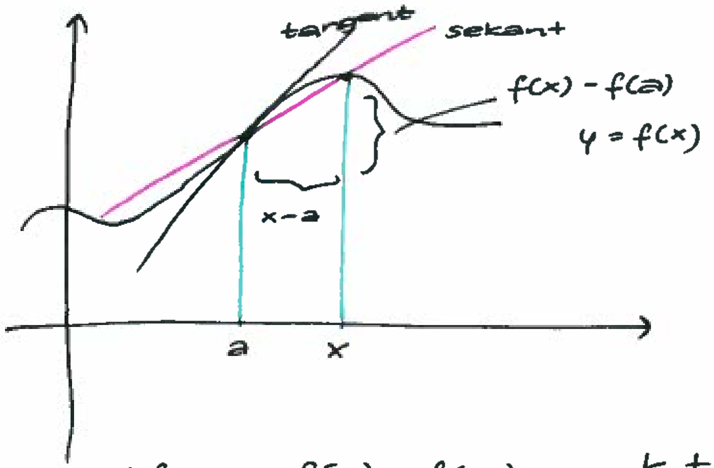
$$(f'')' = f'''$$

f's tredje derivata

$$(f^{(n-1)})' = f^{n}$$

f's n'te derivata av ordn. n

GEOMETRISK INNEBÖRD av $f'(a)$



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

k till linjen gnm $(a, f(a))$ och $(x, f(x))$ s.k. sekant

då $x \longrightarrow a$ vrids dessa sekanter mot en linje som kallas tangent

= linje som bäst approximerar kurvan.

DEF om $f: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ är deriverbar i a, så kallas linjen

$$\frac{y - f(a)}{x-a} = f'(a) \quad \text{dvs} \quad y = \underbrace{f(a)}_{m} + \underbrace{f'(a)}_{k}(x-a)$$

för TANGENT till kurvan $y = f(x)$ i pkt $(a, f(a))$

och
$$\frac{y - f(a)}{x-a} = -\frac{1}{f'(a)}$$

dvs $y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a)$

... NORMAL ...

om $f'(a) \neq 0$

$f'(a) = \tan \varphi =$ riktningskoefficient till tangent.

φ = vinkeln mellan pos x-axeln & tangenten

$0 \leq \varphi \leq \pi$

ANM

"relativa felet" är

$$\rho = \overbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}^{k} - \overbrace{f'(a)}^{\text{derivatan}} = \frac{f(x) - \overbrace{(f(a) + f'(a)(x-a))}^{\text{tangent!!}}}{x-a}$$

det går ju mot 0 $\longrightarrow 0$

som så bra approximation.

OBS. finns $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kont. i var pkt $a \in \mathbb{R}$ men EJ deriverbara i ngn pkt.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \left(\text{typ } \frac{0}{0} \text{ alla dessa...} \right)$$

EXEMPEL.

beräkna

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{\frac{7}{8}} - 3x^{\frac{5}{7}} + 2}{x - 1} = f'(1) = \frac{49 - 120}{8 \cdot 7} = -\frac{71}{56}$$

Lösning:

"se" täljaren $f(x) - f(1)$

dvs. då $f(1)$

$\underbrace{x^{\frac{7}{8}}}_{1} - \underbrace{3x^{\frac{5}{7}}}_{1}$ alltså $= -2$

så $-(-2) = 2$

$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ dvs $f'(1)$!!! bara att räkna ut.

skall visa

A) $f(x) = \ln x \quad x > 0$ deriverbar m. $D \ln x = \frac{1}{x}$

deriv av $\ln x$ i pkt $x = 1$

B) $f(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R}$

bevis:

$\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} \longrightarrow \frac{1}{1}$ V.S.V

då $h \to 0$

typ $\frac{0}{0}$...

bevis:

$\frac{e^x - e^0}{x} \longrightarrow e^0 = 1$

deriv. av e^x i pkt $x = 0$

① $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

② $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

exempel

① a) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$

$= \lim_{2x \to 0} \frac{2 \cdot \ln(1+2x)}{2x} = 2 \cdot 1$ (standard)

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{1}{\frac{3 \cdot \ln(1+3x)}{3x}}$

egent.. $2x \to 0$, $3x \to 0$

$\lim 3 \cdot \frac{e^t - 1}{t}$

$3x = t$

$= \frac{2}{3}$

(2.) a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot 3 = 3 \cdot 1$

b) $\lim_{x \to 0} x \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim \frac{e^{t} - 1}{t} = 1$ standard!!!

då $t = \frac{1}{x}$

c) vi ska lösa

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ex.
① $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \to 0} a \cdot \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{1}{b \cdot \frac{\sin bx}{bx}} = \frac{a}{b} \cdot 1 \cdot 1$ standard.

② $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} = 1$ $x \to 0$

③ $\frac{\sin x^2}{x} = x \cdot \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{\substack{\text{standard} \\ = 1}} \longrightarrow 1 \cdot 0 = 0$ då $x \to 0$

④ $\frac{\sin x}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$ saknar gränsvärde!!! då $x \to 0$

kan göra om 0^+ 0^- tror vi.

⑤ $\frac{\tan x}{x} = \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\substack{\text{snart} \\ \text{iaf } 1}} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}$

$\longrightarrow 1 \cdot 1 = 1$ $x \to 0$

$\frac{\sin x}{x} \longrightarrow 1$ då $x \to 0$

⑥
$$\frac{\ln(1+\tan x)}{\sin x} = \underbrace{\frac{\ln(1+\tan x)}{\tan x}}_{1} \cdot \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$= \underbrace{\frac{\ln(1+\tan x)}{\tan x}}_{1} \cdot \frac{1}{\cos x} \longrightarrow 1 \cdot 1 \text{ då } x \to 0$$

⑦
$$\frac{\ln \cos x}{x} = \underbrace{\frac{\ln(1+\cos x - 1)}{\cos - 1}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\cos(x-1)}{x}}_{0}$$

$-2\sin^2\frac{x}{2}$

$$\longrightarrow 0 \text{ då } x \to 0$$

$$\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{1}$$

$$\longrightarrow 0$$

DEF. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in D_f$

① f antar i x_0 ett minimum (minsta värde)
om $f(x_0) \leq f(x)$ för alla $x \in D_f$

f ... maximum (största värde)
.. $f(x_0) \geq f(x)$ för alla $x \in D_f$

x_0 kallas MINIMI / MAXIMI pkt.

② f antar i x_0 ett LOKALT maximum
... minimum

om detfinns en omgivning $U(x_0)$ till x_0 så att $f(x_0) \geq f(x)$ / $f(x_0) \leq f(x)$ för alla $x \in D_f \cap U(x_0)$

just den omgivningen !!

x_0 kallas LOKAL MAXIMI / MINIMI pkt

③ x_0 är en (lokal) EXTREMPUNKT — just max eller min !!! ej bara stationär pkt.
$f(x_0)$ är ett (lokalt) EXTREMVÄRDE
om f har i x_0 ett (lokalt) max. / min.

behöver ej vara stationär i.e. $f'(x) = 0$..

④ vi säger "strängt" om $f(x_0) > f(x)$ / $f(x_0) < f(x)$

för alla $x_0 \neq x \in D_f \cap U(x_0)$

om fkt konstant.

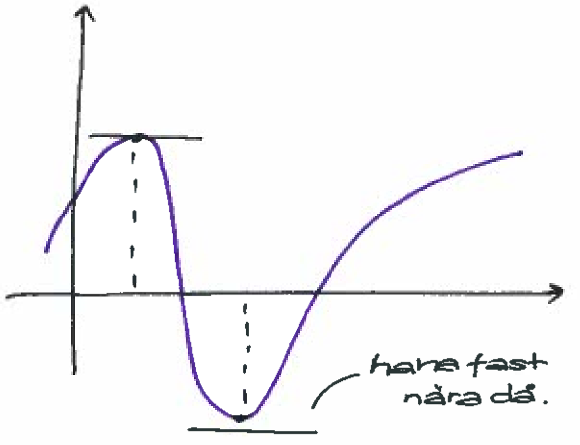
⇨ var pkt max & min !!

Om f är deriverbar då borde väl

$f'(x_0) = 0$

i extrempunkter.

(relativ förändring = 0 här)



visade redan Fermat:

upptäckte hur ljusstrålar böjs: naturen väljer alltid kortaste väg (minst tid — kortast, arbete minst)

[Fermats brytningslag]

Sats. (Fermats kriterium P.B 3.5 sats 13)

förutsättn. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

f antar i $x_0 \in D_f$ ett (lokalt) extremvärde och f är deriverbar i x_0.

└ så att vi vet är kontinuerlig

påstående:

$f'(x_0) = 0$

Bevis:

"för x_0 maximipkt" dvs $f(x_0) \geq f(x)$ för $x \in D_f \cap \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ för ngt $\delta > 0$

$x > x_0$ höger gränsvärde — i max punkt ju $f(x_0) \geq f(x)$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \leq 0 \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) \leq 0$$

$f'(x_0) = 0$

vänster gränsvärde

$x < x_0$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{\leq 0}} \geq 0 \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) \geq 0$$

V.S.V

$[r \in \mathbb{R}: \quad r = 0 \iff (r \geq 0 \text{ och } r \leq 0)]$

kritisk pkt./stationär pkt.

entydighet går förlorad.

DEF. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$

x_0 kallas STATIONÄR punkt till f om f är deriverbar i x_0 och $f'(x_0) = 0$

(alltså: x_0 inre pkt i D_f !!)

Fermat's kriterium säger:

om f deriverbar så är extrempkt'r stationära.

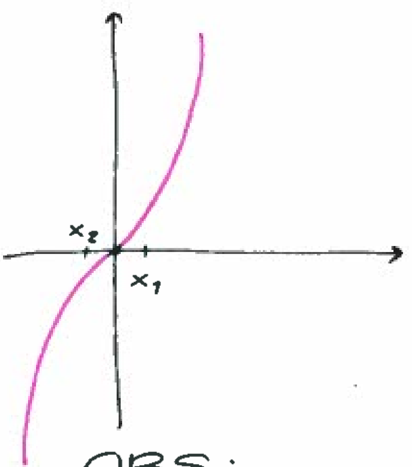
omvändning... NO NO!

MOTEXEMPEL: $f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2$

alltså: origo stationär men ej lokal extrempkt. — dvs max eller min.

TY i varje omgivn. $]-\delta, \delta[$ $\delta > 0$ till 0 finns pkt'r x_1, x_2 med $f(x_1) \overset{\text{större}}{>} f(0) = 0$

$f(x_2) \overset{\text{mindre}}{<} f(0) = 0$



välj t.ex

$x_1 = \frac{\delta}{2} \quad f(x_1) = \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 > 0$

$x_2 = \frac{-\delta}{2} \quad f(x_2) = -\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 < 0$

ej samma!

OBS: extrempkt'r behöver *ej* vara stationära, utan t.ex.

a) inre pkt i vilken f ej är deriverbar

ex. $f(x) = |x| \quad D_f = [-1, 1]$

$f(0) = 0$ str. minimi, men ej stationär!

b) "randpunkt"

ex. $f(x) = x$

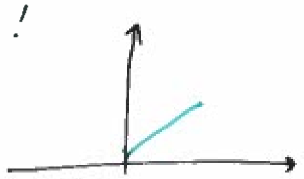
$D_f = [0, 1]$

f deriverbar i $]0, 1[$

$f(0) = \min \quad f(1) = \max$

men f har ej stationära pkt'r

$f'(x) = 1$ i hela



"differentialkalkylens medelvärdessats"

Sats (Lagranges MVS)

förutsättn. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$

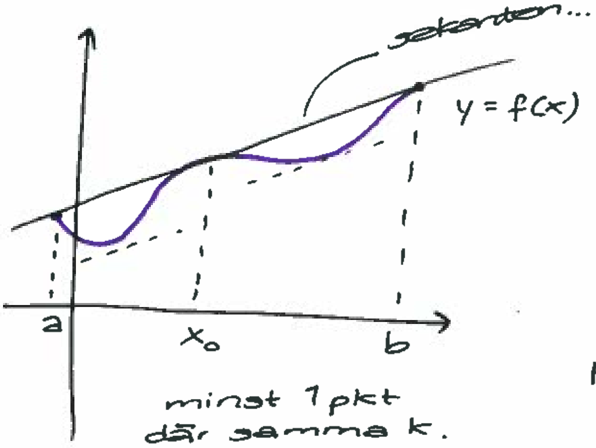
a) f kont. på $[a,b]$

b) f deriverbar på $]a,b[$

behöver denna för att även a, b ska få vara med ⊞

påstående:

finns $x_0 \in\ ]a,b[$ så att $f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



minst 1 pkt där samma k.

tänk som mellanliggande värden

samma k

geometriskt säger MVS:

∃ minst 1 pkt $(x_0, f(x_0))$ där tangenten till $y = f(x)$ parallell med sekanten gnm $(a, f(a)), (b, f(b))$

Bevis: subtrahera från f en linje som är parallell m. sekanten t.ex.

$$\ell : \quad y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

dvs. betrakta fkt $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

(?

olles
ats

då är: $g(a) = f(a) = g(b)$

g är kontinuerlig, antar alltså ett minsta & ett största värde.

om min = max så är g konstant

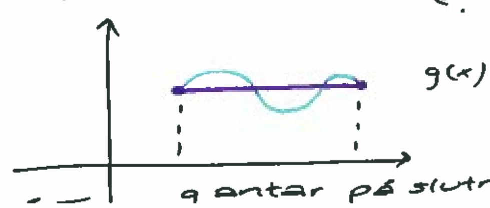
alltså $g'(x_0) = 0$ ∀ varje pkt $x_0 \in\ ]a,b[$

om min < max så antar g min eller max ∀ en inre pkt $x_0 \in\ ]a,b[$

då är $g'(x_0) = 0$ (Fermat's krit.)

måste nånstans vara mindre /större.

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



= 0 VSV då ... g antar på slutna

MVS används oftast så här:

om f deriverbar i ett öppet intervall I, så gäller för $x, a \in I$:

$f(x) - f(a) = f'(x_0)(x-a)$ för ngt x_0 mellan a och x.

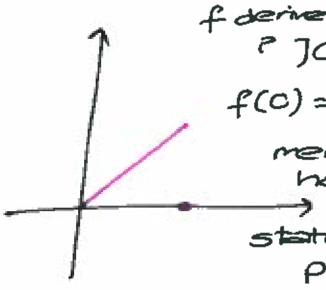
OBS:

differensen av funktionsvärdena...

alla förutsättningar behövs:

"f kont. på $[a,b]$":

MOTEX: $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$



f deriverbar i $]0,1[$

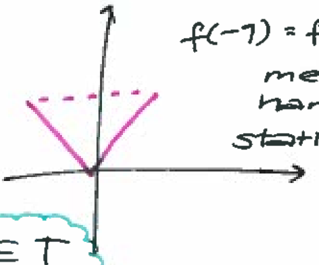
$f(0) = f(1) =$

men f har ej stationär pkt.

"deriverbar i $]a,b[$"

MOTEX: $f(x) = |x|$ $[a,b] = [-1,1]$

är ju ej deriverbar i $x = 0$



$f(-1) = f(1) = 1$

men f har ej stationär pkt!

"$f \geq 0$ på I" om $f(x) \geq 0$ för alla $x \in I$

"$f > 0$ på I" om $f(x) > 0$ —"—

"$f = 0$ på I" $f(x) = 0$

"$f < 0$ på I" $f(x) < 0$

"$f \leq 0$ på I" $f(x) \leq 0$

f deriverbar i I, I ett öppet intervall.

I) a) $f' \geq 0$ på $I \iff f$ växande på I

b) $f' \leq 0$ ... $\iff$ .. avtagande ..

c) $f' = 0$ ... $\iff$ .. konstant ..

OM ÄNDN. GÄLLER ej!!!

II) a) $f' > 0$ på $I \implies f$ str. växande på I

b) $f' < 0$ ... $\implies$ ... avtagande..

III) $f' \neq 0$ på $I \implies f$ injektiv

Bevis:

låt $x_1, x_2 \in I$ $\quad x_1 < x_2$ ...

MVS ger

$$\boxed{f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}}$$

för ngt x_0 : $x_1 < x_0 < x_2$

I) a) om $f' \geq 0$ på I : $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ f växande

II) b) om $f' > 0$ $\quad f(x_2) - f(x_1) > 0$ f STRÄNGT växande

analogt...

$f' \leq 0 \implies f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ f avtar

$f' < 0 \implies f(x_2) - f(x_1) < 0$ — " — str!

I) c) om $f = c$ så är $f' = 0$

om $f' = 0$ på I så är $f(x_2) - f(x_1) = 0$

dvs. f konstant!!!

III) $f' \neq 0 \implies f(x_2) - f(x_1) \neq 0$

dvs. f injektiv.

Sats. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ f deriverbar på $I \subseteq \mathbb{R}$

öppet intervall.

I) a) $f' \geq 0$ på I ...

osv...

precis som tidigare ☺

omvändn. i II, III gäller ej:

MOTEXEMPEL

$f(x) = x^3$ str. växande

$(a > b \Rightarrow a^3 - b^3 = \underbrace{(a-b)}_{>0}\underbrace{(a^2+ab+b^2}_{(a+\frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4}} > 0$

eller

$f'(x) = 3x^2 > 0$

på $]-\infty, 0[$

$]0, \infty[$

GER:

str. växande

på $]-\infty, 0]$

och $[0, \infty[$

[inklusive 0, ty f kont.!!!]

men $f'(0) = 0$!! stationär men ej extrempkt.

Def.

stationär pkt som ej är extrempkt kallas SADELPUNKT!

TYPTAL:

numerisk tillämpning: (vet $\sqrt{81} = 9$)

närmevärde för $\sqrt{82}$

$f(x) = \sqrt{x}$ uppfyller förutsättningarna för MVS (på $]0,\infty[$)

dvs.
f kont.. [,]
f deriver..] , [

$$\underbrace{\sqrt{82} - \sqrt{81}}_{\sqrt{b}-\sqrt{a}} = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(82-81)}_{b-a}$$

för ngt x_0:

$$81 < x_0 < 82 < 100$$

$$9 + \frac{1}{2 \cdot \underbrace{10}_{\sqrt{100}}} < \sqrt{82} = 9 + \frac{1}{2\sqrt{x}} < 9 + \frac{1}{2 \cdot \underbrace{9}_{\sqrt{81}}}$$

dvs
flyttar om

$$\sqrt{82} - \underbrace{9}_{\sqrt{81}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \ldots$$

$$\boxed{9 + \frac{1}{20} < \sqrt{82} < 9 + \frac{1}{18}}$$

HYFSAT?..

EXEMPEL (2.) hur många lösningar har ekv. $x^4 + 4x = A$

finns ngt lösn.?
hur många?
i vissa intervall..
minst 1 / högst 1

om $x < 0$ sub. nåt
$x > 0$ båda $\oplus$

betrakta $f(x) = x^4 + 4x$

$= x^4\left(1 + \frac{4}{x^3}\right)$ då $x \to -\infty$, $x \to \infty$

mot $1+0$

mot $+\infty$

∞

dvs. ej Max!!

nedåt finns minsta?

då $x \to \pm\infty$

$f'(x) = 4x^3 + 4 = 4(x^3+1) = 4(x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0}$

beror på denna...

alltså:

"tecken tabell"

$f'(x) < 0$ då $x < -1$ dvs. f str. avtagande på $]-\infty, -1]$

$f'(x) > 0$ då $x > -1$ f str. växande på $[-1, \infty[$

dvs. stationär extrem-punkt.

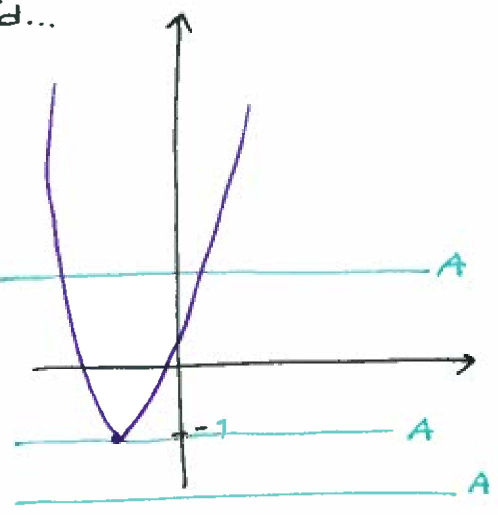
har strängt minimum $f(-1) = -3$

då har vi visat:

i $[-1, \infty[$ antas varje $A \geq -3$ minst 1 gång (S.O.M.V) och högst 1 gång ty f injektiv.

måste vara med...

i $]-\infty, -1]$ ... minst 1 gg ... högst 1 gg



SVAR:

$A < -3$ ingen lösning

$A = -3$ precis 1 lösning.

$A > -3$ 2 lösningar

$V_f = [-3, \infty[$

dvs: y-axeln...

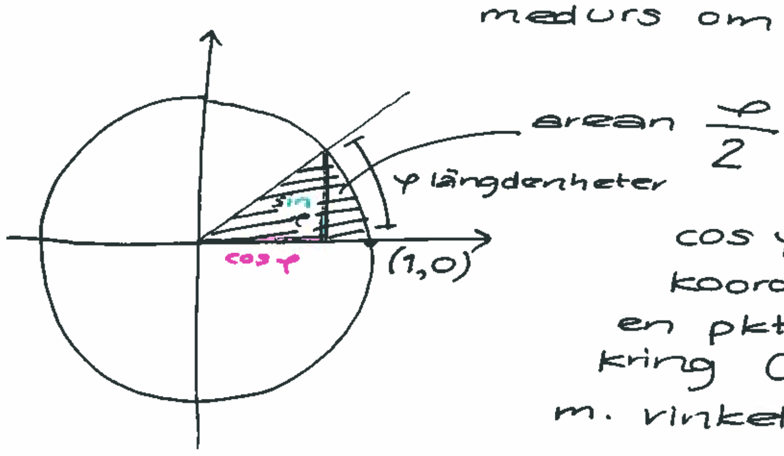
$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)}$ då $f(x_0) = y_0$ dvs. motsvarande

P.B. 19. $\underbrace{\text{TRI}}_{3}\ \underbrace{\text{GONO}}_{\text{hörn vinkel}}$ METRISKA FKT

Def. Låt $\varphi \in \mathbb{R}$ och $P = (x, y)$ pkt på enhetscirkeln $C :: x^2 + y^2 = 1$ som vi hamnar i då vi går $|\varphi|$ längdenheter längs C från $(1,0)$:

moturs om $\varphi \geq 0$

medurs om $\varphi \leq 0$



cos φ, sin φ koordinater för en pkt som roterar kring O (rör sig längs C) m. vinkelhastighet φ

fundamental $\longrightarrow$ alla periodiska förlopp (ex. matlab)

OBS: φ mäts i l.e.

andra mått $\varphi = 2 \cdot$ arean av sektion

då sätter vi:

$\cos \varphi = x$

$\sin \varphi = y$

$\tan \varphi = \frac{y}{x} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ $(\cos \varphi \neq 0)$

$\cot \varphi = \frac{x}{y} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ $(\sin \varphi \neq 0)$

ange alltid exakt värdena för

$$0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3}$$

NU: studera dessa fkt.

$$\sin,\ \cos,\ \tan,\ \cot\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

med $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$$

REGLER:

$\varphi \in \mathbb{R}$

I) 1) $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

2) $\left.\begin{aligned} \sin(-\varphi) &= -\sin\varphi \\ \tan(-\varphi) &= -\tan\varphi \\ \cot(-\varphi) &= -\cot\varphi \end{aligned}\right\} \rightarrow$ UDDA fkt.

$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ $\rightarrow$ JÄMN fkt

!!!!! $|\sin\varphi| = \sin|\varphi|$ $\quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$ för detta...

sin, cos period 2π

3) $\sin(\pi - \varphi) = \sin\pi$

$\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$

4) $\sin(\pi + \varphi) = -\sin\varphi$

$\cos(\pi + \varphi) = -\cos\varphi$

5) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$

$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \cos\varphi \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \cot\varphi \end{aligned}\right\}$ cosinus.. cotangens..

sinus & tangens av complementary angle.

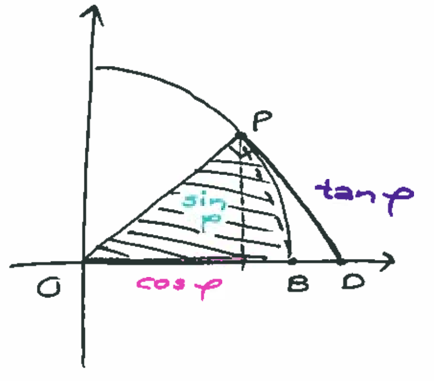
6) för $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

gäller: $\sin\varphi < \varphi < \tan\varphi$

Bevis:

$$\underbrace{\text{arean av triangel OBP}} < \underbrace{\text{arean av sektorn OBP}} < \text{arean av triangel OPD}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin\varphi < \frac{\varphi}{2} < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\varphi$$



dvs.

$$\sin\varphi < \varphi < \tan\varphi$$

1) de trigonometriska fkt är kont.

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ VIKTIGT standard gränsvärde...

3) de trigonom. fkt. är deriverbara m.

$D \sin x = \cos x$

$D \cos x = -\sin x$

$D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$

BEVIS: (se intro!!)

regeln $|\sin \varphi| \leq \sin |\varphi|$

$0 \leq |\sin x - \sin a| = \left|2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}\right|$

$= 2\left|\cos \frac{x+a}{2}\right| \cdot \sin \left|\frac{x-a}{2}\right|$

$\leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{|x-a|}{2}$ iom $\cos 0 = \underline{\underline{0}}$

0 $\quad x \to a$

inståengningslagen ger:

$|\sin x - \sin a| \longrightarrow 0$ då $x \to a$

dvs $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$ V.S.V

dvs. kont.

därmed

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ och $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ kont...

2) för $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gäller $\to$ vet sedan förra sidan...

$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$

då $x \to 0$
$\cos x \longrightarrow \cos 0 = 1$
KONT!!!
har bevisat

$\Longrightarrow 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$

1

Instängningslagen ger $\lim_{x \to 0+} \frac{x}{\sin x} = 1$

vidare $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x} \longrightarrow 1$ då $x \to 0^-$

visar $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

från båda håll.

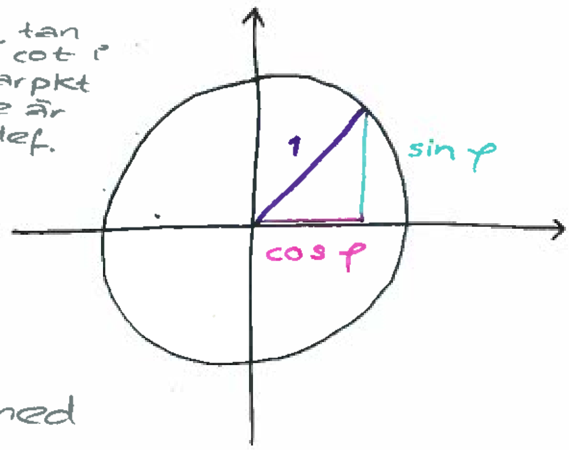
$\varphi \in \mathbb{R}$ $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ är punkter på

$C: x^2 + y^2 = 1$

Sats.

a) de trigonometriska fkt. är kontinuerliga

tan cot i varpkt de är def.



b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

c) de trigonometriska fkt. är deriverbara med

$D \sin x = \cos x$

$D \cos x = -\sin x$

$D \tan x = 1 + \tan^2 x$

$D \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

WHERE!

intro!!

Bevis

av c)

$a \in \mathbb{R}$ $\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$

dvs $x \to a$ $\left(\frac{2a}{2}\right)$

$= \cos\frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \to \boxed{\cos a \cdot 1}$

cos är kont.

standard då $x \to a$

$D\cos x$

$= D\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ inre

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1)$

$= \boxed{-\sin x}$

kan använda att vi vet $D \sin x$

$D \tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}} = \boxed{1 + \tan^2 x}$

& cot x sen då 

ANM:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{\sin x - \sin 0}}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \cos 0 = 1$$

derivatan av $\sin x$ i $x = 0$

för vi visar ju gnm vad derivata är "har ej den" här.

är det ett bevis?

NEJ!

för att bevisa $D\sin x = \cos x$ har redan uthyttjat $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

kan ju ej "visa tillbaka" utan att gå runt

exempel.

① $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\overbrace{\cos x - \cos 0}^{\text{är ju } 1!!}}{x}$ dvs derivatan! $f'(x)$

$\longrightarrow -\sin 0 = 0$ då $x \longrightarrow 0$

derivatan av $\cos x$ i pkt $x = 0$

① igen.

$$\frac{\cos x - \overbrace{1}^{\cos 0}}{x} = \frac{-\sin^2 \frac{(x-0)}{2}}{x} = x\frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\text{standard}}\Bigg)^2 \longrightarrow 0 \text{ då } x \longrightarrow 0$$

standard $\downarrow$ 1

② $\lim_{x \to \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} =$ dvs $\to 0$ ju

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \qquad \left(t = \frac{1}{x} \longrightarrow 0 \text{ då } x \longrightarrow \infty\right)$$

④ $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \longrightarrow -1$$

mot $\sin \frac{\pi}{2}$ iom kont.

-1

spelar ej roll ifall från höger/vänster

REGLER (forts.)

II) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\varphi \cdot \cos\beta - \sin\varphi \cdot \sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$

ger:

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

ger

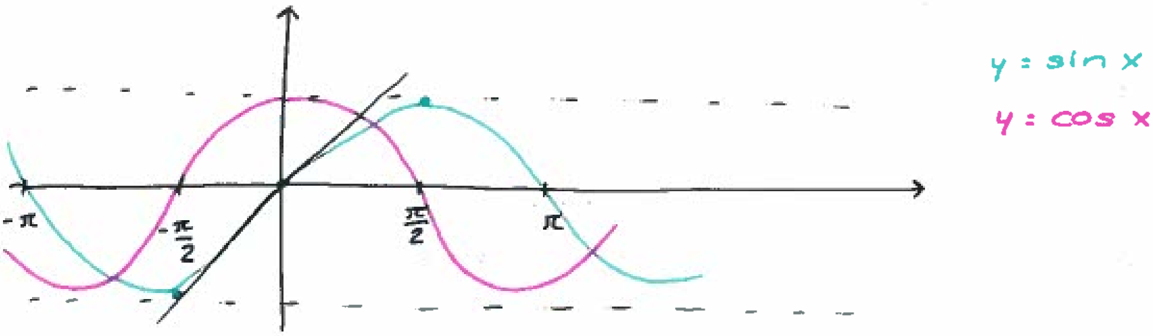
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos^2 x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

FÖRKORTA!

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$



$y = \sin x : y' = \cos x > 0$ i $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$y'(0) = 1$ ger: $y = x$ är tangent i $(0,0)$

sinus = utbuktning, vik, veck, bröst... hålrum i en kropp

$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

(en $\frac{\pi}{2}$ - fördröjd sin x kurva!)
förskjuten

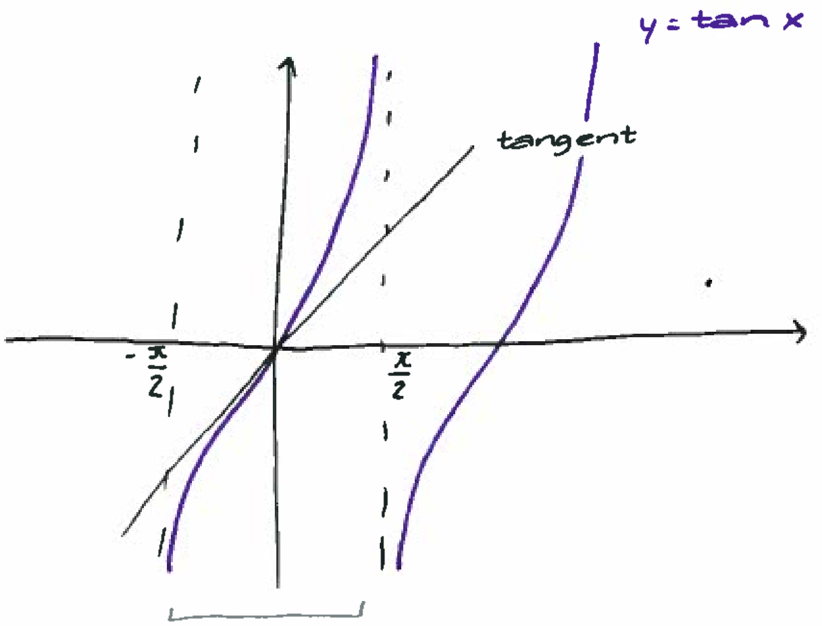
$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \begin{cases} \infty & \text{då } x \longrightarrow \frac{\pi}{2}- \\ -\infty & \text{då } x \longrightarrow \frac{\pi}{2}+ \end{cases}$$

samma med
$x \longrightarrow -\frac{\pi}{2}-$
$x \longrightarrow -\frac{\pi}{2}+$

$y'(x) = 1 + \tan^2 x \; : \; y'(0) = 1$

alltså $y = x$ är tangent i $(0,0)$

tänk på:
sin x udda
cos x jämn ... om räknar med dem.



konvex / konkav

dvs
fkt ligger
under / över
tangenten

kan även
kolla på sin x
mellan
$0 \le x \le \pi$

tittar nu alltså

ARCUSFKT:

DEF (med motivering)

viktigt att just här!!! just det öppna!!!

(a) funktionen $f(x) = \sin x$, $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ är injektiv ty $f'(x) = \cos x > 0$ för $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

ger f str. växande på det slutna! ty kont.

den till f inversa funktionen kallas ARCUSSINUS bet: $\boxed{\arcsin}$

$D_{\arcsin}$: $[-1, 1]$ $(= V_f)$

$V_{\arcsin}$: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $(= D_f)$

$x = \arcsin y \iff y = \sin x$

$y \in [-1, 1]$ $\quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

[arcussin y : den arcus = båge vinkel $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vars sinus är y]

(b) funktionen $f(x) = \cos x$, $D_f = [0, \pi]$ är injektiv, ty $f'(x) = -\sin x \leq 0$ för $0 < x < \pi$

den till f inversa funktionen kallas ARCUSCOSINUS bet: $\boxed{\arccos}$

$D_{\arccos}$: $[-1, 1]$ $(= V_f)$

$V_{\arccos}$: $[0, \pi)$ $(= D_f)$

$x = \arccos y \iff y = \cos x$

$y \in [-1, 1]$ $\quad x \in [0, \pi]$

[arcuscos y : den vinkel $x \in [0, \pi]$ för vilken $\cos x = y$]

(c) funktionen $f(x) = \tan x$, $D_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ är injektiv ($f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$ för $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$)

den till f inversa funktionen f^{-1} kallas ARCUSTANGENS bet: $\boxed{\arctan}$

$D_{\arctan} = \mathbb{R}$ $(= V_f)$

$V_{\arctan} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $(= D_f)$

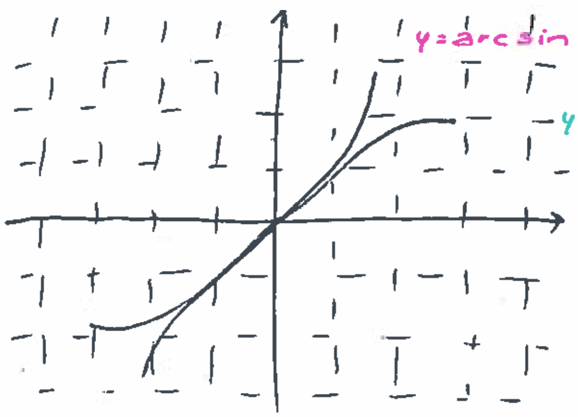
$x = \arctan y \iff y = \tan x$
$y \in \mathbb{R}$ $\quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

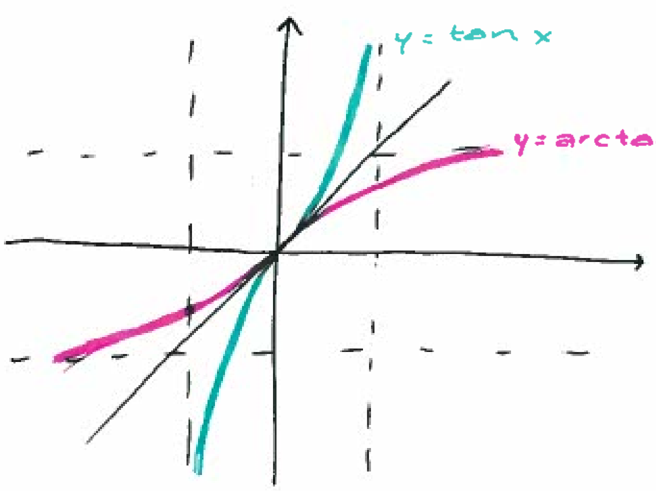
[$\arctan y$ = den vinkel i $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vars tangens är y]

själva

d) arccot $\quad (V_{\text{arccot}} =]0, \pi[)$

graferna: se hemsidan.





Beteckning:

ATN (basic), atan (matlab ... mathcad)

ArcTan, arctan i maple
(mathematica)

Sats

$$\lim_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

Bevis:

arctan x är växande (ty tan väx.),
begränsad uppåt ($< \frac{\pi}{2}$)

alltså existerar

$$\lim_{x \to \infty} \arctan x = A$$ visa att $A = \frac{\pi}{2}$! (DO IT!!)

vet:

$$\arctan x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \arctan x = A \le \frac{\pi}{2}$$

Sats

arcusfunktionerna är deriverbara i inre pkt i def. mängden

$$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$D \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < 1$$

$$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < 1$$

hmm?! mkt fina derivator. polynom rationella?!

själva!

Bevis:

$$D \arctan x = \frac{1}{D \tan a}$$ där $\tan a = x$ och $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$

inverser

$$= \frac{1}{1+\tan^2 a} = \frac{1}{1+x^2}$$ — men hur?

$$D \arcsin x = \frac{1}{D \sin a}$$ där $\sin a = x$ och $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

vet ju dessa!!

$$= \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$$

"+" ty $\cos a > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Rep: Ekvationen

($|y| \leq 1$) $\sin x = y$ har lösningen $\begin{cases} x = \arcsin y & +2k\pi \\ x = \pi - \arcsin y & +2k\pi \end{cases}$

$\cos x = y$ ... $\begin{cases} x = \arccos y & +2k\pi \\ x = -\arccos y & +2k\pi \end{cases}$

$y \in \mathbb{R}$ $\tan x = y$ ... $x = \arctan y + k \cdot \pi$

EGENSKAPER
(hur räknar man med arc fkt.)

SATS.

(a) $\arcsin x$ är udda
$\arctan x$

(b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
$\text{arccot}(-x) = \pi - \text{arccot}\, x$

(c) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$
$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$
$\arctan \dots = \frac{\pi}{2} - \text{arccot}\, x$ ELLER?

Bevis:
det finns 3 metoder sätt att bevisa detta:

A) direkt med definition

påst. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ $(-1 \leq x \leq 1)$

bevis $y = \arcsin(-x) \iff \sin y = -x$ $\quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$\iff \sin(-y) = x$

$\iff -y = \arcsin x$

om y ligger där ligger −y också där!!

alltså

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$

(B) derivera (HL - VL) deriv = 0 ger HL - VL = C

$f(x) = \arccos(-x) + \arccos x$

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-1) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow f'(a) = C$

vad här?

t.ex. $x = 0$ ger

$f(0) = \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\arccos 0} + \frac{\pi}{2} = \pi$ V.S.V

$f(x) = \sin x$ str. växande på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

inversen:
$\arcsin y = x$
$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\cos x$ ... avt. $[0, \pi]$

$\arccos y = x$
$x \in [0, \pi]$

$\tan$ .. väx. $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\arctan y = x$
$x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ex.

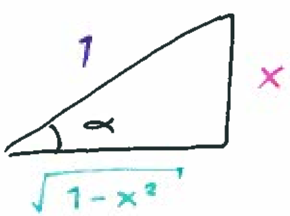
a) $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \longleftarrow |x| < 1$

bevis:

stämmer för $x = 0$

räcker att visa för $x > 0$ ty udda

$x > 0$ då är $\alpha = \arcsin x \in]0, \frac{\pi}{2}[$



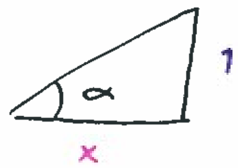
då är $\alpha = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ VSV

ex.

$\alpha = \arcsin x$
dvs.
$\sin \alpha = x$ YUP!

(REGLER: visa)

$$\operatorname{arccot} x = \arctan \frac{1}{x} \qquad \text{för } x > 0$$



dvs

$$\arctan \frac{1}{x} = \alpha$$

och $\alpha = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}} = x\right)$

+ tal
dvs
0 till 90°

TYPTAL.

Beräkna $\quad 2 \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{50}}$

Lösning

sätt $\alpha = \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} \iff \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

och $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ VIKTIGT!

och $\beta = \arccos \frac{1}{\sqrt{50}} \iff \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{50}}$

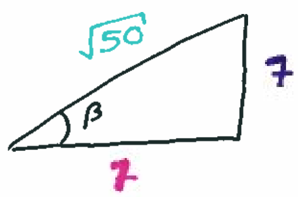
och $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ VIKTIGT!

beräkna $\tan(2\alpha + \beta)$

$$= \frac{\tan 2\alpha + \tan \beta}{1 - \tan 2\alpha \cdot \tan \beta} = \frac{-\frac{3}{4} + 7}{1 - \frac{3}{4} \cdot 7}$$

$\Downarrow$

$$\frac{25}{25} = 1$$

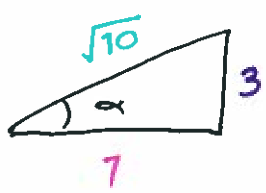


β

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 \cdot 3}{1 - 9} = -\frac{3}{4}$$

α



Det ger:

$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ bestäm k!

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < 2\alpha + \beta < \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

möjliga $k = 0$
$k = 1$

måste förbättra uppskattningen!

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{50}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta > \frac{\pi}{4}$$

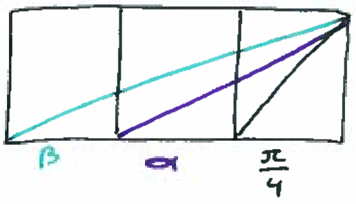
ger:

$$\frac{\pi}{4} < 2\alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$$ $\boxed{\text{alltså } k = 1}$

$$[2\arctan 3 + \arctan 7] = \frac{5\pi}{4}$$

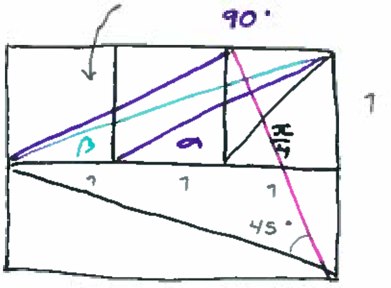
exempel. (berömt ex: Eulers formel)

$$\underbrace{\arctan 1}_{\frac{\pi}{4}} = \underbrace{\arctan \frac{1}{2}}_{\alpha} + \underbrace{\arctan \frac{1}{3}}_{\beta}$$



$$\boxed{\arctan \frac{1}{F_{2n}} = \arctan \frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan \frac{1}{F_{2n+2}}}$$

$\sqrt{5}$ $\alpha + \beta = 45°$



dvs

$\alpha = \frac{1}{2}$

$\beta = \frac{1}{3}$

Lika viktiga som 1 och närbesläktade med de trigonom. fkt är följande enkla kombinationer av e^x

hyper-bolein: kasta över målet, överdriva

DEF.

[OBS: sträng definition av e^x och bevis av $De^x = e^x$ återstår!]

(1) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$

(cosinus hyperbolicus)

(2) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (sinus —"—)

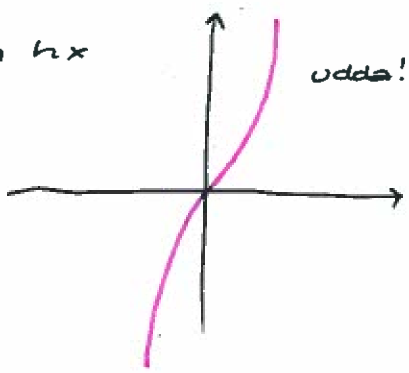
(3) $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

(4) $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} \qquad (x \neq 0)$

V. Riccati (1701-1775)

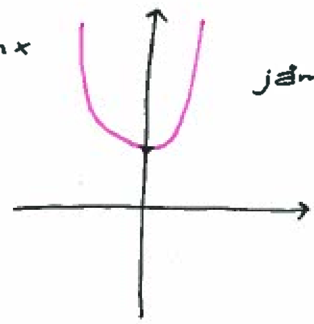
Minkowski
Lobachevski } icke enke.

$y = \sinh x$



udda!

$y = \cosh x$



jämn

$\underset{\text{varken udda eller jämn}}{e^x} = \underbrace{\cosh x}_{\text{jämn}} + \underbrace{\sinh x}_{\text{udda}}$

[löser ett berömt problem, så hänger en tvättlina (kedje, catena) därför kallas $y = \cosh x$]

namnet: sinus
cosinus
tangens

de hyperboliska fkt lyder samma lagar (se nedan)

men bäst ser man släktskapet om man räknar komplext:

$\cos(ix) = \cosh x \qquad \cosh(ix) = \cos x$ ..

$\sinh x$, $\cosh x$ har komplex period $2\pi i$

$\tanh x$ ... πi

"hyperbolicus:"

$(\cos\varphi, \sin\varphi)$ är punkter på $x^2+y^2=1$

koordinater för

[därför kallas de cirkel cykliska fkt]

$(\cosh\varphi, \sinh\varphi)$ är punkter på hyperbeln $x^2-y^2=1$ (se nedan)

parametern φ har samma innebörd $= 2 \cdot$ arean

Sats (regler)

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ("hyperboliska ettan") ligger på hyperbeln

(2) $\cosh(x+y)$

$= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$

$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ ger

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}$$

(3) $D \sinh x = \cosh x$

$D \cosh x = \sinh x$

$D \tanh x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ str. +

$= 1 - \tanh^2 x$

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(4) $\sinh x$, $\tanh x$ är injektiva — Bevis f' str. > 0

med inversen:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{arcsinh} x &= \sinh^{-1} x \\ &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}}$$

kallar gärna för arean...

$\operatorname{arctanh} x = \tanh^{-1} x$

$= \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \quad (|x| < 1)$

$\operatorname{arccoth} x = \coth^{-1} x = \ln \sqrt{\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|} \quad (|x| > 1)$

Bevis

Lös $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — gångra allt m. $2e^x$ — $y \in \mathbb{R}$

$\iff (e^x)^2 - 2ye^x = 1$

$\iff (e^x - y)^2 = 1 + y^2$

ger: $e^x = y + \sqrt{1+y^2}$ (inte "$-$" ty $e^x > 0$)

svar: $x = \sinh^{-1} y = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$

$\sinh^{-1} \frac{1}{2} = \ln \varphi = g$ — eller va

$\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\left[F_{2n} = \dfrac{\sinh(2ng)}{\cosh g} \right]$

$2e^x y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} e^x$

$e^{2x} - 2e^x y - 1$

exempel.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sinh x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sinh x - \sinh 0}{x}$ derivatan...

$= \cosh 0 = 1$

b) $\dfrac{\cosh x - 1}{x^2}$ då $x \to 0$

$= \dfrac{\cosh^2 x - 1}{(\cosh x + 1)x^2} = \dfrac{1}{(\cosh x + 1)} \cdot \left(\dfrac{\sinh x}{x}\right)^2$

$\longrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot 1$ då $x \longrightarrow 0$

c) $D \ln (x + \sqrt{1+x^2}) = \dfrac{1}{D \sinh a}$ då $\sinh a = x$

inversen till

$= \dfrac{1}{\cosh a} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 a}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

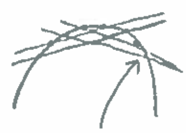
d) $D \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{D \tanh a}$ där $\tanh a = x$ $(|x| < 1)$

$= \dfrac{1}{1 - \tanh^2 a} = \dfrac{1}{1-x^2}$

tillägg till "rita $y = f(x)$" vi vill beskriva noggrannare

hur växer / avtar f?

så? eller så?



böjd så

böjd så

DEF. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I ett intervall

a) f KONVEX på I om grafen G_f ligger under sekanten gnm $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ för godtyckligt $x_1, x_2 \in I$ $\iff$

konvex

SATS. I ett öppet intervall

f deriverbar i I.

G_f ligger ovanför varje tangent, dvs f' växande på I $\iff$ f' derivata i I totalt

$f'' \geq 0$ i I

b) f är KONKAV på I om grafen G_f ligger över sekanten gnm $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ ... $\iff$ f' avtar på I $\iff$ $f'' < 0$ på I

c) en pkt x_0 i vilken f övergår fr. konvex $\rightarrow$ konkav eller opposite kallas INFLEXIONSPKT $\iff$ f' har (lok) extrempkt i x_0 $\iff$ $f''(x_0) = 0$

"strängt" (ej //)

a) $f(x) = \cosh x$ är (strängt) konvex ty $f'(x) = \cosh x > 0$ (på hela $\mathbb{R}$)

b) $f(x) = \sin x$ är ... konkav på $[0, \pi]$ ty $f''(x) = -\sin x < 0$

Rep.

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

f konvex ∪ om f deriverbar: f' växer $\iff$ $f'' \geq 0$ (f' deriverbar)

konkav ∩ (på ett intervall !!!): f' avtar, $f'' \leq 0$

igen

OBS: $f'' > 0$ på $]a, b[$, f kont. på $[a, b]$ $\implies$ f strängt konvex på $[a, b]$

ex. a) $f(x) = |x|$: konvex på $\mathbb{R}$

b) $f(x) = e^x$: str. konvex på $\mathbb{R}$

ty $f''(x) = e^x > 0$

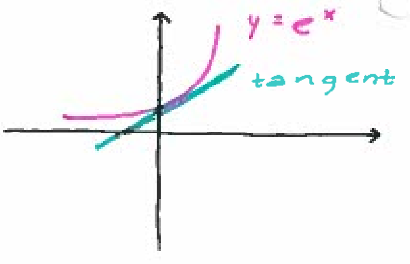
strängt större än tangent

$e^x > \underbrace{x + 1}_{\text{tangenten}}$ för $x \neq 0$

det ger:

strängt konvex !!

[$y = x + 1$ är tangent till $y = e^x$ i $(0, 1)$: $\dfrac{y - 1}{x - 0} = f'(0) = e^0 = 1$]



ett annat bevis:

för $g(x) = e^x - x - 1$ gäller $g'(x) = e^x - 1$ > 0 då $x > 0$, < 0 $x < 0$

dvs $g(x) > \underbrace{g(0)}_{\text{strängt minimum}} = 0$ V.S.V

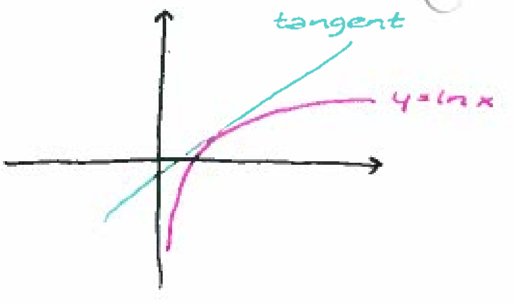
dvs i pkt x = 0...

c) $f(x) = \ln x$ strängt konkav

ty $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ på $]0, \infty[$

det ger t.ex

$\ln(x) < \underbrace{x - 1}_{\text{tangent i } (1,0)}$ $x \neq 1$



[även så:

$e^x > x + 1$ $x > -1$

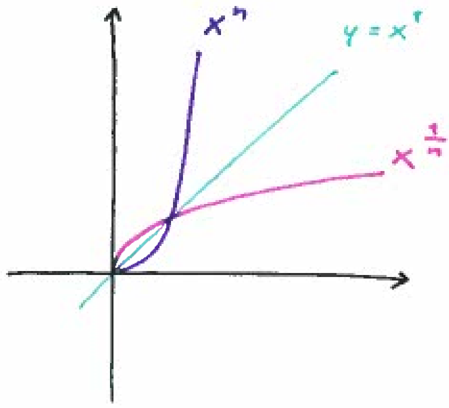
$\implies x > \ln(x + 1)$ $x > -1$

$\implies x - 1 > \ln x$ $(x > 0)$]

ty $f''(x) = n \cdot (n-1)\, x^{n-2} > 0$ för $x > 0$

$g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ är strängt konkav för $n \geq 2$

ty $g''(x) = \frac{1}{n}\underbrace{\left(\frac{1}{n} - 1\right)}_{<0} x^{\frac{1}{n}-2} < 0$ för $x > 0$



e) $f(x) = \sin x$

strängt konkav i $[0, \pi]$

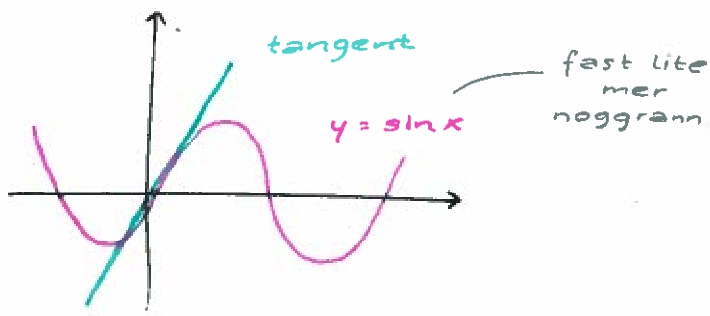
— " — konvex i $[-\pi, 0]$

ty

$f''(x) = -\sin x < 0$ i $[0, \pi]$

> 0 i $[-\pi, 0]$

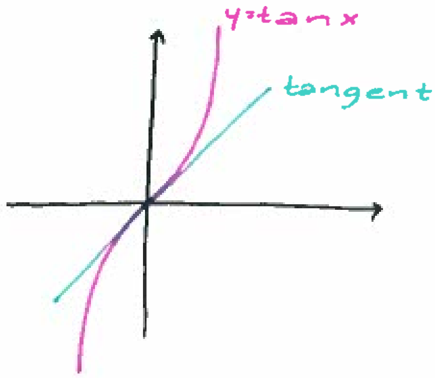
origo är inflexionspunkt



f) själva:

$f(x) = \tan x$

$f''(x) = 2 \tan x \cdot (1 + \tan^2 x)$



g) $f(x) = \sin hx$, $\tan hx$ ....

STANDARDGRÄNSVÄRDEN:

Sats. för e^x, $\ln x$

1) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

[gjort := derivatan av $\ln x$ i $x = 1$
(eller derivatan av $\ln(x+1)$ i $x = 0$)]

!!!!!!2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to -\infty} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$

Bevis

$\lim\limits_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim\limits_{h \to 0} e^{\overbrace{\frac{\ln(1+h)}{h}}^{\text{standard!!}}} = e^1$ (e^x är kontin.)

$= \lim\limits_{x = \frac{1}{h} \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

alla går mot e!!!

euler visade (1731): $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

publicerat 1739 (P.B. 2.3)

han införde bet "e" för denna gränsvärde = 2a vokal efter a

visade 1748 $e = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

och $e \notin \mathbb{R}$

e är transrendent (ej rot till ett polynom)

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ ger:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^q}{e^{px}} = 0$ $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(\ln x)^q}{x^p} = 0$ $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} |x|^p \cdot (|\ln|x||)^q = 0$ $p > 0$ $q \in \mathbb{R}$

Bevis av 3)

VET: $e^t > t + 1 > t$ för $t > 0$ (e^t str. konvex)!!

alltså $e^{\frac{x}{2}} > \frac{x}{2}$ $x > 0$

$\Longrightarrow e^x > \frac{x^2}{4}$

$\Longrightarrow 0 < \dfrac{x}{e^x} < \dfrac{x}{\frac{x^2}{4}} = \dfrac{4}{x}$

då $x \longrightarrow \infty$

0

instängningslagen ger: $\dfrac{x}{e^x} \longrightarrow 0$ då $x \longrightarrow \infty$

då är $\frac{x^q}{e^{px}} = \left(\frac{\frac{p}{q}x}{e^{\frac{p}{q}x}}\right)^q \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^q \longrightarrow 0$

då $x \longrightarrow \infty$

$(q > 0)$

$(q < 0$: klart!$)$

standard

$\downarrow$

0

$\frac{t}{e^t} \longrightarrow 0$ då $t = \frac{p}{q}x \longrightarrow \infty$

same same

Bevis av 4)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^q}{x^p} = \lim_{y = \ln x \to \infty} \frac{y^q}{e^{py}} = 0$$

av 5)

$$\lim_{x \to 0} |x|^p (|\ln|x||)^q = \lim_{t = \left|\frac{1}{x}\right| \to \infty} \frac{|-\ln t|^q}{t^p} = 0$$

anm:

av 2) det är helt olika gränsvärden

3), 4) säger:

exponentialfkt
logaritmfkt

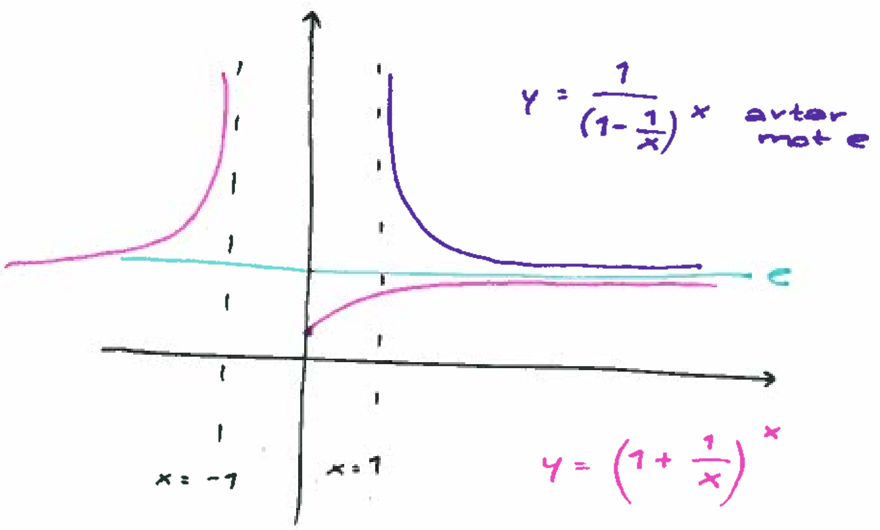
växer så mkt:
snabbare
långsammare

än vilken potens av x som helst

alt. $\frac{x^q}{e^x} \longrightarrow 0$

$\frac{\ln x}{x^q} \longrightarrow 0$

då $x \longrightarrow \infty$



$$\lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \lim_{-t = x \to \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x}$$

TURN PAGE!

AVSLUTANDE ANM BETR.

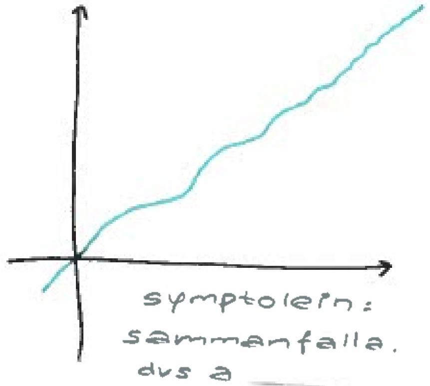
"rita $y = f(x)$"

går $f(x) \longrightarrow \infty$ "som en linje"

vi kallar en linje $L: y = kx + m$

för **ASYMPTOT** till en kurva C

om avståndet mellan en punkt P på C och linjen L går mot $\underline{\underline{0}}$ då avståndet mellan P och origo går mot ∞



symptolein: sammanfalla. dvs a ej men nära!

[dvs då P avlägsnar sig mer & mer från origo]

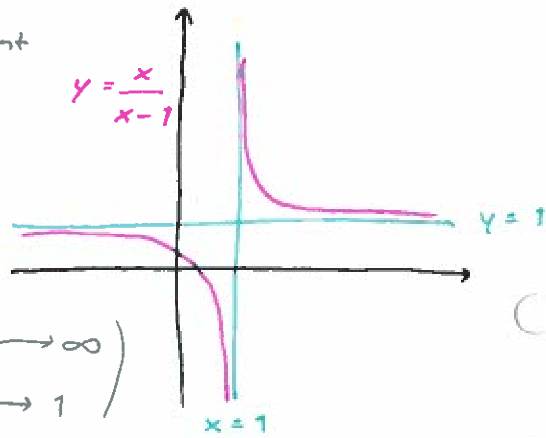
TYPEX.

1) lodrät / vågrät asymptot : $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

$y = f(x)$ har asymptoterna

$x = 1$ (ty $|f(x)| \longrightarrow \infty$ då $x \longrightarrow 1$) och

$y = 1$ (ty $f(x) = 1 + \underbrace{\dfrac{1}{x-1}}_{\text{dvs bakvänt}} \longrightarrow 1$ då $x \longrightarrow \pm\infty$)



2) sned asymptot : $\dfrac{(x-1)+1}{x-1}$

$f(x) = \dfrac{\sin x + (x^2 - 1)}{x-1}$

har asymptoter

per def..

$x = 1$ (ty $|f(x)| = \left|\dfrac{\sin x}{x-1} + x + 1\right| \longrightarrow \infty$ då $x \longrightarrow 1$)

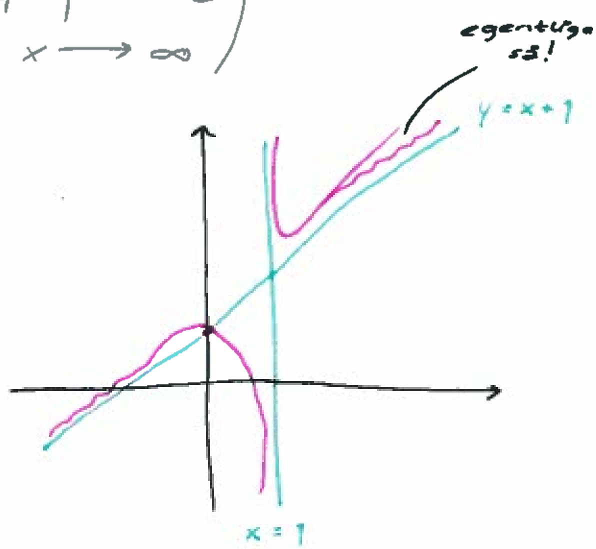
skillnad

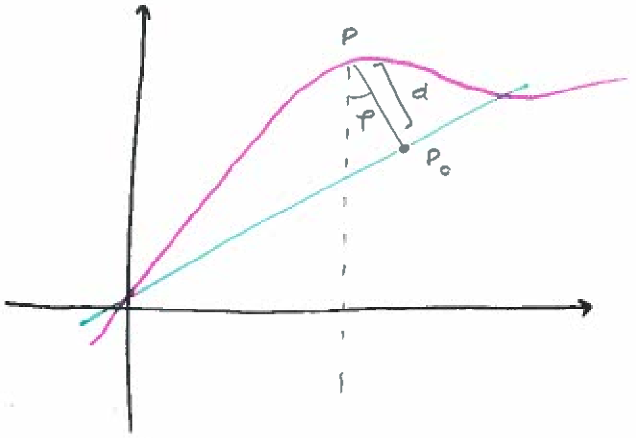
och $y = x + 1$ (ty $|f(x) - (x+1)| = \left|\dfrac{\sin x}{x-1}\right| \longrightarrow 0$ då $x \longrightarrow \infty$)

flytta om!!

ANM: d = avstånd mellan P och ℓ $= |\overrightarrow{PP_0}|$, $P_0 \in \ell$

$\overrightarrow{PP_0} \perp \ell$





dvs d är kortast men vi mäter den lodräta!

$$d = |f(x) - (kx+m)| \underbrace{\cos\varphi}_{\neq 0}$$

(ej lodrät)

$$d \longrightarrow 0 \iff |f(x) - (kx+m)| \longrightarrow 0$$

ger beräkning:

$$\Longrightarrow \frac{1}{x}(f(x) - (kx+m)) \longrightarrow 0 \quad \text{då } x \longrightarrow \pm\infty$$

$$\frac{f(x)}{x} - k - \frac{m}{x} \longrightarrow 0$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

och sedan:

$$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

(om detta ej existerar ej asymptot!!

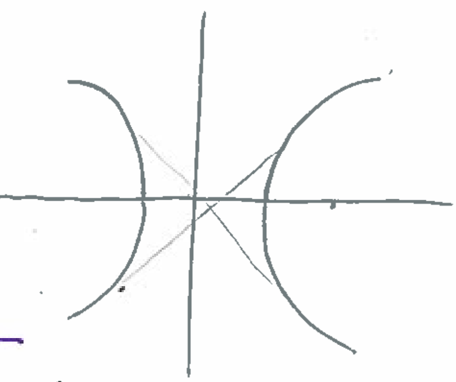
ex. (till sneda asymptoter):

ex. 20 i P.B 2.5

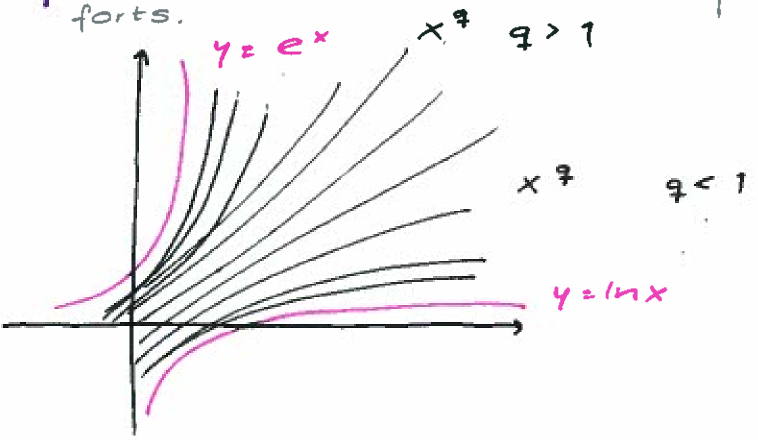
hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

asymptot

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$



forts.



a) $\lim_{x \to -\infty} x^{2009} e^{x} = \lim_{-x = t \to \infty} \frac{-t^{2009}}{e^{t}} = 0$ (standard!!!)

b) $\lim_{x \to 0+} x^{x} = \lim_{x \to 0+} e^{x \ln x} = e^{0} = 1$ (standard: $x \ln x \to 0$ då $x \to 0^{+}$ och e^{x} kont.)

c) $\lim_{x \to 0+} (\sin x)^{x} = \lim_{x \to 0+} e^{x \ln(\sin x)}$

$= \lim_{x \to 0+} e^{\frac{x}{\sin x} \cdot \underbrace{(\sin x \cdot \ln(\sin x))}_{0}} = e^{1 \cdot 0}$

då $t = \sin x \to 0$

d) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} (\tan x)^{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} e^{\underbrace{\cos x}_{\downarrow\, 0} \cdot \ln \underbrace{(\tan x)}_{\downarrow\, 0}}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} e^{\cos x \cdot \ln \sin x - \underbrace{\cos x \cdot \ln \cos x}}$

so... 200 late!!

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} e^{\cos x \cdot \ln \sin x} \cdot e^{\cos x (\cos x - 1) \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1}}$

$h = \cos x - 1 \to 0$

$= e^{0} \cdot e^{0 \cdot 1} = 1$

e) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} (\cos x)^{\tan x}$ $\longleftarrow$ SJÄLVA

(svar: 0)

dessa fick rättning sen!!

RÄTTELSE:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} (\tan x)^{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} e^{\cos x \cdot \ln(\sin x) - \underbrace{\cos x \cdot \ln(\cos x)}_{\to 0}}$$

då $\cos x = t \to 0^+$ $(x \to \frac{\pi}{2}-)$

$= e^{0-0} = 1$ (e^x kont!)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} (\cos x)^{\tan x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} e^{\sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \ln(\cos x)} = 0$$

$\sin x \to 1$, $\frac{1}{\cos x} \to \infty$, $\ln(\cos x) \to -\infty$

$\left(\frac{1}{e^t} \to 0 \text{ då } t \to \infty\right)$

själva:

tenta 06-08

är $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(\cos x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$D_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

öppna

deriverbar?

om ja, är $f'(x)$ kont.?

då måste ni kommentera alla pkt.

i alla pkt $x \neq 0$

$\frac{\ln(\cos x)}{x}$ yes & kan derivera lots & lots of

(i 0? vad händer?)

men kommentera ALLT!

MEN i 0....

given f, beräkna f' — den relativa förändringen.

nu betraktar vi det omvända problemet:
given f, beräkna en fkt F vars derivata $F' = f$.

(P.B. 5.1)

stamfunktion, antiderivata.

DEF. I ett intervall, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig på I
en funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
kallas **PRIMITIV FUNKTION** till f på I
om F är kontinuerlig på I och deriverbar
i inre pkt'r x i I med $F'(x) = f(x)$.

primitivus = det som var först av sitt slag

dvs. om ej kont. i 0, dela upp!
$]-\infty, 0[$ $]0, \infty[$ t.ex.

en primitiv fkt är entydigt bestämd så när som på en konstant:

SATS. om F_1, F_2 är primitiva fkt till f på I (ett intervall) så gäller: $F_2 = F_1 + C$
(ngt $C \in \mathbb{R}$)

Bevis.

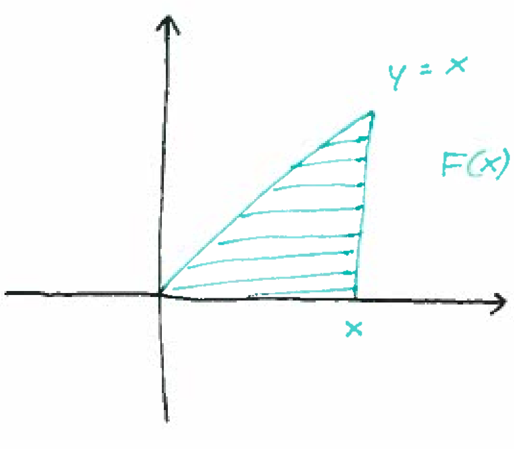
$$\begin{aligned} F_1' &= f \\ F_2' &= f \end{aligned} \implies (F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0 \quad \text{i inre pkt i } I$$

$$\implies F_2 - F_1 = C \text{ på } I \text{ (ty kont.)}$$

V.S.V.

ett första (bra, ty "ledande") exempel:
$F(x) = \frac{1}{2}x^2$ är en primitiv fkt till $f(x) = x$
(ty $F' = f$)

kolla:

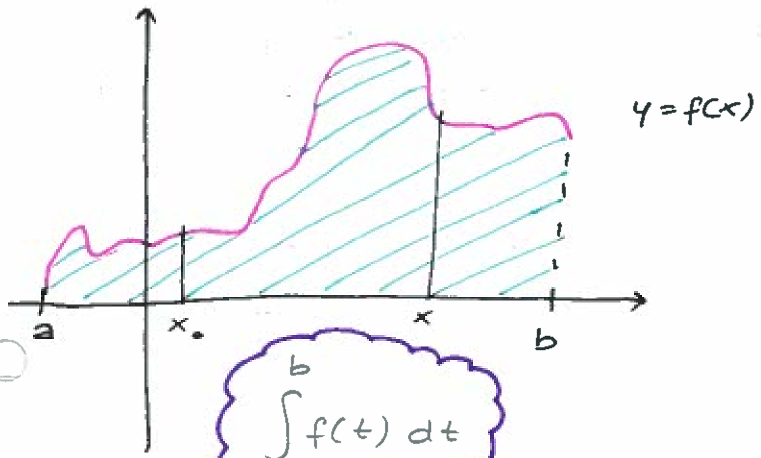


$F(x) = \frac{1}{2}x^2$ = arean av "punktmängden under $y = x$ mellan 0 och x"

... att denna areabestämning
ger en primitiv fkt.

för att beskriva det bra, inför vi redan nu de "rätta" beteckningarna:

DEF. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$ och kont. på $[a, b]$ slutet.



$$\int_a^b f(t)\,dt = \text{arean av pktmängden } \underbrace{\{(x,y) : \overbrace{a \leq x \leq b}^{\text{slutet.}},\ 0 \leq y \leq f(x)\}}_{\text{"pktmängder under } y=f(x) \text{ mellan } a \text{ och } b\text{"}} \ (\subseteq \mathbb{R}^2)$$

läs
"integral av f
från a till b"

(integer = hel, fullständig)

vidare sätter vi $$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

så får vi ett orienterat area-mått: vi mäter från b till a (dvs i neg. riktning) infördes av Bernoulli, publicerat av Leibniz (1686) (de lärdas verk)

Leibniz & Newton upptäckte de urgamla problemet "bestäm arean" intimt hänger ihop med det nya problemet "bestäm v, tangent" (dvs. "inversa till varann")

$\longrightarrow$ igång explosionsartad utveckl. av matten.

att sådana pktr har ett väldefinerat areamått ... visar nästa vecka

att vi får därmed primitiva fkt, visar vi nu

Sats.

(analysens huvudsats, version 1 i.B. 64)

förutս: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$ och kont. på I (ett intervall) $x_0 \in I$

påst: funktionen $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in I)$

är en primitiv fkt till f på I

bevis: låt x vara en inre pkt i I:

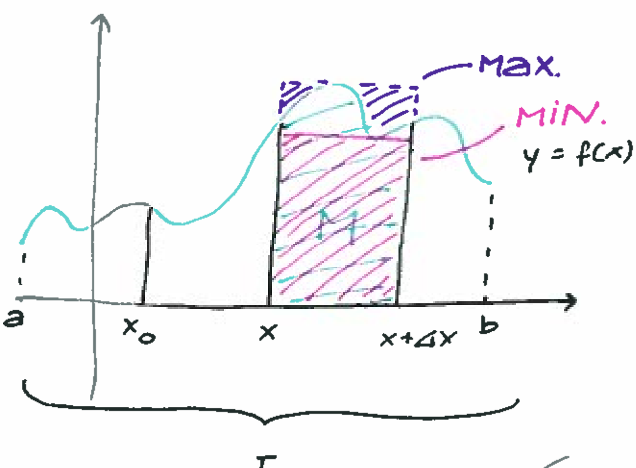
skall visa $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \overset{\text{derivata}}{=} f(x)$:

fall 1: $x \geq x_0$: för $\Delta x > 0$ gäller:

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}_{\text{arean av pkt. mängd under}} = \underbrace{\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt}_{\text{arean av pkt. mängd under } y=f(x) \text{ mellan } x \text{ och } x+\Delta x}$$

$y = f(x)$ mellan x_0 och $x+\Delta x_0$

$y = f(x)$ mellan x_0 och x



f är kont. på $[x, x+\Delta x]$ antar alltså där
[minsta värde min
största värde max

för areorna gäller då:

$$\underbrace{\min \cdot \Delta x}_{\substack{\text{rektangel} \\ \leq M}} \leq \underbrace{\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt}_{\substack{\text{arean av} \\ M}} \leq \underbrace{\max \cdot \Delta x}_{\substack{\text{rektangel } \geq M \\ \text{(övertäcker } M)}}$$

$\Delta x > 0$ $\quad \min \leq \dfrac{\int_x f(t)\,dt}{\Delta x} = \dfrac{\Delta F}{\Delta x} \leq \mathrm{Max}$

då $\Delta x \to 0_+$
går Max och
min mot $f(x)$
(ty f är kont.)

$f(x)$

instängningslagen ger $\dfrac{\Delta F}{\Delta x} \longrightarrow f(x)$ då $\Delta x \longrightarrow 0^+$

helt analogt fås

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} \longrightarrow f(x) \quad \text{då } \Delta x \longrightarrow 0^-$$

fall 2: $x < x_0$: analogt (do it, då ser du varför vi satte

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt \;!!!)$$

återstår: F är kont. i ev. randpunkter
om $I = [a, b]$ — ären i dessa?

$$F(b) - F(x) = \underbrace{\int_x^b f(t)\,dt}_{\text{arean mellan } x \text{ och } b} \leq (b-x)\cdot \max_{a \leq t \leq b} f(t) \longrightarrow 0 \quad \text{då } x \to b^-$$

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt \leq (x-a)\cdot \max_{a \leq t \leq b} f(t) \longrightarrow 0 \quad \text{då } x \to a^+$$

V.S.V.

funktioner som är kont. på ett intervall I har en primitiv fkt på I

↳ använd det vi har bevisat.

anm.
varje pkt f kan skrivas t.ex

$$f = \underbrace{f+|f|}_{g} - \underbrace{|f|}_{h}$$

$g \geq 0$ och $h \geq 0$ kont. om f är kont. har alltså primitiva fkt G och H: då är $F = G - H$ är primitiv fkt till f, ty $F' = G' - H' = g - h$!

som första exempel: primitiv fkt till $f(x) = \frac{1}{x}$

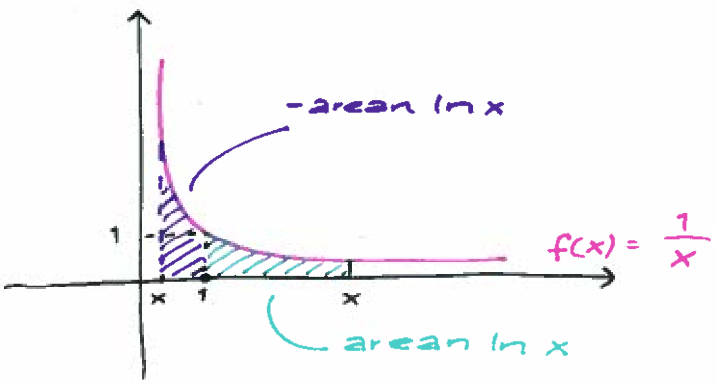
DEF. funktionen $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, $D_F =]0,\infty[$

kallas NATURLIGA LOGARITMFUNKTIONEN

bet: $F(x) = \ln(x)$

ln: logaritmus naturalis

[logos: ord, förhållande
aritmus: tal
(Napier)]



ln x är ju kontinuerlig som att dess f' är kont.! måste vara deriverbar i alla pkt

SATS. (regler... av ln):

1) $D \ln x = \frac{1}{x}$

2) $\ln 1 = 0$

3) $\ln x$ strängt växande

4) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

5) $\ln a^r = r \ln a$

6) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$a, b \in]0,\infty[$, $r \in \mathbb{Q}$

7) $\ln x \longrightarrow \infty$ då $x \longrightarrow \infty$; $\ln x \longrightarrow -\infty$ då $x \longrightarrow 0^+$

$V_{\ln} =]-\infty, \infty[$ dvs hela $\mathbb{R}$

Bevis

1) definition ("primitiv fkt till $\frac{1}{x}$ på $]0,\infty[$")

2) arean av sträcka $= 0$

3) arean växer då x växer (formellt: $D\ln x = \frac{1}{x} > 0$!!)

4) betrakta $g(x) = \ln(ax) - \ln(x) - \ln(a)$:

$$g'(x) = \frac{1}{ax}\cdot a - \frac{1}{x} = 0 \implies g(x) = C$$

$$g(1) = \ln a - \ln a = 0 = C$$

V.S.V.

5) betrakta $h(x) = \ln x^r - r\ln x$:

$$h'(x) = \frac{1}{x^r}\cdot r x^{r-1} - \frac{1\cdot r}{x} = 0$$

$$\implies h(x) = C$$

$h(1) = 0$ ger $C = 0$ V.S.V.

6) $\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln b^{-1} = \ln a + (-1)\ln b$

7) $\ln 2^n = n\cdot \underbrace{\ln 2}_{>0} \longrightarrow \infty$ då $n \longrightarrow \infty$

$\ln 2^{-n} = -n\cdot \underbrace{\ln 2}_{>0} \longrightarrow -\infty$ då $n \longrightarrow -\infty$

$(2^{-n} \longrightarrow 0!)$

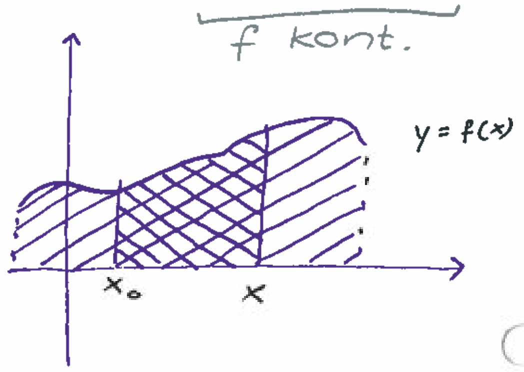
S.O.M.V. ger då $V_f = \mathbb{R}$ (ln är kont!)

Rep. • F primitiv fkt till f på I om $F'(x) = f(x)$ i inre pkt i I, F kont. på I. — ett intervall

• $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \pm$ arean under $y = f(x)$ mellan $\underbrace{x_0 \text{ och } x}_{f \text{ kont.}}$

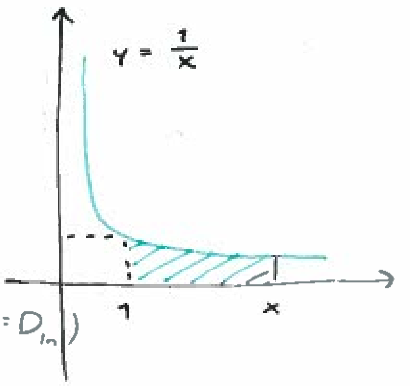
$+ \quad x \geq x_0$

$- \quad x \leq x_0$



ex. $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$:

funktionen $f(x) = \ln x$ är injektiv, har alltså invers f^{-1}



DEF.

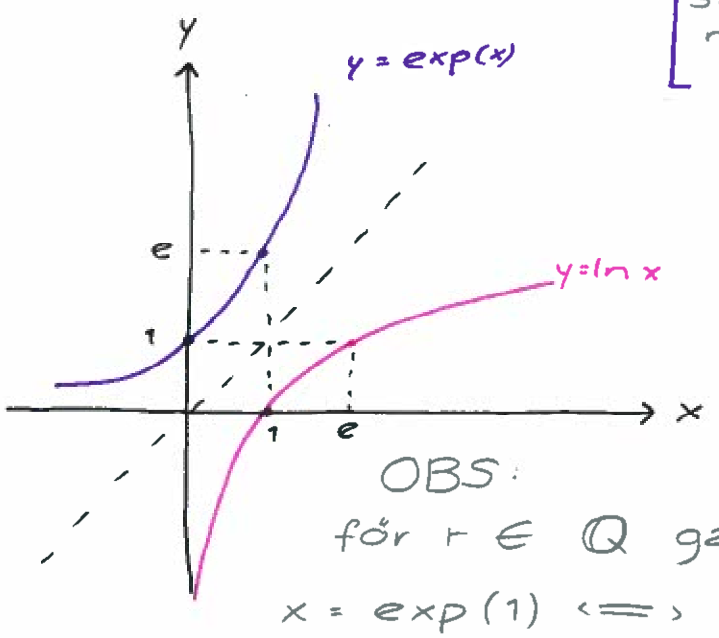
1) den till $f(x) = \ln x$ inversa funktionen f^{-1} kallas

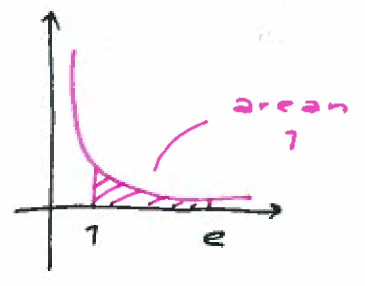
EXPONENTIALFKT $\quad D_{\exp} = \mathbb{R}$ $(:V_{\ln})$

bet. $\exp(x)$ $\quad V_{\exp} =]0, \infty[$ $(:D_{\ln})$

2) $e = \exp(1) \iff \ln e = 1$

[så att arean under $\frac{1}{x}$ mellan 1 och e är 1]





OBS: $\qquad$ regel 5!

för $r \in \mathbb{Q}$ gäller:

$x = \exp(r) \iff \ln x = r = r \ln e = \ln e^r$

$\iff \boxed{x = \exp(r) = e^r}$

nu är ju varje $x \in \mathbb{R}$ gränsvärde av en följd rationella tal $r_n \in \mathbb{Q}_n$ $\qquad$ med bas e!

$r_n \longrightarrow x$ då $n \longrightarrow \infty$

$\longrightarrow \underbrace{\exp(r_n)}_{e^{r_n}} \longrightarrow \underbrace{\exp(x)}_{e^x}$ ty exp är kont. alltså: skrives gränsvärdet.

DEF. vi sätter $e^x = \exp(x) \quad x \in \mathbb{R}$
och för $a > 0 \quad a^x = e^{x \ln a}$

nu har vi definerat: potensfunktioner
$x \longmapsto x^r$ för $r \in \mathbb{R}$ $(x > 0)$
exponentialfunktioner
$x \longmapsto a^x \quad (a > 0) \quad (x \in \mathbb{R})$

KOM IHÅG:

$e^{\ln x} = x \qquad (x \in]0, \infty[)$

$\ln e^x = x \qquad (x \in \mathbb{R})$

regler för exp:

SATS. funktionen $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto e^x$

$D_{\exp} = \mathbb{R}$ strängt väx. och deriverbar

och satisfierar:

1) $De^x = e^x$
2) $e^{a+b} = e^a \cdot e^b \qquad a, b \in \mathbb{R}$
3) $(e^a)^b = e^{ab}$
4) $e^x \longrightarrow \infty$, då $x \longrightarrow \infty$
$e^x \longrightarrow 0$ då $x \longrightarrow -\infty$

$V_{\exp} =]0, \infty[$

Bevis.

1) $De^x = \dfrac{1}{D \ln a}$ där $\ln a = x$

$= \dfrac{1}{\frac{1}{a}} = a = e^x$ V.S.V.

ett "analytiskt sätt" att def. differential ekv.
$Dy = y \quad y(0) = 1$ har en entydigt bestämd lösning (ODE lp 2)
den kallas $\exp(x)$

2) $\ln(\underbrace{\qquad}) = (a+b)\ln e = a+b$

ln injektiv

$= a\cdot \overbrace{\ln e}^{1 \text{ ju}} + b\cdot \ln e$] dvs. dela upp & kör igen!!!

$= \ln e^a + \ln e^b = \ln(e^a \cdot e^b)$

3) $(e^a)^b = e^{\ln(e^a)^b} = e^{b\ln e^a} = e^{b\cdot a}$ V.S.V.

Jaså?

4) $\ln t \longrightarrow \infty \iff t \longrightarrow \infty \quad t = e^x$

$\longrightarrow -\infty \iff t \longrightarrow 0^+$

eller direkt:

$(2^n > n)$

på båda sidor.

$1 > \ln 2 \implies e^1 > e^{\ln 2} = 2$

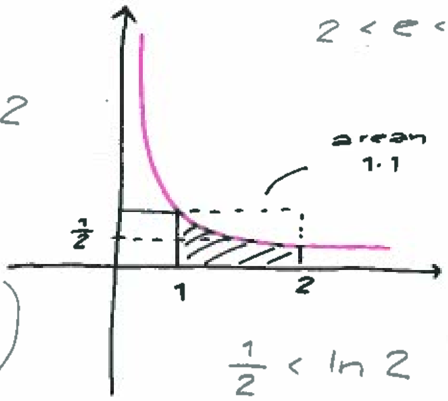
alltid större!

$\implies e^n > 2^n \longrightarrow \infty$

då $n \longrightarrow \infty$

(s.o.m.v ger igen $V_{exp}:]0,\infty[$)

$2 < e < 4$



$\frac{1}{2} < \ln 2$

$1 < \ln 4$

ger. $e < 4$ dvs $e^1 < e^{\ln 4}$

DEF.

vi skriver lösningsmängden till $Dy = f$

$\int f(x)\,dx$ = mängden av alla primitiva fkt till f

$= \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$ där F är någon primitiv fkt till f

$= F(x) + C$

därmed menas alltid: "då C genomlöper $\mathbb{R}$"

då är "integral" den till deriveringsoperatorn D inversa operatorn:

$$D : f \longrightarrow f'$$

$$D^{-1} : f \longmapsto \int f(x)\,dx$$

därför: "antiderivata"

ex. (dem skall ni komma ihåg)

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin dx = -\cos x + c \qquad \Big| \qquad \int \sinh x\, dx = \cosh x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c \qquad \Big| \qquad \int \cosh x\, dx = \sinh x + c$$

$$\int x^r dx = \begin{cases} \ln x + C & r = -1 \quad \text{dvs } \frac{1}{x} \\ \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C & r \neq -1 \end{cases}$$

blir arccot x

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C \qquad \Big| \qquad \int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \operatorname{arctanh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C \qquad \Big| \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \operatorname{arcsinh} x + C$$

blir arccos x

KOM IHÅG!!!..

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

nu ska vi lära oss att "integrera" = bestämma en primitiv fkt om F resp. G är primitiva fkt till f resp. g så är cF + G en primitiv fkt till cf + g, dvs:

$$\boxed{\int (c f(x) + g(x))\,dx = c\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$$

Bevis: $(cF + G)' = cF' + G' = cf + g$ V.S.V

Sats ② (variabel-substitution) (motsvarar kedje-regeln)

om F är en primitiv fkt till f, $t = g(x)$, g injektiv, g' kont., så är $F(g(x))$ en primitiv fkt till $f(g(x))\,g'(x)$

Bevis: $\frac{d}{dx} F(g(x)) = f g(x) \cdot g'(x)$

$$F(g(x)) = \boxed{\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt}$$

$t = g(x)$

då blir det BRA!

skriv upp såhär:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x)\,dx \end{array}\right] = \int f(t)\,dt$$

substituera $t = g(x)$ då är $\frac{dt}{dx} = g'(x)$,

eller (med $h = g^{-1}$):

$$\int f(x)\,dt = \left[\begin{array}{l} x = h(t) \\ dx = h'(t)\,dt \end{array}\right] = \boxed{\int f(h(t))\,h'(t)\,dt}$$

substituera $x = h(t)$

det lär vi oss genom att räkna en himla massa exempel!

om u', v' är kontinuerliga så är uv en primitiv fkt till $u'v + uv'$ Bevis: $(u \cdot v) = u'v + v'u$?

dvs $u(x)\,v(x) = \int \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)dx$, det använder vi så här:

$= \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$

$$\boxed{\int u'(x)v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,dx}$$

ex. till 1 — linjärt — derivera

$$\int (2\cos x - 5x^{7/3})\,dx = 2\int \cos x\,dx - 5\int x^{7/3}\,dx$$

$$= 2 \cdot \sin x - 5 \cdot \frac{3x^{\frac{10}{3}}}{10} + C$$

skriv om för vet ju

$$\int \tan^2 x\,dx = \int (\tan^2 x + 1)\,dx - \int 1\,dx$$

$$= \tan x - x$$

dvs, $\tan^2 x + 1 - 1$

2 $$\int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

same

dvs inre derivatan "tar vi bort"

eller

$$2\int \underbrace{\sin x}_{t}\ \underbrace{\cos\,dx}_{dt} = \sin^2 x + C$$

$\sin x = t$

$\frac{dt}{dx} = \cos x$

ser det som inre!!

eller $= -\cos^2 x + C$

"samma" primitiva fkt. skiljer sig bara m. konstant

[bli av med roten]

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{array}\right] = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt$$

$$= \int \overbrace{\cos t}^{\cos^2 t}\,\cos t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} + C \quad \text{[substituera tillbaka]}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = \sinh t \\ dx = \cosh t\,dt \end{array}\right] = \int \underbrace{\cosh t \cdot \cosh t}_{\cosh^2 t}\,dt$$

$$= \int \frac{1+\cosh(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{\sinh 2t}{2} + C$$

dvs $= \sinh t \cdot \cosh t = \sinh t \cdot \sqrt{1+\sinh^2 t}$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsinh} x + x\cdot\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

!!

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x\cdot\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = \sinh t \\ dx = \cosh t \end{array}\right] = \int 1\,dt = t$$

(om du hade glömt) $= \operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C$

$\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x)}_{\text{(en primitiv fkt)}} + C$ = alla primitiva fkt till f

"se den inre derivatan" [ger den bästa subs.]

ex. till ② (variabelsubs.)

a) $\int \sin^3 x\,dx = \int \overbrace{(1-\cos^2 x)}^{\text{inre}} \sin x\,dx$

$\underbrace{(1-\cos^2 x)}_{\text{samma som } \sin^2 x}$

$= \underline{-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C}$

formellt: $\begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin dx = dt \end{bmatrix} = \int (1-t^2)(-1)\,dt$

$= -\int dt + \int t^2\,dt$

$= -t + \frac{1}{3}t^3 + C$

back to x

$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

ex. på ③: "partiell integration":

integrerar bara 1 faktor

$\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$

helt enkelt produkt regeln !!!

TYP 1. "derivera bort problemet":

kan ej integrera än, derivera bort!

a) $\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$

derivatan av denna ju...

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

b) $\int x \cos x\,dx = x\cdot\sin x - \int 1\cdot \sin x\,dx$

derivera bort x

båda integreade

$= x\sin x + \cos x + C$

TYP 2. "se faktorn 1":

a) $\int 1\cdot \ln x\,dx = x\cdot \ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$

b) $\int 1\cdot \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ se!!!

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

same shit ☺

$\ln\sqrt{1+x^2}$

c) $\int \underline{\sqrt{1+x^2}\,dx} = x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2 + 1 - 1}{\ldots} = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{\ldots}\,dx$

$\Rightarrow \quad 2\int\sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C$

eller $\int\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right) + C$

TYP (3) efter flera partiella integraler får man tillbaka den sökta integralen:

SJÄLVA: $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$\int \cos ax\, e^{bx}\,dx = [\text{p.i.}] =$$

(ab ≠ 0)

derivera denna

$$\frac{1}{a}\sin ax \cdot e^{bx} - \frac{b}{a}\int \sin ax \cdot e^{bx}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\sin ax \cdot e^{bx} - \frac{b}{a}\left(-\frac{1}{a}\cos ax \cdot e^{bx} + \frac{b}{a}\int \cos ax \cdot e^{bx}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{a}\sin(ax)\,e^{bx} + \frac{b}{a^2}\cos(ax)\,e^{bx} - \frac{b^2}{a^2}\int \cos ax \cdot e^{bx}\,dx$$

efter 7 sorger och 8 bedrövelser fick vi tillbaka integralen...
BRA!

$$\Rightarrow \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int \cos(ax)\cdot e^{bx}\,dx = \frac{a\sin(ax)+b\cos(ax)}{a^2}\,e^{bx} + C$$

Svar:

$$\int \cos(ax)\,e^{bx}\,dx = \frac{a\sin(ax)+b\cos(ax)}{a^2+b^2}\,e^{bx} + C$$

komplicerad lösning...

för att kunna skriva $\int \cos ax\, e^{bx}$ på en sida!!

a) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ $\quad \frac{1}{x}$ inre der. av $\ln x$ $\quad = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

$\ln x \cdot \frac{1}{x}$

b) $\int \frac{1}{x \ln x}\,dx = \ln|\ln x| + C$

se: $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C}$

c) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$= -\ln|\cos x| + C$

$D\ln|x| = \begin{cases} D\ln(-x) = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} & x<0 \\ D\ln x = \frac{1}{x} & x>0 \end{cases}$

$= \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

ännu fler ex !!

d) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx =$

får ej vara 0

för $0<x<1$:

$\left[\begin{array}{ll} 1-x = t^2 & (0<t<1) \\ dx = -2t\,dt & \end{array}\right.$

själva

för $x<0$

$= -\int \frac{1}{(1-t^2)\cdot t}\,2t\,dt = \int \frac{2}{t^2-1}\,dt$

$= 2\,\text{arctanh}\, t$ $\quad$ bara är sådant

$= \ln \frac{1-t}{1+t}$ $\quad$ sätt tillbaka!

$= \ln \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} + C$

själva :

$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$

$(x>1)$

subs.

D_f annorlunda.

kanske...

$t = \sqrt{x-1}$

$x-1 = t^2$

$x = t^2+1$

$\frac{dx}{dt} = 2t \quad dx = 2t\cdot dt$

$\int \frac{2t}{(t^2+1)\,t}\,dt = \int \frac{2}{t^2+1}\,dt$

dvs arcsinh x

då $D\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$= 2\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = 2\cdot\ln(t+\sqrt{1+t^2})^2 + C$

"se" den inre derivatan:

ex. a) $\int \overbrace{\cos x}^{\text{inre...}}\, e^{\sin x}\,dx = e^{\sin x} + C$

b) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \arctan(\sin x) + C$

$\frac{1}{1+x^2}$

c) $\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx = \arctan(\ln x) + C$ ...

RATIONELLA FKT $\frac{P}{Q}$ ← ← P, Q polynom

kan (i princip) alltid integreras:

GRUNDTYPER:

A) $\int \frac{1}{(x+a)^n}\,dx = \begin{cases} \ln|x+a|, & \text{då } n=1 \\ \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} & \text{då } n \neq 1 \end{cases}$

förkortar bort 1 st.!!!

B) $\int \frac{x+a-a}{(x+a)^n}\,dx = \int \frac{1}{(x+a)^{n-1}}\,dx - a\int \frac{1}{(x+a)^n}\,dx$ ← typ A

$n \geq 1$

C) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$ kvadrat komplettera

VILL HA LIKNANDE

$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right)^2+1}\,dx$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

kolla !!!

DO IT

D) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = ??$

lösning 1: subs. $\left[\begin{array}{l} x = \tan t \\ dx = (1+\tan^2 t)\,dt \end{array}\right]$ $1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{1+\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^2}\,dt$$

$$= \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \underbrace{\sin t \cdot \cos t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C$$

$\frac{\sin 2t}{2} = \cos t \cdot \sin t$

dvs $\frac{1}{1+\tan^2 t} = \cos^2 t$

$\frac{\sin t}{\cos t} \cdot \cos^2 t$ – hellre!

$\underbrace{\tan t}_{} = x$

lösning 2:

börja $\int 1 \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = [p.i] =$

$$x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \int \frac{-x \cdot \overbrace{2x}^{\text{inre}}}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

ger: $2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ arctan x bättre

snabb förenkling:
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{1}{1+x^2} - 2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$
BYT SIDOR
$2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{1}{1+x^2}dx$

PB 5.2

nu skall vi visa att man kan skriva rat. fkt som linjär komb. av sådana typ A – typ D – termer:

vi förutsätter att grad Q > grad P

(om det inte är fallet: dela: $\frac{P}{Q} = k + \frac{R}{Q}$; grad R < grad Q dvs denna ska vara stoor!)

steg 1: faktoruppdela

$$Q(x) = (x-a)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots\underbrace{(x^2-a_p x+b_p)^{m_p}}_{\text{inga reella rötter}}$$

reella rötter

steg 2: gör rätt ansättning, det lär vi oss medelst exempel:

fall 1: enkla, reella rötter:

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

fall 2 : reella multipla rötter :

om ska ha gemensam rot blir $(x-1)$ $(x-2)^3$ minsta gemensamm

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$$

fall 3 : komplexa rötter :

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

1 grad mindre

steg 3 :

beräkna koefficienter, men OBS : var smart (se ex. ↓)

RÄKNING :

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \overset{\text{ansätt}}{=} \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$ det ger då

$$x^2+x+1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

sätt in rötterna!

drvs. de 3 nollställena!!!

$x=1$ $3 = 2A + 0 + 0$ $\boxed{A = \frac{3}{2}}$

$x=2$ $7 = 0 - B + 0$ $\boxed{B = -7}$

$x=3$ $13 = 0 + 0 + 2C$ $\boxed{C = \frac{13}{2}}$

RÄKNA ALDRIG UT DET!!

alltså :

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} - 7\cdot\frac{1}{(x-2)} + \frac{13}{2}\cdot\frac{1}{(x-3)}$$

ex. $$\frac{x^2+x+1}{\underbrace{(x-1)(x^2+1)}_{\text{komplext}}} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$ ger:

$$x^2+x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$ jämför koefficienter.

$x=1$ ger: $3 = 2A$ $\qquad \boxed{A = \frac{3}{2}}$

jmf x^2: $1 = A+B \implies B = 1-A = 1-\frac{3}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

jmf x^0
sätt in
$x=0$ $\qquad 1 = A-C \implies C = A-1 = \boxed{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} + \frac{\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)}{x^2+1}$$

ex. (p b u d) (partiell bråks uppdelning) ansätt!!

a) $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx \qquad \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$

$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx \qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$

$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ om $-1 < x < 1$

$= -\text{arctan}h\, x$

ö arc 6 b.

b) $\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)^3}$ (lägre grad) $\underset{\text{ansätt}}{=} \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$

$x^2+x+1 = (x-2)^3A + (x-1)(x-2)^2B + (x-1)(x-2)C$
$+ (x-1)D$

$x = 1 \qquad 3 = -A$

$x = 2 \qquad 7 = D$

jämför koefficienter!
största ... lägsta
näst —"— ... näst —"—

jmf x^3 : $0 = A + B$

jmf x^0 : $1 = -8A - 4B + 2C - D$
(dvs $x=0$ sätt in)

$A = -3$
$D = 7$
$B = 3$
$C = -2$

$C = \frac{1}{2}(1 + \underbrace{8A + 4B}_{+4A} + D)$

$+4A$ iom

$C = \frac{1}{2}(1 - 12 + 7)$

$C = -2$

svar:

$$= \frac{-3}{(x-1)} + \frac{3}{(x-2)} - \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{7}{(x-2)^3}$$

nu kan vi integrera om man vill.

Nu äntligen visar vi existensen av $\int_a^b f(t)\,dt$:

utförlig motivering

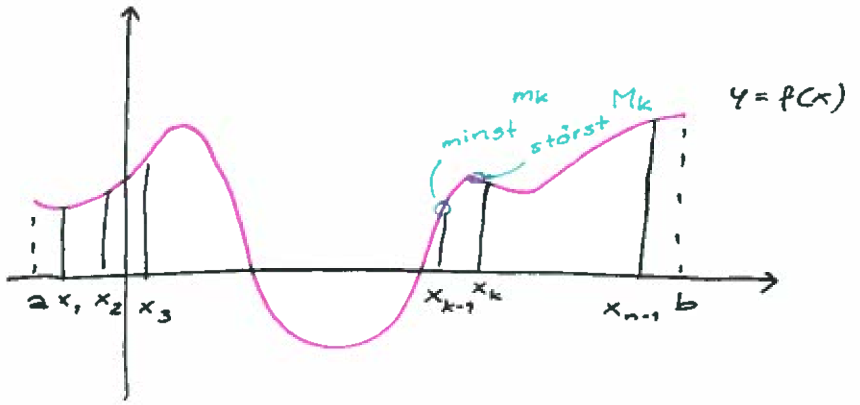
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

kontin. på $[a,b]$ $a < b$

sönderdela intervallet $[a,b]$ m.h.a. delningspunkter x_k

(*) $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

$[x_{k-1}, x_k]$ med längd $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ i delintervall



Δx_k är ett mått för sönderdelningens "finhet"

f antar på varje $[x_{k-1}, x_k]$ ett minsta värde m_k och ett största värde M_k

dvs. $m_k \leq f(x) \leq M_k$ för $x \in [x_{k-1}, x_k]$

alltså

$$s_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \overset{\text{minsta värdet i varje intervall}}{m_k} \cdot \underbrace{\Delta x_k}_{\text{längd av intervall}}}_{\text{undersumma}} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \overset{\text{största värdet}}{M_k} \cdot \Delta x_k}_{\text{översumma}} = S_n$$

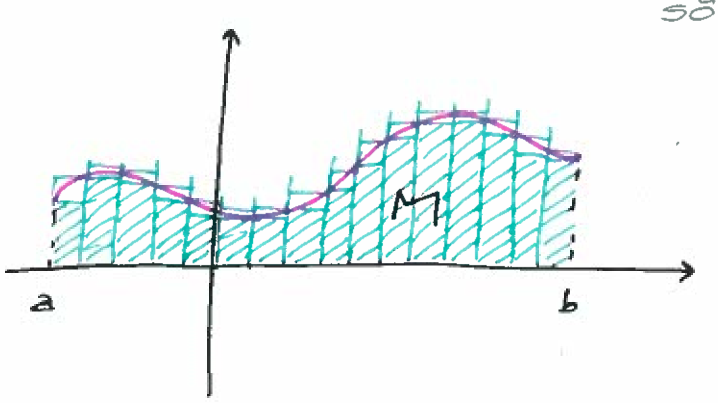
till f till sönderdelningen (*)

ANM:

godt. $\begin{matrix}\text{under}\\\text{över}\end{matrix}$ summa: $\sum_{k=1}^{n} h_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} H_k \Delta x_k$ med

mindre än minsta"
$h_k \leq m_k$
större än största!!
$H_k \geq M_k$

... på $f \geq 0$ och areor



sök arean av
$M = \{x, y\}$
$a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)$

s_n = arean av rektanglar som ligger i M

S_n = arean av rektanglar som övertäcker M

B. Riemann (1826 - 1866) definerade:

DEF.
en funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, som är begränsad på slutet $[a, b]$, kallas INTEGRERBAR över $[a, b]$ om det finns precis ett tal I som ligger mellan alla under- och över-summor till f
[dvs. $s_n \leq I \leq S_n$]
kan ta $n = m$

i så fall skrives detta tal $I = \int_a^b f(x)\,dx$ och kallas "integral av f från a till b"

Riemann visade:

SATS
begränsade monotona (dvs str. växande/avtagande) är integrerbara
begränsade $\underbrace{\text{styckvis kontin.}}$ fkt

[= kontin. bortsett från ändligt många pkt i vilka höger & vänster gränsvärde existerar]
dvs behöver ej vara lika → då kont.

FB: kap 6.2

(det vi nyss gjorde)
med "hoppstegsfunktioner"

Sats $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, kontin. på $[a,b]$
så är f integrerbar över $[a,b]$

Bevis

om vi tar fler delningspunkter (dvs: n ökar)
då bibehåller vi befintliga pkt (dvs: vi tillfogar nya delningspkt)
då gäller

s_n är växande och begränsad uppåt ($\leq S_n$)

bör bättre approximation

denna mer exakt

S_n avtagande och begränsad nedåt ($\geq s_n$)

alltså existerar $\lim_{n \to \infty} s_n = I_1$ och

$\lim_{n \to \infty} S_n = I_2$ $\qquad I_1 \leq I_2$

alltså:
finns minst 1 tal mellan alla s_n och S_n
visa nu:

$S_n - s_n \longrightarrow 0$ då $n \longrightarrow \infty$
$\max \Delta x_k \longrightarrow 0$

$$0 \leq S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k \leq \varepsilon_n \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon_n (b-a)$$

med: $\varepsilon_n = \max_{k=1 \to n} (M_k - m_k)$ från till största skillnad

då $\max \Delta x_k \longrightarrow 0$
så går $\varepsilon_n \longrightarrow 0$
p.g.a. likformigt kontin. fkt

alltså går
$S_n - s_n \longrightarrow 0$

0

instängningslagen
ger $S_n - s_n \longrightarrow 0$ V.S.V

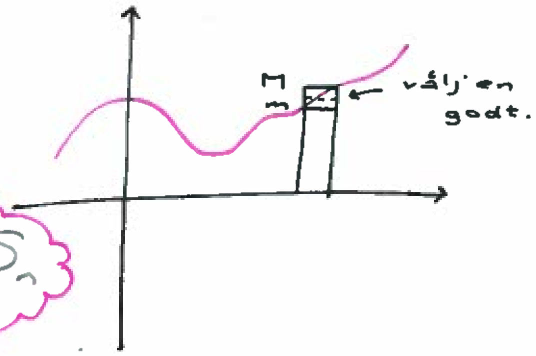
det bästa kommer nu!

ta en godtycklig pkt $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

då gäller:

$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$ det ger

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = S_n$$



DEF. (bet. s.o)

$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$ kallas RIEMANNSUMMA

där $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

instängningslagen ger:

$$s_n \leq \sigma_n \leq S_n$$

då $\max \Delta x_k \to 0$

I

(integralen från innan)

Sats $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kontin. på $[a,b]$

$a = x_0 < x_1 < x_2 \ \dots \ < x_n = b \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \xrightarrow[\max \Delta x_k \to 0]{I} \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{då } \Delta x_k \to 0$$

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ pkt som hör till vårt intervall

integralen är gränsvärdet av summor.

Leibniz införde bet. $\int_a^b f(x)\,dx$ för detta gränsvärde I:

$\int$: tyska stora s: et står för summa

dx : differenser Δx_k har gått mot 0!!!

ANM:

ofta tar man "ekvidistanta" delningspkt'r x_k, dvs lika långa delintervall $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$: hela sträckan / nr. alla interva

ta t. ex $\xi_k = a + k \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{längden av intervallet}}$ k'te intervallet I guess (= vänstra randpunkt)

då får vi $\underbrace{\sum f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right)}_{\text{ty } f(\xi_k)} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x_k} \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$

vet vi genom instängningslagen

ex.

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad [a,b] = [1,2] \qquad$ vet: $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{1+\frac{k}{n}}}_{f(\frac{1}{x})} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \xrightarrow[n \to \infty]{} \ln 2$$

onsd:

beräkna m.h.a. Riemannsummor

$\int_a^b e^{\alpha x}\,dx \quad \left[= \frac{1}{a}\, e^{\alpha b x} - e^{\alpha a x}\right]$

rep. f kont. på $[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots x_n = b,$
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Riemannsummorna $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \xrightarrow{\text{då } \max \Delta x_k \to 0}$

går mot ett gränsvärde
som betecknas

gränsvärde av summor... $\longrightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ alltså mot integralen.

allt som gäller för summor gäller!!

oviktigt vilken variabel

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

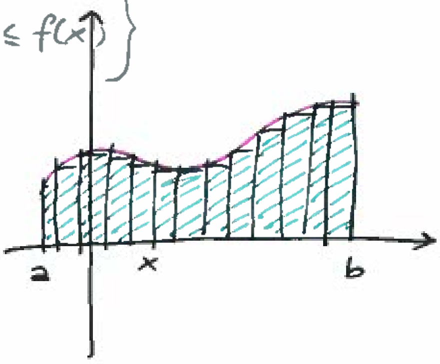
ξ_k kan väljas:
minimi- maximi pkt
vänstra - högra randpkt
eller mittpkt
$\frac{x_k + x_{k-1} + \dots}{2}$

hemsidan!

DEF om $f \geq 0$ på $[a,b]$
kont. så är

$\int_a^b f(x)dx$ arean av
pktmängden
$\{(x,y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

vettigt areamått



om här använd ej här

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ är en primitiv fkt (analysens huvudsats)

spec: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

DEF. $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad a,b \in D_F$

vi sätter $\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

hak parenteser we use!

OBS! $\left[F(x)\right]_a^b = \left[F(x) + C\right]_a^b$!! godt. $c \in \mathbb{R}$

denna försvinner ju $C - C = 0$!

regler för $f(t)dt$

SATS: $f, g, u', v' \ldots$ är kont. på intervall $I \supseteq [a,b]$ hör alltså till I

① $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ i inre pkt i I
dvs. derivatan av integralen

② $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$ där F är ngn primitiv fkt till f på I

Bevis:
$\left[F_1(x)\right]_a^b = \left[F_2(x)\right]_a^b$ ty $F_2 = F_1 + C$

③ Linearitet:
$\int_a^b (cf(x) + g(x))dx = c\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

arean = area 1 + area 2 typ.

$\left[cF(x) + G(x)\right]_a^b = c\left[F(x)\right]_a^b + \left[G(x)\right]_a^b$

④ variabelsubstitution:
g inj, g' kont:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \begin{bmatrix} g(x) = t \\ g'(x)dx = dt \end{bmatrix} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

REMEMBER för det är ju egentligen det som ska in !!

med $h = g^{-1}$
eller

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x = h(t) \\ dx = dt\,h'(t) \end{bmatrix} = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f(h(t))\,h'(t)\,dt$$

om man ej "ser" inre derivatan

$$\left[F(g(x))\right]_a^b = \left[F(t)\right]_{g(a)}^{g(b)}$$

5. partiell integration

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Bevis:

$$[u(x)v(x)]_a^b = \left[\int_a^b \Big(\overbrace{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}^{\text{dvs detta är ju derivatan!}}\Big)\,dx\right]$$

6. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ formellt: $[F(x)]_a^a = 0$ dvs $F(a) - F(a) = 0$

7. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ $[F(x)]_a^b = -[F(x)]_b^a$

8. $f \geq 0$ och $a < b$ då är $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

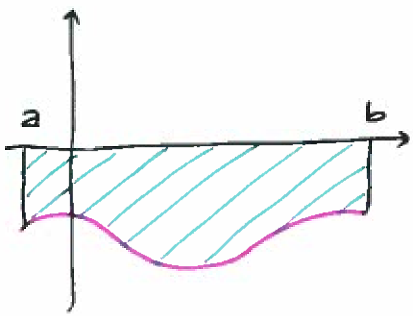
$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a):$$

$F' = f \geq 0 \Longrightarrow$ f är växande

$\Longrightarrow F(b) \geq F(a)$ V.S.V.

om $f \leq 0$

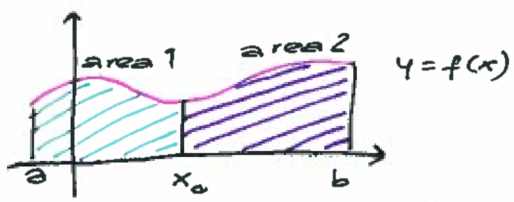
då är $\int_a^b f(x)\,dx = -\underbrace{\int_a^b (-f(x))\,dx}_{\text{arean under } y = -f(x) \geq 0}$ = arean av pkt mängd under x-axeln.



just areamåttet kanske 2 cm² men −2 cm² då visar att mäter i neg. riktning

9. additivitet

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx$$



$$[F(x)]_a^b = [F(x)]_a^{x_0} + [F(x)]_{x_0}^b$$

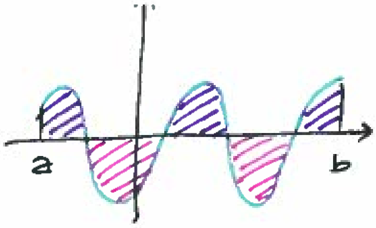
x_0 behöver ej ligga mellan a, b

[a, b] endast delintervall i helt kont. fkt

kan ha längre ut då blir neg!! drar ifrån

ger: $\int_a^b f(x)\,dt$ är den resulterande arean

↑ har ju andra användningar t.ex. arbete energi



(10.) om $f \geq g$ på $[a,b]$ så är $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Bevis:

$f - g \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$

$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

triangel olikhet

fås direkt (gräns av summor)

$a_k \leq b_k \Rightarrow$

$\sum a_k \leq \sum b_k$

$\left|\sum a_k\right| \leq \sum |a_k|$

$\pm f(x) \leq |f(x)|$

$\Rightarrow \pm \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b |f(x)|\,dx$

$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \geq \int_a^b |f(x)|\,dx$

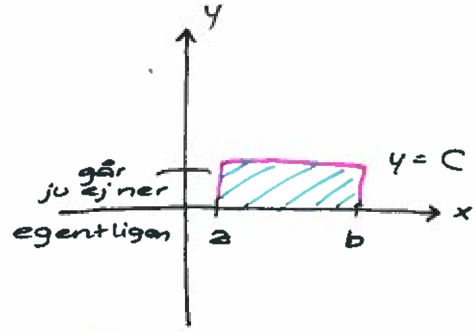
visa att om f är kont. på $[a,b]$,
$f \geq 0$ och $f(x_0) > 0$ för ngt $x_0 \in [a,b]$

så är $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ STRÄNGT!!!

ex.

1. arean av en rektangel

$$\int_a^b c\,dx = c\,[x]_a^b = \boxed{c(b-a)}$$

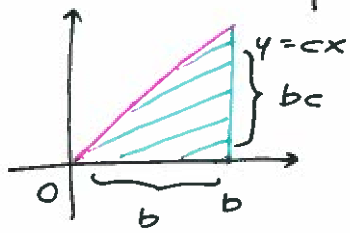


se inledande ex.

2. arean av triangel

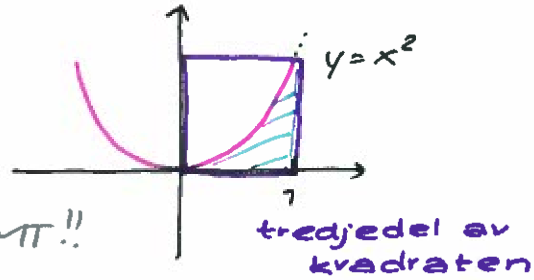
$$\int_0^b cx\,dx = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b$$

$$= c\,\frac{b^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\cdot b\cdot cb}$$



3. arean av parabel

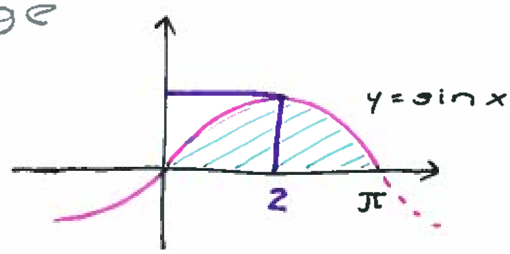
$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$ BERÖMT!!



så långt kunde Arkimedes grekerna.

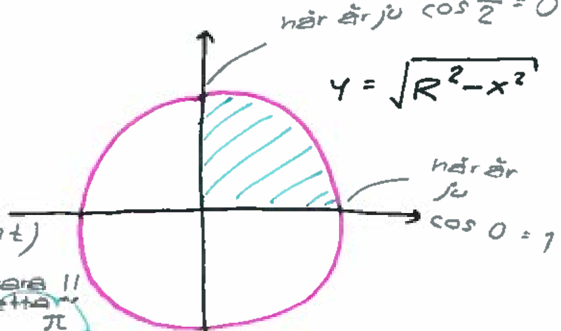
4. arean under sinusbåge

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$



vi vill ha hela va!

5. arean av en cirkelskiva
$x^2 + y^2 \leq R^2$:



$$= 4\cdot\int_0^{\ } \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = R\cdot\cos t \\ dx = dt(-R\sin t) \\ x = R \iff t = 0 \\ x = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

0 tagit ut R'n alltså vänder $b \to a$

borde vara detta!!

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} R\cdot\sqrt{1-\cos t^2}\,(-R\sin t)\,dt$$

$+\sin t$ dvs $\oplus$ roten om $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

bestämmer oss för ex $0-90°$

dvs tar ut $\frac{1}{2}$ men behåller 1an..

$$= 4\cdot R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cdot\sin t\,dt$$

$$= 4\cdot R^2 \int^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2R^2\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]$$

$$= 2R^2\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi} = R^2\pi$$

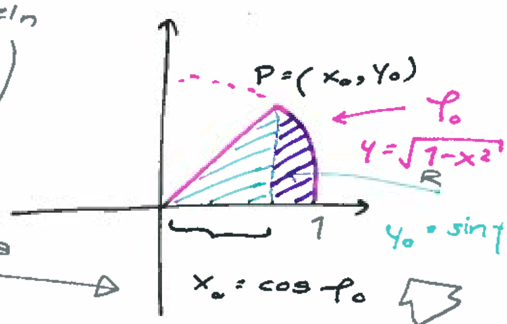
formel för vinkel $x^2+y^2=1$

$R=1$

⑥ arean av en cirkelsektor

$$\text{arean} = \underbrace{\frac{1}{2}x_0 y_0}_{\text{triangeln}} + \int_{x_0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

1 — då $x=1$ vinkeln



$$= \begin{bmatrix} x = \cos t \\ dx = -dt\sin t \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{då } x=1 \\ t=0 \\ \text{då } x=x_0 \\ t=\varphi_0 \end{matrix}$$

enligt detta

$$= \frac{1}{2}\cos\varphi_0 \sin\varphi_0 + \int_{\varphi_0}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)\,dt$$

arean $\frac{\varphi_0}{2}$

$$= \frac{1}{2}\cos\varphi_0\sin\varphi_0 + \int_0^{\varphi_0} \sin^2 t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cos\varphi_0\sin\varphi_0 + \int_0^{\varphi_0} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$$

denna blir $\sin 2t$ istället för

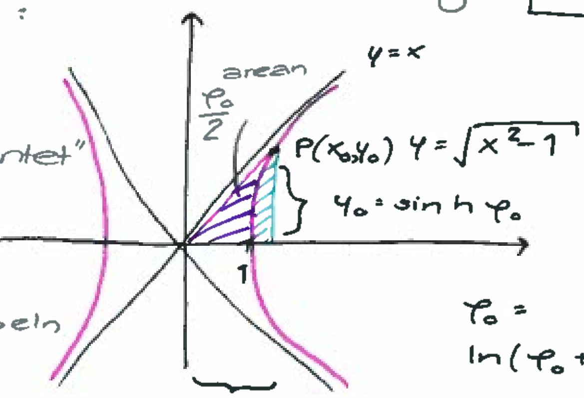
$$= \frac{1}{2}\cos\varphi_0\sin\varphi_0 + \left[\frac{1}{2}t - \frac{\sin t \cdot \cos t}{2}\right]_0^{\varphi_0} = \boxed{\frac{\varphi_0}{2}}$$

⑦ arean för hyperbeln:

$x^2 - y^2 = 1$

(mellan 1 och x_0)

arean av "hyperbelsegmentet"



$$= \frac{1}{2}x_0 \cdot y_0 - \int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\,dt$$

det under hyperbeln

$\varphi_0 = \ln(\varphi_0 + \sqrt{1+\varphi_0^2})$

$\sinh^{-1}\varphi_0$

y skare va 😊

$$= \begin{bmatrix} x = \cosh t \\ dx = \sinh t\,dt \\ x = 1 \iff t=0 \\ x = x_0 \iff t = \varphi_0 \end{bmatrix}$$

hyperbolicus 😊

$$= \frac{1}{2}\cosh\varphi_0 \sinh\varphi_0 - \int_0^{\varphi_0} \sinh t \cdot \sinh t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cosh\varphi_0 \sinh\varphi_0 - \int_0^{\varphi_0} \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,dt$$

hälften av arean av segmentet

$$= \frac{1}{2}\cosh\varphi_0\sinh\varphi_0 - \frac{1}{2}\left[\frac{\sinh 2t}{2} - t\right]_0^{\varphi_0} = \boxed{\frac{\varphi_0}{2}}$$

Jämna/udda fkt.

DEF. en fkt $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kallas

JÄMN om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in D_f$

OBS $x \in D_f \iff -x \in D_f$

ex.

1) jämna

x^{2n} (därav namnet) $|x|$, $\cos x$, $\cos hx$

UDDA om $f(-x) = -f(x)$

ex

2) udda

x^{2n+1} (-"-), $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sin hx$, $\tan hx$, $\arcsin x$, $\arctan x$,

$\operatorname{arcsin} hx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$\operatorname{arctan} hx = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

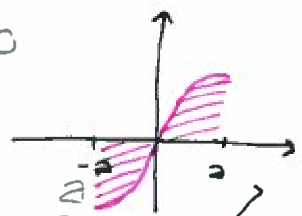
GLÖM EJ: kolla om fkt är jämn/udda

visa direkt: "udda"

SATS. f är kontinuerlig på $[-a, a]$ $a > 0$

symmetriskt intervall

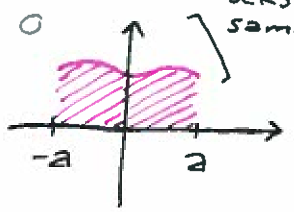
① om f är udda så är $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



samma area

② om f är jämn så är $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)dx$

också samma



Bevis:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \begin{bmatrix} x = -t \\ dx = -dt \end{bmatrix}$$

$x = 0$
$t = 0$
$x = -a$
$t = a$

$$= \int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(-t) + f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{om } f(-t) = -f(t) \text{ udda} \\ 2\int_{0}^{a} f(t)dt & \text{om } f(-t) = f(t) \end{cases}$$

hur ska det vara?

ex.

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^3)\,dx = 0$ ty $\sin(x^3)$ är udda! sätt in (x) och $(-x)$ plus denna är symmetrisk!

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$ RÄKNA UT BELOPP!

belopp ej problem längre

$= 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = 2\cdot\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \boxed{4}$

anm.

① för varje kontinuerligt f så är $\int_a^x f(t)\,dt$ en kont, deriverbar i inre pkt a fkt.

(den primitiva är det

så fås många nya funktioner som är lika viktiga som sin, cos, sin h...

men de kan ej (alltid) anges m.h.a ändligt många elementära fkt.

(trigonom, hyperboliska, exponential och deras inversa)

kallar dem: "icke-elementära"

de får eget namn (men är ju elementär
ex. sin h x

exempel:

$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$: integralsinus

en av de viktigaste... Fourier analys

$\left(f(t) = \frac{\sin t}{t} \text{ med } f(0) = 1 \text{ är kont!} \right)$

kan dock ej integrera

$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$: Fresnel-integral

$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$: error-function

(statistik: normalfördeln.)

Liouville visade:

$$\int e^{x^2}dx, \quad \int \frac{x}{e^x}dx$$: icke elementära (1835)

Abel visade:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx$$: —"— (1826)

"eliptiska integraler"
du kan ej räkna ut
längd av cirkel...

ANM:

det finns (nödvändiga) generaliseringar
av integralbegreppet, ffa Lebesque-integral

[löst talat: Riemann tar ju över & undersummor, denna tar bara översumma
nöjer sig att approx. från ena hållet]

ex.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

dvs ej rationell!

← alla $S_n \geq 1$
alla $s_n \leq 0$
konvergerar aldrig mot varann.

ej Riemann... men Lebesque-integrerbar

kraven på att $\int_a^b f(x)dx$ existerar:

- f kont. på $[a,b]$
- $[a,b]$ begränsat, slutet intervall

om det ej är fallet kan man behandla $\int_a^b f(x)dx$ som följe:

ifall ex $\int_0^1 \frac{1}{x}$

kollar

$$\int_\delta^1 \quad \text{då } \delta \to 0^+$$

$$\int_0^R \quad \text{vad händer?} \quad R \to \infty$$

en generaliserad integral

dvs $\int_0^\infty$

alltså då ej kont
ej begränsad

olösbara integraler:

$$\int \frac{e^x}{\ln x}\,dx, \quad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \quad \int \frac{x}{\ln x}\,dx$$

gamma funktion $\Gamma(x)$ strax.

PB: 6.5

TYP 1. (o)begränsat intervall

men ej: kont. eller begränsad

DEF. om f är integrerbar över $[a, R]$ för varje $a \leq R \in \mathbb{R}$ så säger vi: den GENERALISERADE INTEGRALEN

$\int_a^\infty f(t)\,dt$ är KONVERGENT om $\int_a^R f(t)\,dt$ har ett gränsvärde då $R \longrightarrow \infty$

och i så fall sätter vi

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(t)\,dt$$

om $\int_a^R f(t)\,dt$ saknar gränsvärde då $R \longrightarrow \infty$ säger vi: den GENERALISERADE INTEGRALEN $\int_a^\infty f(t)\,dt$ är DIVERGENT

---

om $\int_a^\infty f(x)\,dx$ är konvergent så sätter vi

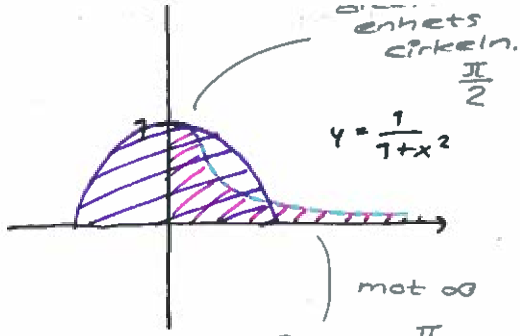
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^\infty = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$$

(F en primitiv till f på $[a,\infty[$)

gränsvärdet då I guess

den nedre gränsen

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - 0$$



arean $\frac{\pi}{2}$ oändligt långt

SATS 1. (standard ex. 1) ? LP 2.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{konvergent} \iff p > 1$$

$$\text{divergent} \iff p \leq 1$$

(har ej gränsvärde)

Bevis.

kont. till R. typ.

$$\int_1^R \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \left[\ln x\right]_1^R = \ln R & \text{då } p = 1 \\ \left[\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^R = \dfrac{R^{1-p}}{1-p} - \dfrac{1}{1-p} & \text{då } p \neq 1 \end{cases}$$

ej gränsvärde här då $\ln R \to \infty$

TÄNK $R \to \infty$!

"måste ha R därnere"

ej g.v. om p mindre än 1

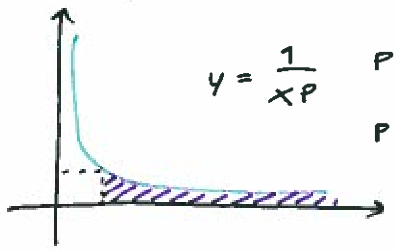
alltså:

gränsvärde då $R \to \infty$ existerar om och endast om $p > 1$!!

då $R \to \infty$

Lita aldrig på figur.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{div. då } p = 1$$



$p = 1$ oändlig area

$p = 1.01$ ändlig area

ses ej i FIGUR.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1.01}}\,dx \quad \text{konv då } p > 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 \ (m^2)$$

kan ej omges av ett ändligt långt staket?!

analogt $\int_{-\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_{-R} f(x)\,dx$ konv. annars div.

TYP 2. f. ej kont. i randpkt — vanligtvis kont. dock ej deriverbar här

DEF. om f är integrerbar över $[a+\delta, b]$ för varje $\delta \geq 0$ $(a+\delta < b)$ så säger vi:

den **GENERALISERADE INTEGRALEN**

$\int_a^b f(x)\,dx$ är konvergent om $\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$ har ett — lite innanför randpunkt

gränsvärde då $\delta \to 0^+$,

sätter då

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$$

i annat fall: divergent.

analogt:

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$: konv. om limes existerar
div ... ej ...

SATS 2. (standard ex. 2)

$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ är konvergent $\iff p < 1$
divergent $\iff p \geq 1$

här går ju mot $-\infty$, ej g.v.

Bevis:

$$\int_\delta^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \left[\ln x\right]_\delta^1 = 0 - \ln\delta & \text{då } p = 1 \\ \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_\delta^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{\delta^{1-p}}{1-p} & \text{då } p \neq 1 \end{cases}$$

ska ej bli noll i nämnare

gränsvärdet existerar $\iff p < 1$ då $\delta \to 0^+$

Typ 3. (inre pkt)

om f inte är kont. i $x_0 \in]a,b[$ (inre pkt) så sätter vi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx :$$

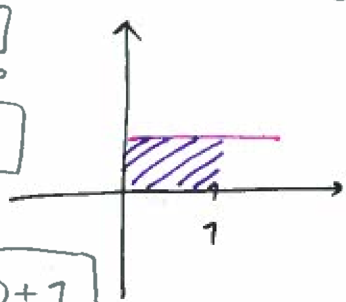
konvergent om båda integra är konv.

annat fall: divergent (minst 1 st. div)

ex.

a) $$\int_0^1 \theta(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0^+} \underbrace{\int_\delta^1 \theta(x)\,dx}_{=1} = [x]_0^1 = \boxed{1}$$

i pkt 0 ej def.



b) $$\int_{-1}^1 \theta(x)dx = \underbrace{\int_{-1}^0 \theta(x)dx}_{\lim\limits_{\delta \to 0^-} \int_{-1}^{\delta} \theta\, dx \,=\, 0} + \int_0^1 \theta(x)dx = \boxed{0+1}$$

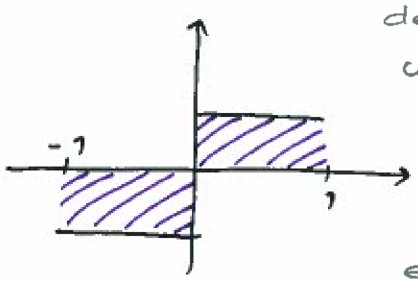
har ingen area då väl.

c) $$\int_{-1}^1 \mathrm{sgn}(x)\,dx = \int_{-1}^0 \mathrm{sgn}\,x\,dx + \int_0^1 \mathrm{sgn}\,x\,dx$$

$-\delta$ precis innan noll

$$= \lim_{\delta \to 0^+} \underbrace{\int_{-1}^{-\delta} \mathrm{sgn}\,x\,dx}_{-1} + \lim_{\delta \to 0^+} \underbrace{\int_\delta^1 \mathrm{sgn}\,x\,dx}_{1}$$

$$= [-x]_{-1}^0 + [x]_0^1 = 0$$



den är ju udda! men kan ej använda sats iom ej kont.

a) $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_{-1+\delta}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \lim_{\delta\to 0^+} \int_{0}^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

ej def i $x = 1$ eller $x = -1$ JU ! därför δ

$$= 2 \cdot \lim_{\delta\to 0^+} \int_{0}^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

den är ju jämn!

ok att ta bort δ

$$= 2 \cdot \left[\arcsin x\right]_0^1 = \boxed{\pi}$$

e) $$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)^2}\,dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right]_0^{\infty} = \boxed{-2}$$

kan ej stämma

USCH!!! funktion är ej kont. på hela Df

OBS: generaliserad i 0 och i 1!

KORREKT:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)^2}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)^2}\,dx$$

$$= \left[-\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right]_0^1 \;\ldots\ldots$$

kolla om kont. på hela Df

denna är divergent!

saknar gränsvärde då $x \longrightarrow 1-$

typ 1 (generaliserad i ∞) $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$

typ 2 (generaliserad i a) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)dx$

typ 3 (generaliserad i inre pkt) $a \le x_1 < x_2 < \dots x_p \le b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_p}^b f(x)dx$$

alla måste vara konvergenta

gränsvärdesreglerna ger:

Sats $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrerbara över $[c,d] \subset]a,b[$

a) om $\int_a^b f(x)dx$ och $\int_a^b g(x)dx$ **båda** är konvergenta så är $\int_a^b (cf(x) + g(x))dx$ konvergent ($c \in \mathbb{R}$)

med $= c\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

integralen är linjär... men gäller även för generaliserade

konv.

$$\int_0^\infty 0dx = \int_0^\infty (x-x)dx = \int_0^\infty xdx - \int_0^\infty xdx$$

denna är div.

USCH USCH USCH !!!

(b) partiell integration
variabelsubs. gäller!)

GÖR SÅ: räkna ut utan gränser... SEN kolla om g.v existerar!

för det mesta kan man inte beräkna en primitiv fkt (och då avgöra konvergens) egentligen vill man bara veta att/om integralen är konvergent

(typ: har ett system ändlig tot. energi)

då finns satser: "konvergens kriterium"

SATS (P.B. 6.5 sats 11) $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ±∞ tillåtna

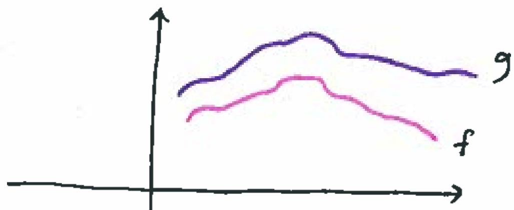
integrerbar över varje $[c,d] \subset]a,b[$

OBS → endast för (+) fkt

(1.) om $\underline{0 \le f} \le g$ på $]a,b[$ så gäller:
i varje pkt!

a) $\int_a^b f(x)dx$ divergent $\Longrightarrow$ $\int_a^b g(x)dx$ divergent

b) $\int_a^b g(x)dx$ konvergent $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ konvergent



ifall arean under f är oändlig (div) så även g.

man försöker jämföra svår fkt med enklare $\frac{1}{x^p}$

namn

⇨ [jämförelse : kriterium
majorant]

kom ihåg: standardex

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \text{ konv } \Longrightarrow p<1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \text{ konv } \Longrightarrow p>1$$

(2.) om $\int_a |f(x)| dx$ konvergent $\Longrightarrow \int_a f(x) dx$ konvergent

DEF.

om $\int_a^b |f(x)| dx$ är konvergent säger vi:

integralen $\int_a^b f(x) dx$ är ABSOLUTKONVERGENT

och f är ABSOLUTINTEGRERBAR över $[a,b]$

Bevis.

för typ 1 : "$b = \infty$" : $0 \leq \int_a^R f(x) dx \leq \int_a^R g(x) dx$ ty $f \leq g$

(1.) a)

$\int_a^\infty f(x) dx$ divergent $\underset{f \geq 0}{\Longrightarrow} \int_a^R f(x) dx \xrightarrow[\text{då } R \to \infty]{} \infty$ för alla $a < R \in \mathbb{R}$ alltså ej gränsvärd.

$\Longrightarrow \int_a^R g(x) dx \xrightarrow[R \to \infty]{\text{också}} \infty$

dvs $\int_a^\infty g(x) dx$ är divergent.

b) om $\int_a^\infty g(x) dx$ existerar, så är $\int_a^R f(x) dx \leq \underbrace{\int_a^R g(x) dx}_{\text{växande mot}} \leq \int_a^\infty g(x) dx$

$\int_a^R f(x) dx$ är växande och begränsad uppåt (ty $f \geq 0$)

växande mot då $R \to \infty$ ($g \geq 0$)

alltså existerar $\lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x) dx$.

V.S.V.

2.)

$0 \leq f + |f| \leq 2|f|$ (på $]a,b[$)

OBS! bara för $f \geq 0$ pos. fkt!

alltså: $\int_a^b 2|f|\,dx$ konv $\overset{①b)}{\Longrightarrow}$ $\int_a^b (f(x) + |f(x)|)\,dx$ konv

$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + |f(x)| - |f(x)|)\,dx$

$= \int_a^b (f(x) + |f(x)|)\,dx - \int_a^b |f(x)|\,dx$ konv. båda är!!

OBS.

absolutkonv. $\overset{\text{medför}}{\Longrightarrow}$ konv. EJ omvändning!

ex.

a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$: $0 \leq \left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2}$ gäller för $x > 1$

jämförelse kriterium
tänk: $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}$ $p>1$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konv. $\Longrightarrow \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{1+x^2}\,dx$ konv.

$\Longrightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 + \int_1^\infty$ konv. t.o.m absolut konvergent

(ty är definerad där med.

ELLER

$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$ iom att arctan x har gränsvärde då!

$\Longrightarrow$ jmf krit. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ konv. $\Longrightarrow$

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$ konv (absolut konv. $\Longrightarrow$ konv.)

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}\ \ x}\,dx \quad \text{konv. eller div ?}$$

"generaliserad i 0"

delar båda på $x\sqrt{x}$

lösning

vet: $\sin x \le x \implies 0 \le \dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

öppen

för $0 < x \le 1$

$$(=2) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{konv. (standard)}$$

$\sqrt{x} = x^{1/2}$ så $p < 1$

ty denna är större!!

$$\underset{\text{jmf krit.}}{\implies} \int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx \quad \text{konv.}$$

c) $$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx \quad \text{konv. / div. ?}$$

behöver 2 delar

generaliserad i noll och "i x"

betrakta $\displaystyle\int_0^1$: $\quad 0 \le \dfrac{1}{\sqrt{x}\,e^x} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

mellan just dessa $\ \hookrightarrow 0 < x \le 1$

och $\displaystyle\int_1^\infty$: $\quad 0 \le \dfrac{1}{\sqrt{x}\,e^x} \le \dfrac{1}{e^x}$

$(1 \le x)$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \ \text{konv} \underset{}{\overset{\text{jmf}}{\implies}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x} \ \text{konv.}$$

då denna är ju större

blir ju ett gränsvärde

$$\int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^\infty = e^{-1}$$

konv.

$$\implies \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx \quad \text{konv.}$$

SVAR:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx \quad \text{konv.}$$

$$\left(= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx \right)$$

ty dess delar är båda konv.

hitta en (helst deriverbar) fkt med

$$f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ \ldots \ \cdot n = n! \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Goldbach frågade Euler, han löste problemet i brev: 13/10 - 1729, 8/1 - 1730. Meddelade han lösn. i olika former.

MEST POPULÄR

blev: Eulers integral funktion av andra slaget

så kallad gamma funktion.

DEF.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt \ \left[\underset{e^{-t}=v}{=} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{v}\right)^{x-1} dv \right.$$

definerad för $x > 0$

$$\left. = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{z}} e^{zx}\,dx \right] \qquad t = e^{z}$$

EGENSKAPER:

n fakultet

def. för alla $x \neq$ neg. $\mathbb{Z}$ (komplexa)

1. $$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x}{x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

2. $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$ funktionalekvation för Γ

3. $$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad (x \notin \mathbb{Z})$$ (reflection)

4. $$\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x} \qquad \left(x \neq \frac{2n+1}{2}\right)$$

egentligen ej egen pkt

$x = 0$ ger $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\, e^x}\,dx \qquad \text{(se ex. ovan!)}$$

⑤ Eulers integral av första slaget.

beta fkt $\quad B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dx = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

speciellt $m, n \in \mathbb{N}$

$$B(m+1, n+1) = \int_0^1 t^m (1-t)^n\,dt = \frac{m!\,n!}{(m+n)!}$$

induktion, håller 1 m/n fixt!

SATS. visa

1) $\Gamma(x)$ är konv. då $x > 0$

2) $\Gamma(n) = (n-1)!$ för alla $n \in \mathbb{N}$ $\quad (0! = 1)$

induktion

DO IT! se demo tenta!

INTEGRALKALKYLENS MEDELVÄRDESSATS.

PB. 6.3 ev. sats 7/8

SATS. förutsättn: f, g kont. på $[a,b]$, g växlar ej tecken

påstående: finns $x_0 \in [a,b]$ så att $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(x_0)\int_a^b g(x)\,dx$

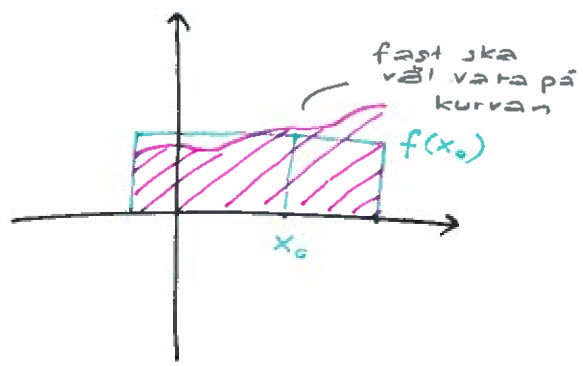
speciellt:

om $g = 1$

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\int_a^b \overset{\text{dvs } 1}{dx} = f(x_0)(b-a)}_{\text{Lagrange MVS}}$$

$F(b) - F(a) = F'(x_0)(b-a)$

$(F' = f)$



Bevis.

(för $g \geq 0$) f är kont. på $[a,b]$ antar alltså 1 minsta m största M värde

dvs. $\quad m \leq f(x) \leq M$ för alla $x \in [a,b]$

$\overset{\text{iom } g \geq 0}{\Longrightarrow}$ $\quad m\,g(x) \leq f(x)g(x) \leq M g(x)$

$$\int_a^b m\,g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \int_a^b M g(x)\,dx$$

om $\int_a g(x)dx = 0$: färdigt (varje $x_0 \in [a,b]$ duger)

om $\int_a^b g(x)dx > 0$: $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$

det är fallet om $g(x_0) > 0$ i ngn $x_0 \in [a,b]$

alltså:

f kont. S.O.M.V ger:

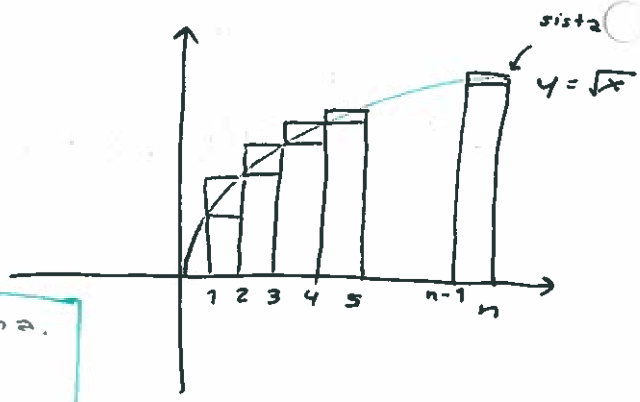
det finns $x_0 \in [a,b]$ med

$$f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

V.S.V.

ex. till Riemannsummor:

$$\int_0^n \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^n = \frac{2}{3}n\sqrt{n}$$



fom steg 1, vid de pkt'rna.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \le \frac{2}{3}n\sqrt{n} \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

under summa! över summa

Rep.

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \text{ konv} \implies \int_a^b f(x)\,dx \text{ konv}$$

[absolut konvergens medför konvergens]

Omvändning gäller ej:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

[konvergent (lp 2 alternerande serie) Leibniz - serie

värdet $= \dfrac{\pi}{2}$ (Fourier analys)]

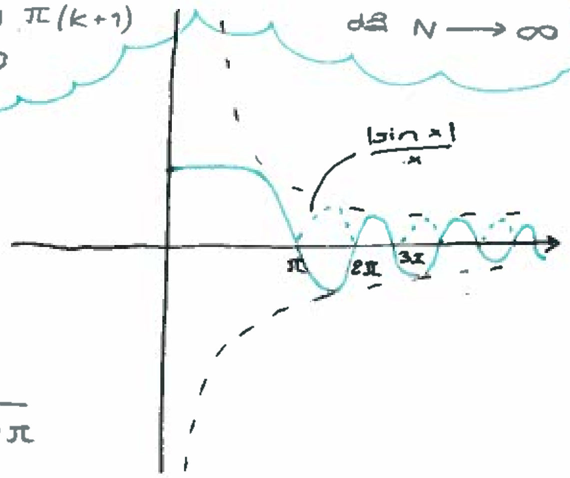
$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \quad \text{divergent} \quad (\text{lp } 2)$$

alltså divergent!!

$$\geq \sum_{k=0}^{N+1} \frac{2}{\pi(k+1)} \longrightarrow \infty \quad \text{då } N \longrightarrow \infty$$

$$\int_0^N \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \underbrace{\frac{|\sin x|}{x}}_{\geq \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}}\,dx$$

$$\int \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$$



"översumma till $\ln x$" $\int \frac{1}{x}$

$0 \le f \le g$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx$ div $\Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ div

enbart för positiva

OBS!

$$\underbrace{\int_a^b g(x)\,dx \text{ konv} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ konv}}$$

gäller precis denna ordning

ex: $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{(\ln x)^{2009}}\,dx$ konv/div?

växer så mkt långsammare än vilken!

standard $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}$ konv $\iff p > 1$

vet: $\displaystyle\frac{(\ln x)^{2009}}{x} \longrightarrow 0$ då $x \longrightarrow \infty$

det ger: $\displaystyle\frac{(\ln x)^{2009}}{x} < 1$ för $x \geq$ ngt ω

säkert

om x är tillräckligt stort

vilket det ju skall vara nu.

alltså $\quad 0 \le \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{(\ln x)^{2009}}$: $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x}\,dx$ div $\stackrel{\text{jmf}}{\Longrightarrow} \int_e^\infty \frac{1}{(\ln x)^{2009}}\,dx$ Div!

är ju $p = 1$ nu. Div!!

växer långsammare mot noll.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} x \cdot \sin\frac{1}{x}\,dx$ en olösbar integral.

går mot noll då $n \longrightarrow \infty$

MVS

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} x_n \sin\frac{1}{x_n} \cdot \underbrace{\int_n^{n+1} dx}_{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x_n}}{\frac{1}{x_n}} = 1$

för ngt $x_n \in [n, n+1]$

standard ty $x_n \longrightarrow \infty$

alltså

$\dfrac{1}{x_n} \longrightarrow 0$

då $n \longrightarrow \infty$

TILLÄMPNING AV INTEGRAL.

till avbildningen $\mathbb{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$: vektorvärda fkt. av en reell variabel.

till varje $t \in D_{\mathbb{r}}$ ordnas en pkt $P_t = \mathbb{r}(t)$
$= (x_1(t), x_2(t) \ldots \; x_n(t))$ eller bättre

en <u>ortsvektor</u> $\mathbb{r}(t) = \overrightarrow{OP_t}$

origo.

DEF.

en avbildning $\mathbb{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ kallas för en KURVA i $\mathbb{R}^n$. om $D_{\mathbb{r}}$ är ett intervall, så får vi en ORIENTERAD KURVA :

då t genomlöper $D_{\mathbb{r}}$ i en given riktning, så genom löper? punkerna $\mathbb{r}(t)$ $V_{\mathbb{r}}$ i en viss riktning.

om $D_{\mathbb{r}} = [a,b]$ så genomlöper $\mathbb{r}(t)$ kurvan $V_{\mathbb{r}}$ i en viss riktning från STARTPKT'N $\mathbb{r}(a)$ till ÄNDPKT'N $\mathbb{r}(b)$.

(kallar även $V_{\mathbb{r}}$ för kurva)

kan även vara tvärtom $\mathbb{r}(b) \longrightarrow \mathbb{r}(a)$.

RITA alltid pilar som anger RIKTNING !!!

---

vi skriver upp det såhär:

$$C : \mathbb{r} = \mathbb{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad a \xrightarrow{t} b$$

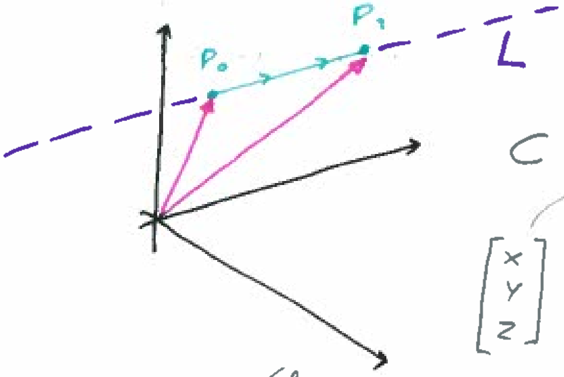
genomlöper kurvan går från a till b (riktning)

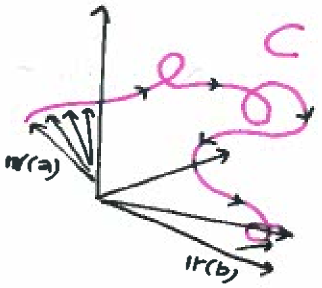
curve [curvus = krökt, böjd]

eller

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad a \xrightarrow{t} b$$

a) sträcka mellan P_0 och P_1





$C : \mathbb{x} = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbb{v}$

$0 \xrightarrow{t} 1$ $\quad \mathbb{v} = \overrightarrow{P_0P_1} \Big\} \ \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$

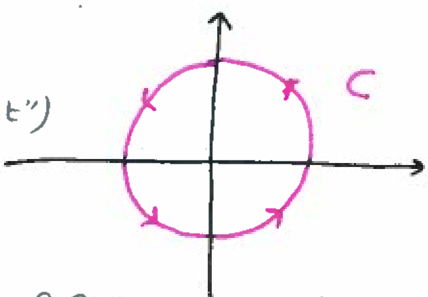
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}$$

linjen L ($/\ell$) genom P_0, P_1 i riktning $\mathbb{v}$

$\ell : \mathbb{r} = \mathbb{r}(t) = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbb{v}$ $\qquad -\infty \xrightarrow{t} \infty$

b) cirkel kring O, radien R :

genomlöper moturs / motsols ("positivt")



$C : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ $\qquad 0 \xrightarrow{t} 2\pi$

kurvans parameter

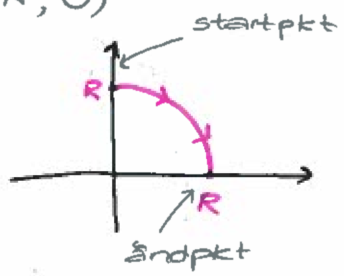
från startpkt'n $\mathbb{r}(0) = (R, 0)$

till ändpkt'n $\mathbb{r}(0) = (R, 0)$

c) cirkelbåge från $(0, R)$ till $(R, 0)$

$C : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ $\qquad \frac{\pi}{2} \xrightarrow{t} 0$

genomlöper

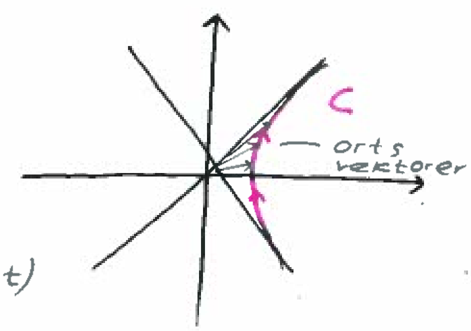


d) $\boxed{\text{hyperbeln}}$ (högre grenen) :

$x^2 - y^2 = 1$

alltså dessa

$C : \begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}$ $\qquad -\infty \xrightarrow{t} \infty$



$\mathbb{r} = \mathbb{r}(t) = (\cosh t, \sinh t)$

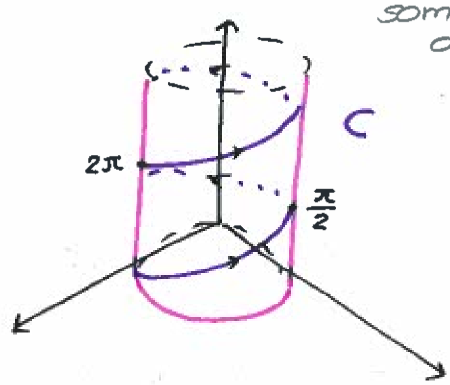
e) skruvlinje ("helix) kurva " "

$$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \xrightarrow{t} n\pi :$$

(x, y, z) ligger säkert på cylindern $x^2 + y^2 = 1$

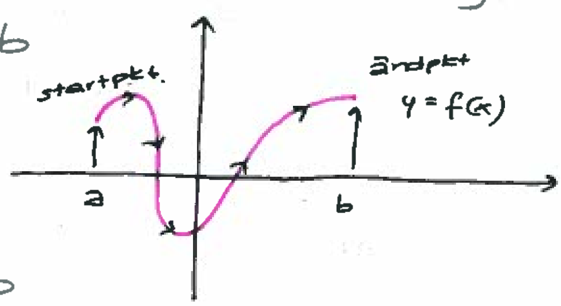
z växer med t

som kurva. och så uppåt



f) specialfall : "funktionskurva" $y = f(x) = \mathcal{G}_f$

$$\mathcal{G}_f : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad a \xrightarrow{t} b$$



KURVA $C : \mathbb{r} = \mathbb{r}(t) \quad a \xrightarrow{t} b$

t kallas för kurvans PARAMETER — dvs. använder t

och $\mathbb{r} = \mathbb{r}(t) \quad a \xrightarrow{t} b$ för kurvans PARAMETERFRAMSTÄLLNING

NYTT begrepp "C"-fkt.

DEF. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

f är C^m (av klass C^m) i M om f är m gånger deriverbar i M och den m:te derivatan är kontinuerlig.

säger även: (m ggr kontinuerligt deriverbar i M)

C : continuous.

C^0 : f kont.

C^1 : f' är kont — måste visa: deriverbar & derivatan är kont.

a) $f(x) = x^2$ är C^∞ dvs C^m för varje $m \in \mathbb{N}$

b) $f(x) = |x|$ är C^0 (bara!)

c) $f(x) = x \cdot |x|$ är C^1 men inte C^2 !!!!

DEF.

en kurva $C : \mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ $a \xrightarrow{t} b$ i $\mathbb{R}^n$ kallas:

$\mathbb{r}(t) = (x_1(t) \ldots x_n(t))$

TÄNK alltid R^2 eller R^3

a) kontinuerlig om alla $x_k(t)$ är kontinuerliga på $[a, b]$, resp $]-\infty, b]$ resp $[b, \infty[$ resp $]-\infty, \infty[$

alla x i D_f måste vara kont. dvs. i alla pkt'r.

b) deriverbar om alla $x_k(t)$ är deriverbara i $]a, b[$ öppna intervallet!!!

c) C^m $(m \geq 1)$ om alla $x_k(t)$ är C^m i $]a, b[$

och om $a, b \in D_{\mathbb{r}}$, alla följande gränsvärden existerar.

$$x_k^{(m)}(a) = \lim_{t \to a^+} x_k^{(m)}(t) \quad \text{och} \quad x_k^{(m)}(b) = \lim_{t \to b^-} x_k^{(m)}(t)$$

då mot randpkt skall gränsvärdet existera.

DEF.

om $C : \mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ $a \xrightarrow{t} b$ är deriverbar så sätter vi för t_0 inre pkt i $D_{\mathbb{r}}$

$$\mathbb{r}'(t_0) = (x_1'(t_0), x_2'(t_0) \ldots\ldots x_n'(t_0)) \quad \text{om } \mathbb{r}'(t_0) \neq \vec{0}$$

deriverar alltså alla komponenter.

så kallas $\mathbb{r}'(t_0)$ för TANGENTVEKTOR till kurvan C i pkt $\mathbb{r}(t_0)$ och linjen

$\ell : \mathbb{x} = \mathbb{r}(t_0) + t \cdot \mathbb{r}'(t_0)$ kallas TANGENT till C. i $\mathbb{r}(t_0)$

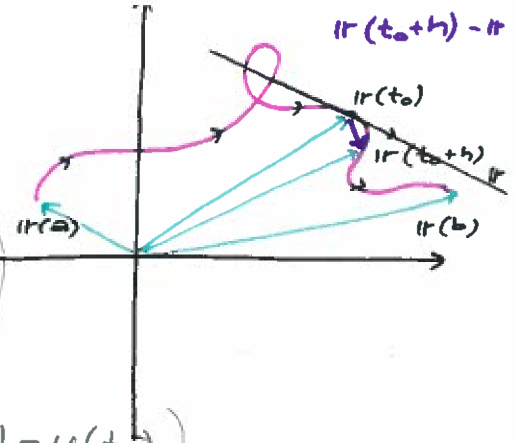
formellt är

$$\mathbb{r}'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{r}(t_0+h) - \mathbb{r}(t_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}, \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \right)$$

$$= \left(\lim_{h \to 0} \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}, \lim_{h \to 0} \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \right)$$

$$= \left(x'(t_0), y'(t_0) \right)$$



OBS OBS OBS:

$$(x,y) \longrightarrow (a,b) \Longleftrightarrow \underbrace{|(x,y) - (a,b)|}_{\text{avståndet mellan } (x,y) \text{ och } (a,b) \text{ går mot } 0}$$

$$= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \longrightarrow 0$$

ekvivalent med

$$\Longleftrightarrow \quad x - a \longrightarrow 0$$

och

$$y - b \longrightarrow 0$$

" koordinatvis gränsvärde "

fr. 16/10 kl. 10-12 demonstration i GD "gamla tentor"

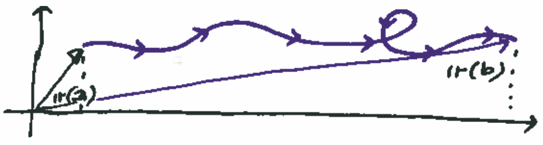
Rep.

ortsvektor

$C: \mathbb{r} = \mathbb{r}(t), \quad a \xrightarrow{t} b$

vi har ALLTID ett intervall.

i $\mathbb{R}^n$



$= (x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t))$

$\mathbb{r}'(t_0) = (x_1'(t_0), x_2'(t_0) \dots x_n'(t_0))$

ex.

a) linjen $\ell: \mathbb{r} = \mathbb{r}(t) = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbb{v}$ har tangent vektorn $\mathbb{r}'(t) = \mathbb{v}$ (SÅKLART!)

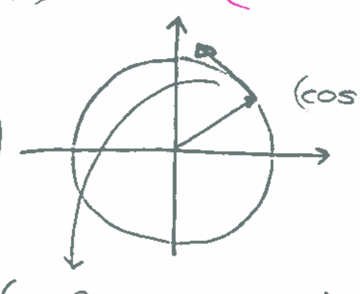
b) cirkeln

$C: \mathbb{r} = \mathbb{r}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

har tangent vektorn

i ngn pkt

$\mathbb{r}(\varphi_0): \mathbb{r}'(\varphi_0) = (-\sin\varphi_0, \cos\varphi_0)$



KOLLA

$\mathbb{r}'(\varphi_0) \underset{\text{vinkel rät}}{\perp} \mathbb{r}(\varphi_0)$

$(\mathbb{r}'(\varphi_0) \cdot \mathbb{r}(\varphi_0) = 0)$

c) skruvlinjen

$C: \mathbb{r} = \mathbb{r}(t) = (\overset{x}{\cos t}, \overset{y}{\sin t}, \overset{z}{t})$ har tangent vektorn

i $\mathbb{r}(t_0): \mathbb{r}'(t_0) = (-\sin t_0, \cos t_0, 1)$

konstant stignings hastighet

ANM.

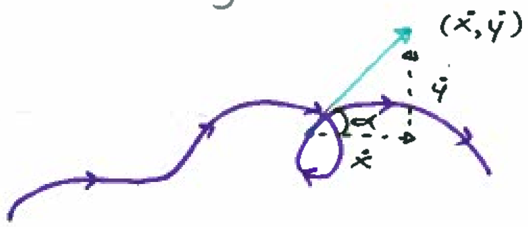
a) om t är tiden, då är $\mathbf{r}'(t)$ "hastighetsvektorn" (skrives gärna $\dot{\mathbf{r}}(t)$) : då en partikel genomlöper

kurvan C så anger $|\dot{\mathbf{r}}(t_0)|$ farten
banan
och $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ riktningen av partikeln vid tiden t_0.

i pkt'n $\mathbf{r}(t_0)$

b) för en kurva $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ i $\mathbb{R}^2$ med $\dot{x}(t_0) \neq 0$ har tangenten riktningskoefficienten

$$\tan \alpha = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} ;$$



om C lokalt kring punkten $\mathbf{r}(t_0)$ är en funktionskurva $y = f(x)$ så fås detta formellt (KEDJEREGELN)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \qquad (\text{i } t_0)$$

c) för en funktionskurva $y = f(x)$ dvs $G_f : \mathbf{r} = \mathbf{r}(x) = (x, f(x))$

är $\mathbf{r}'(x) = (1, f'(x))$ ger $\tan \alpha = \dfrac{f'(x)}{1}$

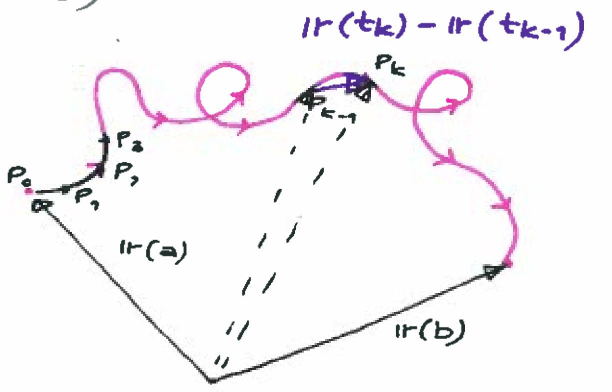
riktnings-
koefficient

längden av kurvor (P.B. 7.4) utförlig motivering:

$C: \mathbb{r} = \mathbb{r}(t) \quad a \xrightarrow{t} b$ $\quad$ tänker vi $(a < b)$ nu.

absolut i $\mathbb{R}^n$!

kurva i $\mathbb{R}^n$:



(längden av sträckorna!)

sönderdela $[a,b]$:

$$\underbrace{a = t_0 < t_1 < t_2 \ldots\ldots < t_n = b}$$

ger punkterna $P_k = \mathbb{r}(t_k)$ $(k = 0 \ldots n)$ på kurvan C.

POLYGONDRAGET

$P_0 P_1 \ldots P_n$ har längden $\sum_{k=1}^{n} |\overrightarrow{P_{k-1}P_k}|$

båglängden

$$\int_C ds \leftarrow \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} |\overrightarrow{P_{k-1}P_k}| = \sum_{k=1}^{n} |\mathbb{r}(t_k) - \mathbb{r}(t_{k-1})|$$

(*)

integral av längd av bågelement

totala längd från $a \longrightarrow b$

$$\approx \sum_{k=1}^{n} |\mathbb{r}'(T_k)| \Delta t_k \xrightarrow[\max \Delta t_k \to 0]{då} \int_a^b |\mathbb{r}'(t)| \, dt$$

$(T_k \in [t_{k-1}, t_k])$

där $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$

ännu en Riemann summa

Riemannsumma med gränsvärde om $\mathbb{r}'(t)$ är kontinuerlig

motivation av (*):

$$\mathbb{r}(t_k) - \mathbb{r}(t_{k-1}) = (x(t_k) - x(t_{k-1}), y(t_k) - y(t_{k-1}), z(t_k) - z(t_{k-1})$$

MVS

Tao's behöver ej vara samma

$$= (x'(T_{1k})\Delta t_k, y'(T_{2k})\Delta t_k, z'(T_{3k})\Delta t_k \ldots)$$

$$= (x'(T_{1k}), y'(T_{2k}) \ldots) \Delta t_k$$

$T_{1k}, T_{2k} \ldots \in]x_{k-1}, x_k[$

$$\approx (x'(T_k), y'(T_k), z'(T_k) \ldots) \Delta t_k \quad \text{för ngt } T_k \in [t_k \ldots t_k]$$

motiv...

DEF. om $C : \mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$, $a \xrightarrow{t} b$ $a < b$

är en C^1-kurva i $\mathbb{R}^n$ så kallar vi talet

$$L = \int_C ds = \left| \int_a^b |\mathbb{r}'(t)|\, dt \right|$$ för **LÄNGDEN** av kurvan C.

och $ds = |\mathbb{r}'(t)dt|$ kallas kurvans **BÅGLÄNGDSELEMENT**

beloppet behövs bara om $b<a$ och om vi vill ha ett geometriskt längdmått (l.e.)

SATS.

definitionen är vettig (dvs talet ℓ är ober. av C's parametrisering)

meningsfull

Bevis. helt enkelt variabelsubs. i integralen

$$\mathbb{r} = \begin{cases} \mathbb{r}_1(t) & a \xrightarrow{t} b \\ \mathbb{r}_2(v) & \alpha \xrightarrow{v} \beta \end{cases}$$

låt $g : [a, b] \longrightarrow [\alpha ; \beta]$

$t \longmapsto g(t) = v$

g injektiv $\quad g'(t)dt = dv$

C^1 $(g' \geq 0)$

som ju är v egentligen

$$\mathbb{r}_1(t) = \mathbb{r}_2(\underbrace{g(t)}) = (x_2\, g(t)), y_2\, g(t)), \ldots)$$

$g(t) \cdot g'(t) = v$. ? byt tillbak.

$$\mathbb{r}_1'(t) = (x_2'(g(t))g'(t), y_2'(g(t))g'(t) \ldots) = (x_2', y_2' \ldots)\, g'(t)$$

what about $g(t)$

ALLTSÅ:

$$L = \int_a^b |\mathbb{r}_1'(t)|\, dt = \int_a^b |\mathbb{r}_2'(t)|\, g'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta |\mathbb{r}_2'(v)|\, dv$$

V.S.V.

byter tillbaka liksom

ANM.

1) beteckningen $\int_C ds$ är utmärkt :

"parametri koordinater" säger : $\Delta S_k = |\overrightarrow{P_{k-1} P_k}|$ summeras upp längs C!

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \xrightarrow[\max \Delta S_k \to 0]{} \int_C ds$$

$$\Delta t_k \longrightarrow 0$$

litet s

2) s är en viktig storhet (sträcka, streck, stretch) för $t \geq 0$ (tiden) är

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbb{r}}(t)|\, dt$$ = längden av den under t tidsenheter tillryggalagda vägen.

från $\mathbb{r}(0)$ till $\mathbb{r}(t)$ på kurvan.

alltså

$$\frac{d}{ds} s = \dot{s} = |\dot{\mathbb{r}}|$$ s en primitiv fkt till $|\dot{\mathbb{r}}|$

(helt ok : $ds = |\dot{\mathbb{r}}| dt$)

s kallas därför för den naturliga koordinaten / parametern för C (båglängd)

TÄNKA SIG. VAD HÄNDE HÄR 

exempel.

a) cirkeln $x^2+y^2=R^2$ dvs $C: \mathbb{r} = \mathbb{r}(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ x och y koordinater i cirkeln, $0 \xrightarrow{\varphi} 2\pi$

$\mathbb{r}'(\varphi) = R(-\sin\varphi, \cos\varphi)$

$|\mathbb{r}'(\varphi)| = R\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = R$

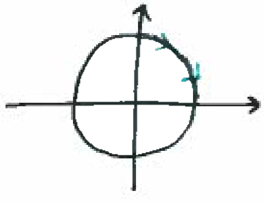
alltså har C längden $L = \int_0^{2\pi} |\mathbb{r}'(\varphi)|\,d\varphi =$

$\int_0^{2\pi} R\,d\varphi = 2\pi R$

eller med parametriseringen

$L = 4 \cdot$ längd av cirkelbågen

p.g.a symmetri



$C: \begin{cases} x = x \\ y = \sqrt{R^2 - x^2} \end{cases}$

$\mathbb{r}(x) = (x, f(x))$

$\mathbb{r}'(x) = (1, f'(x))$

$|\mathbb{r}'(x)| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$

$= 4 \int_0^R |\mathbb{r}'(x)|\,dx$

$R^2 - x^2 + x^2 = R^2$ sen $\sqrt{R^2} = R$

$= 4 \int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx = 4 \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{4R}{R} \int_0^R \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}}_{\text{tar ut R härifrån}}}\,dx$

generaliserad i $x = R$!!!

$= 4R\left[\arcsin\frac{x}{R}\right]_0^R = 4 \cdot R \cdot \frac{\pi}{2}$

b) ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dvs. $C: \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$ $\quad 0 \xrightarrow{\varphi} 2\pi$

$r'(\varphi) = (-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$

har längden

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\, d\varphi$$

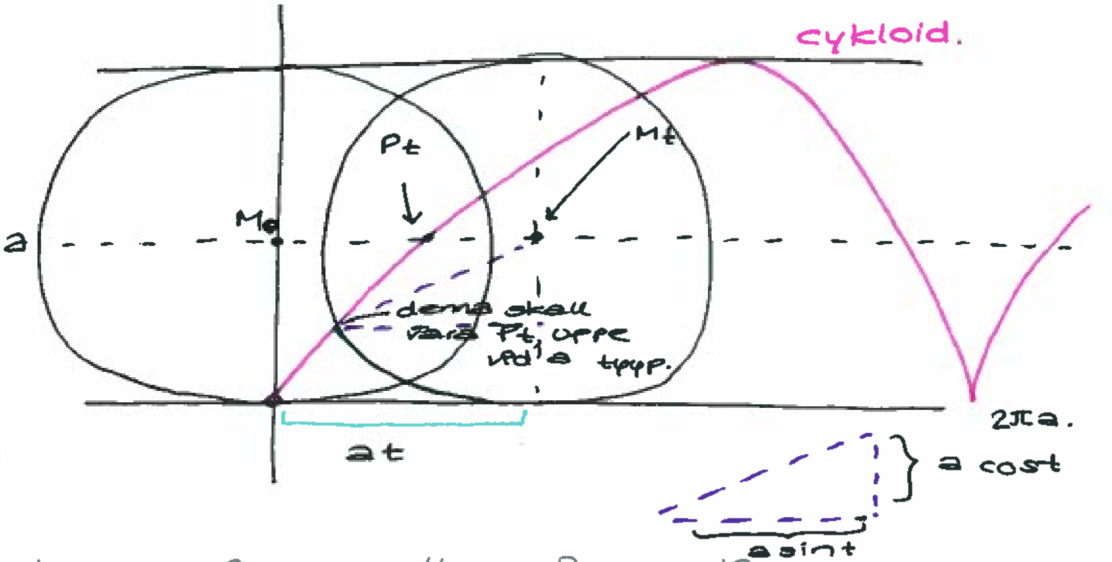
"elliptisk integral"

icke elementär!

NYA INTRESSANTA KURVOR:

ex: en cirkel rullar på en linje ⇒ cykloid

på utsidan } av en annan cirkel } epicykloid
på insidan } av en annan cirkel } hypocykloid



cirkel m. radie a rullar på en linje
en periferi rör sig då längs

$C: \begin{cases} y = a - a\cos t \\ x = at - a\sin t \end{cases}$ motsatt dvs cost vid y sint vid x

med i x skiljer dem åt.

$0 \xrightarrow{t} 2\pi$

M_t = cirkels mittpkt vid tiden t

$M_0 = (0, a)$

$P_0 = (0, 0)$

$r(t) = (at - a\sin t, a - a\cos t)$

P_t = punkten vid tiden t

trokoid (hjulformad) trocnos = hjul

$\underbrace{\text{brachisto}}_{\text{kortaste}}\underbrace{\text{chrom}}_{\text{tiden}}$ - problemet

vertikalt plan
homogent grav. fält

$L = ?$

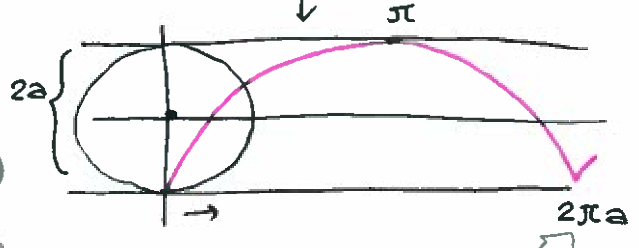
kortaste

091008

ex. cykloid :

$$C : \begin{cases} x = at - a\sin t \\ y = a - a\cos t \end{cases} \quad 0 \xrightarrow{t} 2\pi$$

$y = y(x)$ just här störst fart



just här är fart roll

$\mathbb{r}(t) = a(t - \sin t,\ 1 - \cos t)$

$\mathbb{r}'(t) = a(1 - \cos t, \sin t)$

$|\mathbb{r}'(t)| = a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}$

båglängdselementet $= a\sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t}$

fart också? $= a\sqrt{2 - 2\cos t} = a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} = \boxed{2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$

THE SWITCH KOLLA UPP!

"farten vid tiden t" :

$|\mathbb{r}'(t)| = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 0$ i $(0,0)$ $(2\pi a, 0)$ ...

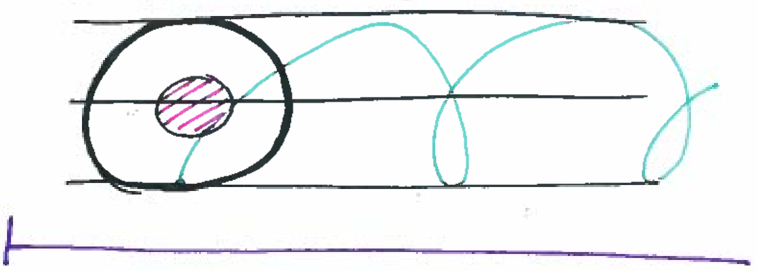
riktningskoefficient $\tan\alpha = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}$
$(x' = 0!)$

$$= \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \cot\frac{t}{2} = 0$$

HELT OBEROENDE AV RADIEN

i pkt $(a\pi, \pi)$

HÄR ÄR FARTEN STÖRST!



längden av C (en båge)

$$L = \int_a^b \|r'(t)\|\,dt = 2a \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin \frac{t}{2}}_{\geq 0 \text{ för } 0 \leq t \leq 2\pi} = 2a\left[-2\cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} \boxed{= 8a}$$

AREAN UNDER EN CYKLOID BÅGE.

$$A = \int_0^{2\pi a} y(x)\,dx = \left[\begin{array}{ll} x = a(t - \sin t) & \text{då är } y = a(1-\cos t)!!! \\ dx = a(1-\cos t)\,dt & \text{dessa parametrar ger bästa subs.} \end{array}\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t - 2\cos t)\,dt$$

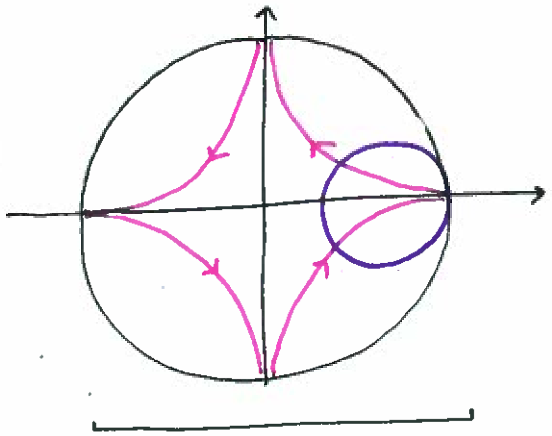
$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 2t}{2} - \cos 2t\right) dt = a^2\left[\frac{3}{2} + \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

AREAN $= 3a^2\pi$ — 3ggr arean av rullande skiva ex. asteroid : hypocykloid /formad.

en cirkel med radien $\frac{a}{4}$ rullar (utan att glida) på insidan av en cirkel med radien a. en periferi pkt rör sig då längs

back to normal

$$C: \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \qquad 0 \xrightarrow{t} 2\pi$$



längden:

$$\mathbf{r}(t) = a(\underbrace{\cos^3 t}_{x}, \underbrace{\sin^3 t}_{y})$$

$$\mathbf{r}'(t) = a(-3\cos^2 t \cdot \sin t, 3\sin^2 t\cos t)$$

$$L = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t}\, dt}_{\text{dvs båglängds-elementet.}}$$

to be continued ... HERE!!!

pga symmetri.

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos t}_{\geq 0}\underbrace{\sin t}_{\geq 0}\sqrt{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}}\, dt$$

då $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$\cos 2t = 2\cos t\sin t$

$$= 12a\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

själva: arean innanför asteroiden

$$4\int_0^{a} \underbrace{y(x)dx}_{\text{värdet för fkt}} = \left[\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \ldots \\ y = a\sin^3 t \ldots \end{array}\right]$$

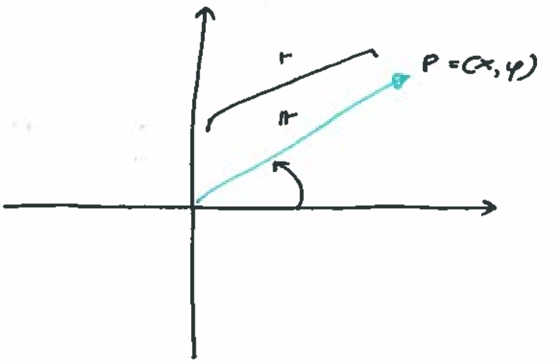
$$\frac{dx}{dt} = a(-\cos^2 t \cdot \sin t)$$

$$4\int_0^a a\sin^3 t \cdot (-a\cos^2 t \cdot \sin t\, dt$$

$$= -4a^2\int_0^a \sin^4 t\cos^2 t\, dt$$

punkter, kurvor, områden i $\mathbb{R}^2$ kan beskrivas (bra!) även med POLÄRA KOORDINATER:

Låt $P = (x, y)$ vara en pkt



ortsvektorn $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ ges av

$\underbrace{\text{längd}}_{r = |\mathbf{r}|}$ och $\underbrace{\text{riktning}}$

φ = vinkeln mellan $\mathbf{r}$ och positiva x-axeln,

$0 \leq \varphi < 2\pi$

sambandet mellan polära koordinater r, φ och kartesiska koordinater $x\, y$ är

KARTESISKA — POLÄRA

$x = r\cos\varphi$ $\longleftrightarrow$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ LÄNGD AV VEKTOR $\vec{r}$

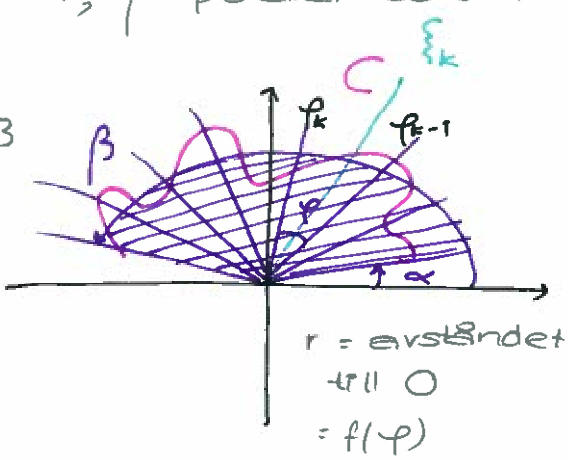
$y = r\sin\varphi$ — $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ I guess, VINKELN

för $x \neq 0$

LÄGG PÅ MINNET

kurva "på polärform": r, φ polära koordinater

$C : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{OBS: skalär}}}{r} = f(\varphi) \quad \alpha \xrightarrow{\varphi} \beta$



r = avståndet till O $= f(\varphi)$

arean av området

$$D = \begin{cases} 0 \leq r \leq f(\varphi) \\ \alpha \leq \varphi \leq \beta \end{cases}$$

D approximeras av cirkelsegment med radien ξ_k och vinkel $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$

sönderdela $[\alpha, \beta]$

$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 \ldots < \varphi_n = \beta$

välj $\xi_k \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]$

arean av D approximeras av

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(\xi_k)\right)^2 \Delta\varphi_k \xrightarrow[\text{då } \max \Delta\varphi_k \to 0]{} \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left(f(\varphi)\right)^2 d\varphi$$

Riemann summor med gränsvärdet om f kont.

arean av D: $0 \le r \le r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ $\quad m(D) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r(\varphi))^2 d\varphi$

exempel på "kurvor på polär form" (r, φ polära koord.)

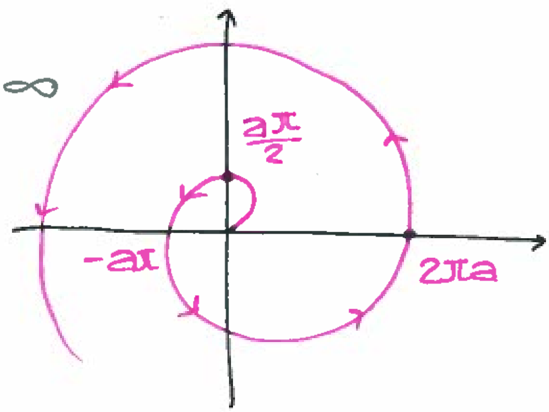
1) cirkel (kring 0) $r = r(\varphi) = R$ konstant!

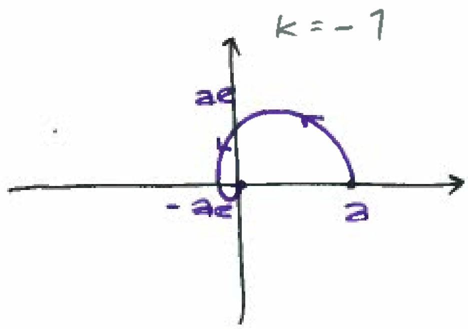
2) spiraler

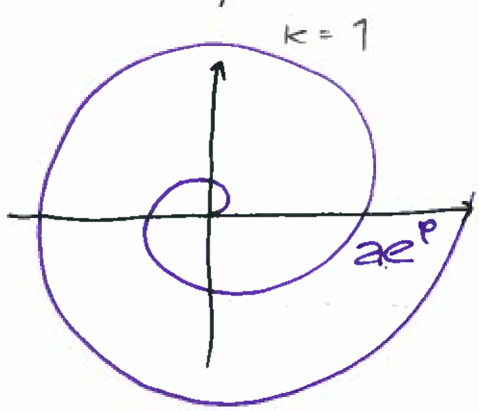
a) Arkimedes spiral $r = a\varphi$ $\quad 0 \xrightarrow{\varphi} \infty$

b) logaritmisk spiral

$r = ae^{k\varphi}$ $\quad 0 \xrightarrow{\varphi} \infty$







c) hyperbolisk spiral : $\overset{f(\varphi)}{r} = \dfrac{a}{\varphi}$

$$0_+ \xrightarrow{\varphi} \infty$$

$$r(\varphi) \longrightarrow ?$$

då $\varphi \longrightarrow 0^+$

$\boxed{x = f(\varphi)\cos\varphi}$

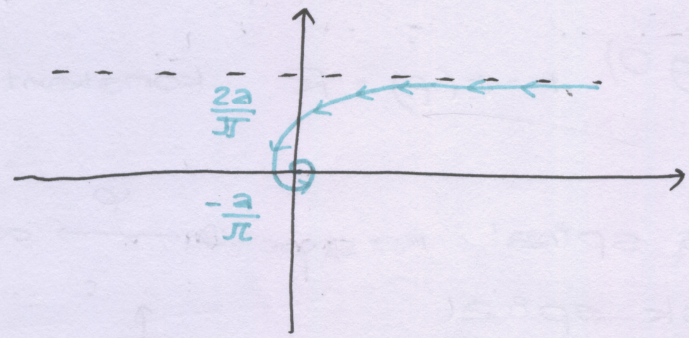
$$\frac{a\cos\varphi}{\varphi} \longrightarrow \infty$$

då $\varphi \longrightarrow 0^+$

$y = f(\varphi)\sin\varphi$

$$\frac{a\sin\varphi}{\varphi} \longrightarrow a$$

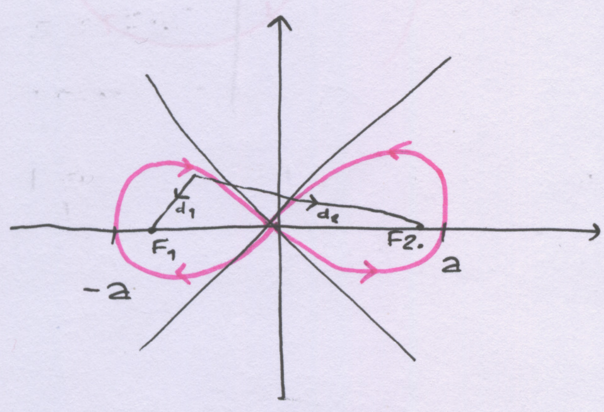
då $\varphi \longrightarrow 0^+$



3) Lemniskata (prydd med band)

$$C : r = a\sqrt{\cos 2\varphi} \; : \; D_r = \{\varphi : \cos 2\varphi \geq 0\}$$

$$= \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$



$d_1 d_2 = c^2$ konstant.

karaktäriseringar : C = alla pkt sådana att produkten av avstånden till 2 pkt F_1, F_2 är konstant

$$|\overrightarrow{F_1P}| \cdot |\overrightarrow{F_2P}| = \frac{a^2}{2} \quad \left(F_1F_2 \cdot \pm \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

eller :

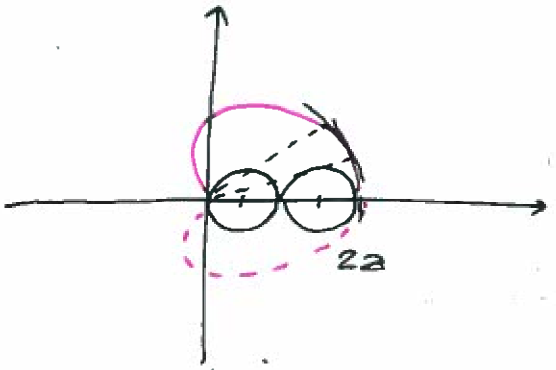
C = Cassini-kurva till hyperbeln :

[= skärningspkt mellan tangenten till hyperbeln och normalen på dessa till origo]

4) kardioid (hjärtformad)

$C: r = a(1 + \cos\varphi)$.

epicykloid : en cirkel m. radie $\frac{a}{2}$ rullar på utsidan av en cirkel med radie $\frac{a}{2}$, en periferipkt rör sig då längs C.



$r(-\varphi) = r(\varphi)$

normal till any tangent alltid till origo.

karaktäriseringar :

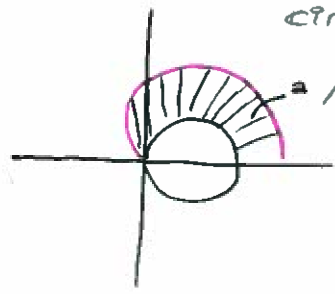
Cassini-kurva

konchoid (Pascals snäcka)

P sådana

$|\overrightarrow{OP}| = |OM| \pm a$

dvs rund cirkel & lägg till /dra ifrån

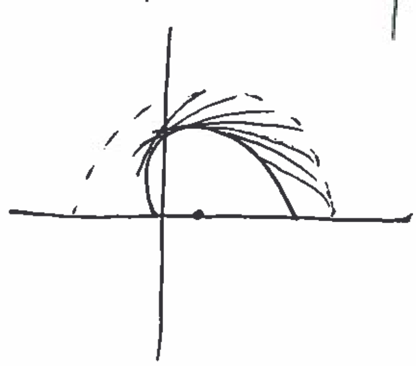


kaustika ("brännbart")

strålar som reflekteras i cirkeln.

$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2$

tangerar C



$$C : \mathbb{r} = \overbrace{\mathbb{r}(t)} \quad \overbrace{a} \xrightarrow{t} \overbrace{b}$$

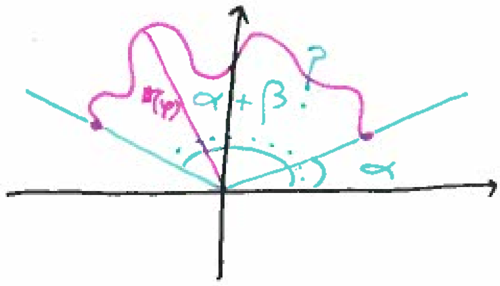
längd: $\displaystyle\int_C ds = \int_a^b |\mathbb{r}'(t)|\,dt$

på polärform:

$$C : \mathbb{r} = \overbrace{\mathbb{r}(\varphi)} \quad \alpha \xrightarrow{\overbrace{\varphi}} \overbrace{\beta}$$

r, φ polära koordinater

$$C : \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$



$$\mathbb{r}'(\varphi) = \big(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi,\ r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi\big)$$

alltså $ds = |\mathbb{r}'(\varphi)|\,d\varphi = \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2}\,d\varphi$

då polära: $\boxed{ds = \sqrt{(r')^2 + r^2}\,d\varphi}$

blir så efter massa förenklingar

exempel

① cirkel $r = R$ (konstant) $r(\varphi) = R$ $\quad r, \varphi$ polära koordinater

$$ds = \sqrt{r^2 + 0}\,d\varphi = R\,d\varphi$$

alltså längden av cirkeln

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{R\,d\varphi}_{\text{båglängdselement}} = 2\pi R$$

(2) längden av kardioiden

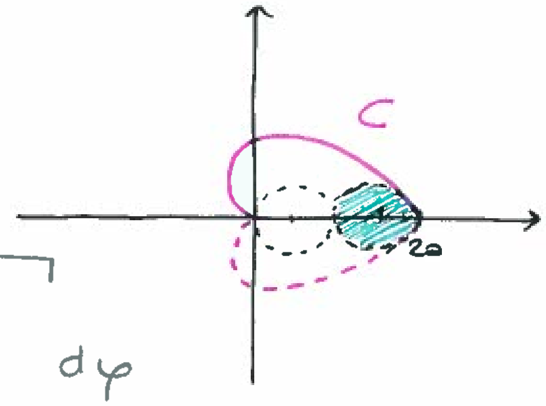
$C: r = a(1+\cos\varphi) \quad 0 \xrightarrow{\varphi} 2\pi$

π VART DÅ

$$\int_C ds = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi$$

pga symmetri "övre delen"

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2}\, d\varphi$$



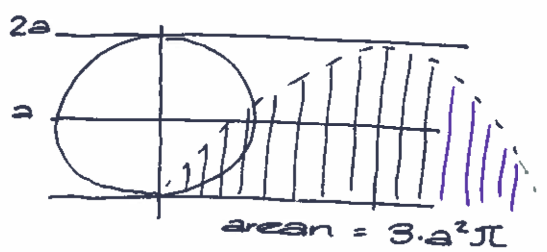
$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 4a\int_0^{\pi} \underbrace{\cos\frac{\varphi}{2}}_{\geq 0 \text{ då } 0\leq\varphi\leq\pi}$$

BELOPPET av

$$= 8a\left[\sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi} = 8a$$

(lika lång som cykloiden)



EXEMPEL PÅ AREAN.

a) arean av området innanför kardioiden

arean av D : $\begin{cases} 0 \leq r \leq r(\varphi) \\ \alpha \leq \varphi \leq \beta \end{cases}$

dvs

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\varphi$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\, d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} + 2\sin\varphi\right]_0^{2\pi} = \boxed{\frac{3a^2\pi}{2}}$$

$1 + \cos^2\varphi + 2\cos\varphi$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$

= 6 × arean av den rullande cirkelskivan

b) arean innanför lemniskatan

$r = a\sqrt{\cos^2\varphi}$ $\qquad -\frac{\pi}{4} \xrightarrow{\varphi} \frac{\pi}{4}$

(högra öglan) $\longrightarrow$ sym.

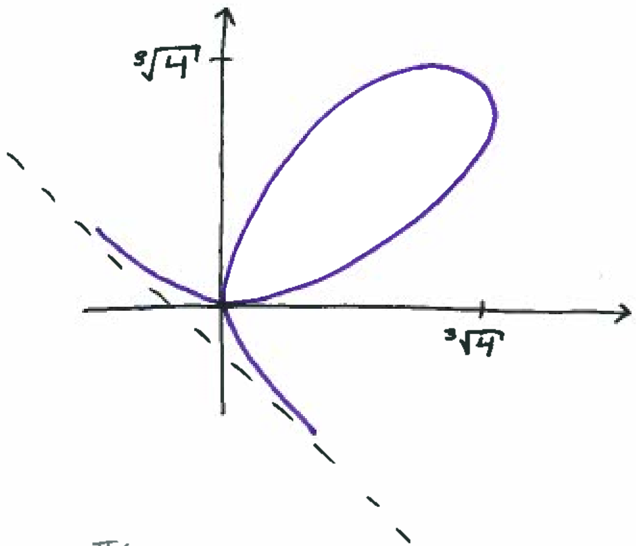
$$= 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \underbrace{\cos 2\varphi}_{\text{jämn}}\, d\varphi = 4a^2\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{a^2}$$

c) arean innanför Descartes ögla blad (fortum Cartesii)

$$C: r = \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} \qquad 0 \xrightarrow{\varphi} \frac{\pi}{2}$$

eller i

$$\left[\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\[2ex] y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}\right]$$



arean är

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{9\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}\, d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\varphi}{1+\tan^3\varphi}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{9}{2}\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\tan^3\varphi}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}\left(+\frac{1}{1+0} - \lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\underbrace{1+\tan^3\varphi}_{\text{mot } \infty}}\right)$$

om g.v existerar ej

$$= \frac{3}{2}(1-0) = \boxed{\frac{3}{2}}$$

kurvor kan anges "implikat"

CIRKEL $x^2 + y^2 = a^2$

ASTEROID $x^{2/5} + y^{2/5} = a^2$

LEMNISKATA $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

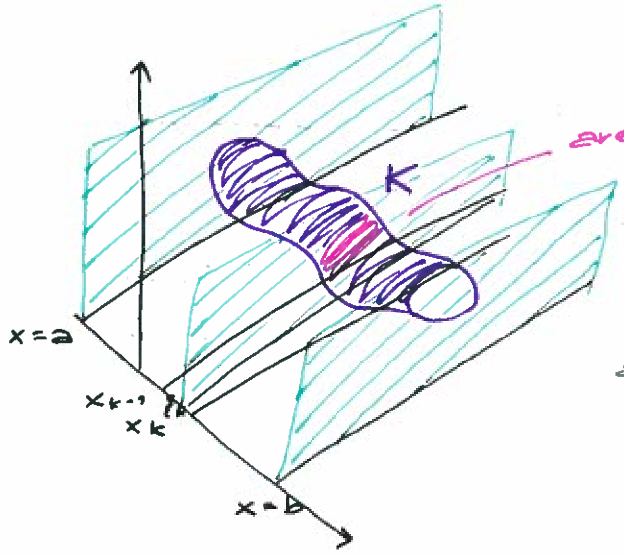
KARDIOID $(x^2 + y^2 - ax) = a^2(x^2 + y^2)$

DESCARTES $x^3 + y^3 = 3xy$

ny tillämpning av integral:

volym av rotationskroppar
arean av rotationsytor

(1) skivformeln: en kropp $K \subseteq \mathbb{R}^3$ begränsas av planen $x=a$ och $x=b$ ($\perp$ xyplanet)



för varje $x_0 \in [a,b]$ är $A(x_0)$ = arean av tvärsnittsytan $K \cap \{\text{planet } x=x_0\}$

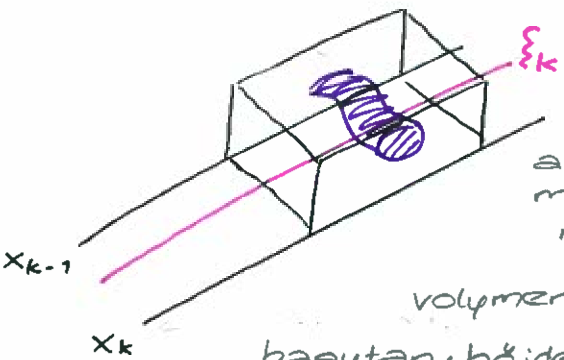
volymen av K approximeras nu så här

sönderdela $[a,b]$: $a = x_0 \leq x_1 < \ldots < x_n = b$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

välj $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

"volymen av denna skiva" är $\approx A(\xi_k)\Delta x_k$



approximeras med skivan med "rak rand"

volymen:

$$\underbrace{\text{basytan}}_{A(\xi_k)} \cdot \underbrace{\text{höjden}}_{\Delta x_k}$$

volymen av K approximeras då av

$$\sum_{k=1}^{n} A(\xi_k)\Delta x_k \xrightarrow[\max \Delta x_k \to 0]{} \int_a^b A(x)\,dx$$

Riemannsummor med gränsvärde

Def.

$K \subseteq \mathbb{R}^3$ en kropp mellan $x = a$ och $x = b$,

$A(x_0)$ = arean av tvärsnittsytan $K \cap \{\text{planet } x = x_0\}$

då är   dvs. integralen av tvärsnittsarean.

$$m(K) = \int_a^b A(x)\,dx$$ VOLYMEN av K.

kroppar för vilka vi kan beräkna enkelt $A(x)$:

(2.) volymen av rotationskroppar :

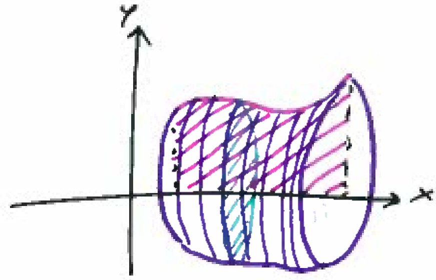
roterar   då $D = \{x, y\} \cdot a \le x \le b$

$0 \le y \le f(x)$

a) kring x-axeln

b) kring x-axeln

så alstras en "rotations-kropp K"



a) volymen av K vid rotation kring x-axeln

tvärsnittsarean $A(x_0)$ är arean av cirkel-skivan med radien $f(x_0) = \pi(f(x_0))^2$

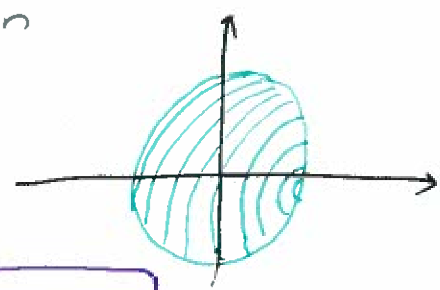
alltså K's volym $m(K) = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx = \boxed{\pi \int_a^b (y(x))^2\,dx}$

ex.

volymen av klotet $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$: K fås då cirkelskivan $D: x^2 + y^2 \le R^2,\ y \ge 0$ roterar kring x-axeln

in här

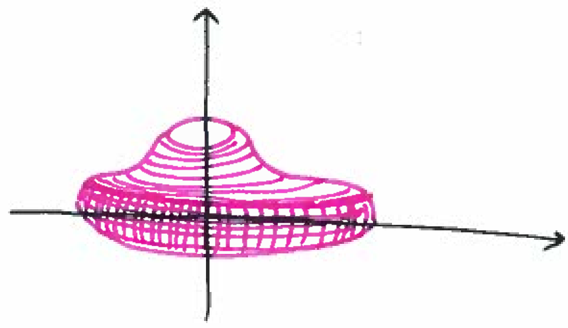
$$m(K) = \pi \int_{-R}^{R} y^2\,dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx$$



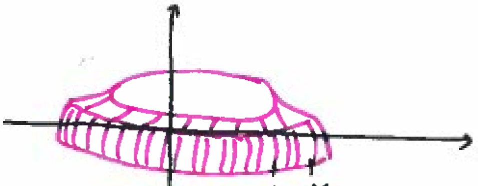
$$= \underbrace{2\pi}_{} \left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^R = 2\pi\,\frac{2R^3}{3} = \boxed{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

$2 \times \int_0^R$ ist. för $\int_{-R}^{R}$ (1 om R) volymen av K vid rotation kring y-axeln

K approximeras av hålcylindrar



förstoring:



hålcylindern för $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ approximeras med "rak rand";

$\}$ höjd $f(\xi_k)$

$$\overbrace{\pi x_k^2 \cdot f(\xi_k)}^{\text{hela yttercylinder}} - \underbrace{\pi x_{k-1}^2 \cdot f(\xi_k)}_{\text{inre (mindre) cylinder}}$$

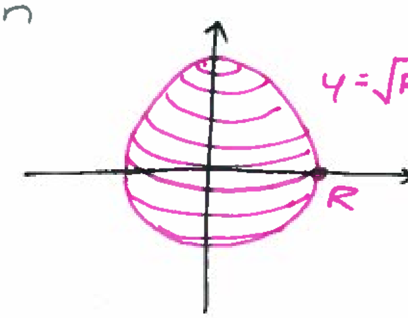
$$= \pi f(\xi_k)(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^{n} \pi f(\xi_k)\underbrace{(x_k + x_{k-1})}_{\text{mot } 2x}\Delta x_k \xrightarrow[\max \Delta x_k \to 0]{} \int_a^b \pi f(x) \cdot 2x\,dx$$

$$= \boxed{2\pi \int_a^b x \cdot y\,dx}$$

ex. volymen av klotet $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$: K fås då cirkelskivan $D: x^2+y^2 \leq R^2$ $x \geq 0$ roterar kring y-axeln

$$m(K) = 2 \cdot 2\pi \int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$



$$= 4\pi \left[-\frac{1}{3}(R^2-x^2)^{3/2} \right]_0^R$$

$$= 4\pi \left(-0 + \frac{R^3}{3} \right) = \boxed{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

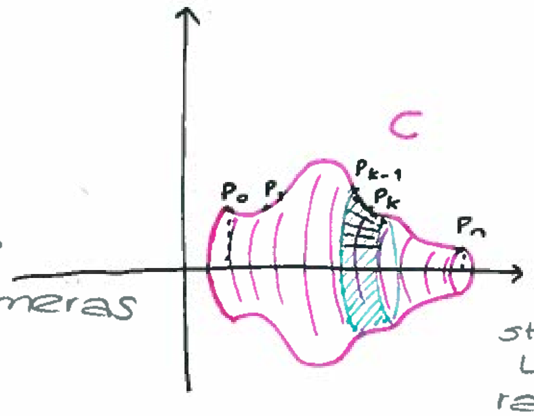
SJÄLVA: cykloidbågen roterar kring x-axeln och y-axeln. volymen?

(rotationsytor - deras area)

KURVAN $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $a \leq t \leq b$ roterar

a) kring x-axeln

b) kring y-axeln



då alstras en rotationsyta S; dess area approximeras (igen) så här:

a) x-axeln : sönderdela $[a,b]$: $a = t_0 < t_1 < \ldots t_n = b$

b) (helt analogt) ger pkt'na $P_k = \mathbf{r}(t_k)$ $(k = 0, 1 \ldots n)$ på C

S approximeras med mantelytan av stympade konen,

arean är $\frac{2\pi(r+R)}{2} s$

totala arean:

$$\sum_{k=1}^{n} \pi \cdot (y(t_{k-1}) + y(t_k)) |\overrightarrow{P_{k-1} P_k}| =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \pi (y(t_{k-1}) + y(t_k)) \Delta s_k \xrightarrow{\max \Delta s_k \to 0} \int_C \pi\, 2 \cdot y \, ds$$

"Riemannsumma, om C är en C^1 kurva" automatiskt kont.

$$= 2\pi \int_a^b y(t) |\mathbf{r}'(t)| \, dt$$

C roterar (D mellan C och x-axeln) roterar:

rotationskroppen K har volymen:

$m(K) = \pi \int_a^b y^2 dx$ $(y \geq 0)$ kring x-axeln

$m(K) = 2\pi \int_a^b x y \, dx$ $(x \geq 0)$ kring y-axeln

rotationsytan S har arean:

$m(S) = 2\pi \int_C y \, ds$ $(y \geq 0)$ kring x-axeln

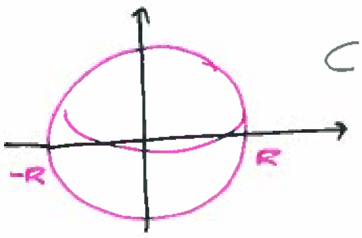
$m(S) = 2\pi \int x \, ds$ $(x \geq 0)$ kring y-axeln

a) sfären $x^2+y^2+z^2=R^2$ uppstår då

övre halvcirkeln $C: x^2+y^2=R^2 \quad y \geq 0$

roterar kring x-axeln.

arean är: $\quad 2\pi \int_C y \underbrace{ds}_{\substack{\text{är ju} \\ |r'(\varphi)|}} = 2\pi \int_0^{\pi} R\sin\varphi \, R\, d\varphi$



$C: \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

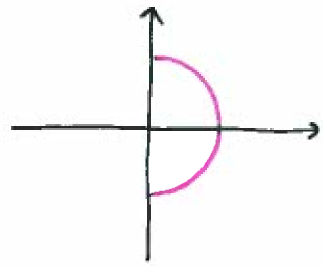
$ds = R\,d\varphi$

$= 2\pi R^2 \Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi}$

$= \boxed{4\pi R^2}$

eller halvcirkeln

$C: \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$



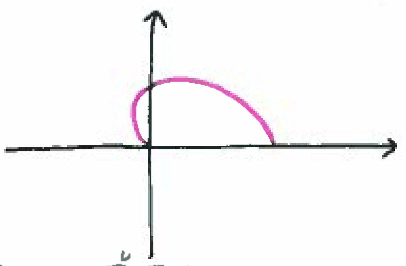
roterar kring y-axeln, arean är då

$m(S) = 2\pi \int_C x\,ds = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{R\cos\varphi}_{\text{jämn}} \, R\,d\varphi = 4\pi R^2 \Big[\sin\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \boxed{4\pi R^2}$

b) då övre kardioidbågen

$r = a(1+\cos\varphi) \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \qquad$ (r, φ polära koordinater)



i POLÄRA

roterar kring x-axeln

uppstår en $\qquad$ (1 varv!!)

rotationsyta med

arean $\quad 2\pi \int_C y\,ds = 2\pi \int_0^{\pi} \underbrace{a(1+\cos\varphi)\cdot\sin\varphi}_{y} \cdot \underbrace{a\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi}_{ds}$

$ds = \sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$

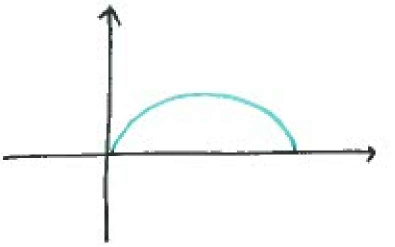
$= \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 (-a\sin\varphi)^2}\,d\varphi$

$= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \sqrt{2}(1+\cos\varphi)^{3/2} \sin\varphi\,d\varphi$

$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \Big[\frac{2}{5}(1+\cos\varphi)^{3/2}\Big]_0^{\pi} = 4\sqrt{2}\pi a^2 (2^{5/2}) = \boxed{\frac{32\pi a^2}{5}}$

c) beräkna arean av den rotationsyta som uppstår då cykloidbågen

$$C: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$



roterar kring x-axeln
kring y-axeln (DO IT) lösn. på hemsidan

INTEGRALER vars integrand innehåller sin - cos - tan :

om man INTE kommer på ngt, så finns $\tan\frac{x}{2}$ - substitution. skriv om alla till halva vinklar !!

$\tan\frac{x}{2} = t \qquad \frac{dt}{dx} = \left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$

$\longrightarrow \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} \;\Big]\text{ är ju delat m. 1 !!} \qquad = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{2t^2}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

INTEGRALER m. rationella fkt i t.

ex.

$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx = \left[t = \tan\frac{x}{2}\right] = \int \frac{1}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{1+t^2+t}\,dt = \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dt = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1}\,dt$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{= \frac{2}{\quad}\arctan\frac{2\cdot\tan\frac{x}{2}+1}{\quad}}$$

P.B. 1.4.5. vi tar bara upp ∠ problem som ger "fakultet" och "binomialtal" (onsd)

(1) på hur många sätt kan 4 pers sätta sig på 6 stolar?

	1	2	3	4	5	6	TOT. antal möjligh.
	□	□	□	□	□	□	

DVS.

$6\cdot5\cdot4\cdot3$

$= 360$

1a pers : 6 olika sätt — 6

2a pers : 5 olika sätt (oberoende av vart person 1 sitter) — $6\cdot5$

3e pers : 4 olika sätt (ober. av pers 1,2) — $6\cdot5\cdot4$

4e pers : 3 olika sätt — $6\cdot5\cdot4\cdot3$

SATS 1 $m,n \in \mathbb{N}$, $m \le n$

det finns $n\cdot(n-1)(n-2)\ldots(n+m+1)$ olika möjligheter att välja m element ur en mängd med n element, då man tar hänsyn till ordningen.

(2) hur många 7-manna lag kan man bilda med 12 spelare (olika laguppställn. räknas som olika lag)

SVAR: $\underbrace{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}_{7 \text{ faktorer}}$ (3 999 680)

VIKTIGT SPECIALFALL $n=m$

5 pers kan sätta sig på 5 stolar på $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ olika sätt (120) ("bordsplacering")

DEF. $n \in \mathbb{N}$

$1\cdot2\cdot3\ldots\cdot n = n!$ kallas "n FAKULTET"

vi sätter $0! = 1$

(faculter = möjlighet, förmåga)

en mängd med m element ($m \in \mathbb{N}$) kan skrivas upp på $m!$ olika sätt:

ex: $M = \{1,2,3\} = \{1,3,2\} = \{2,1,3\} = \{2,3,1\}$
$= \{3,1,2\} = \{3,2,1\}$ $\quad 6 = 3!$ olika sätt (utan upprepningar)

DEF.

M en mängd, en bijektion (permutera: omordna, förändra)

$p: M \longrightarrow M$ kallas PERMUTATION

[$D_p = V_p$
p är injektiv]

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ avbildas på sig själv permutation!

SATS.

till en mängd med m element ($m \in \mathbb{N}$) finns $m!$ permutationer

KOM IHÅG.

ANM. ($m \leq n$): $n \cdot (n-1)(n-2) \dots (n-m+1) =$

$$\frac{n\cdot(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-m)(n-m-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \boxed{\frac{n!}{(n-m!)}}$$

[ANM: $n! = \prod_{k=1}^{n} k$]

$n!$ växer enormt snabbt: $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+\varepsilon_n)$

(Stirling's formel) då $n \longrightarrow \infty$, $\varepsilon_n \longrightarrow 0$

091014   tentan ? Maskin-huset: på tors 08^{30}

Rep: $n! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots n$ $(n \in \mathbb{N})$

$0! = 1$

[en mängd med m element har m! permutationer ("omordningar")]

$m \leq n$:

VIKTIGT tror jag

$n\cdot(n-1) \ldots (n-m+1) = \boxed{\dfrac{n!}{(n-m)!}}$ (olika sätt att välja "m ur n" med hänsyn till ordning)

PROBLEM 2.

hur många 7-mannalag kan man bilda med 12 spelare? (om man betraktar lag som lika om samma spelare?)

SATS 2. $m, n \in \mathbb{N}$ $m \leq n$

det finns $\dfrac{n(n-1) \ldots (n-m+1)}{1\cdot 2 \ldots m} = \boxed{\dfrac{n!}{m!(n-m)!}}$ olika sätt att välja m element ur en mängd med n element då man EJ tar hänsyn till ordn.

Bevis: sätt x = sökta antalet

samma m element förekommer m! gånger; alltså

$x \cdot m! = n(n-1)(n-2) \ldots (n-m+1)$

V.S.V

DESSA TAL

$\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ är så viktiga att de får ett eget namn och en egen symbol.

DEF. $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$

talet $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ kallas "BINOMIALKOEFFICIENT" läs: "n över m"

sätter även $\binom{n}{0} = 1$ $\left(= \frac{n!}{\underbrace{0!}_{1 \text{ ju}}(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \right)$

exempel:

det finns $\binom{12}{7}$ sjumanna lag. (laguppställning oviktig)

$$\binom{12}{7} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7}} = \frac{11 \cdot 9 \cdot 8}{1} = 792$$

mindre möjligheter

RÄKNA ALLTID SÅ

börja m. nämnare sen täljare, uppifrån, lika många faktorer!!

det finns $\binom{35}{7}$ lottorader "7 ur 35"

(spelar ej roll i vilken ord man kryssar sina tal)

$$= \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 6\,724\,520$$

REGLER: $n, m \in \mathbb{N}, \quad m \le n$

SATS

1. $\binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$
3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
4. $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$

Bevis av 4.

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

vill ha samma nämnare

$$= n! \, \frac{m + n - m + 1}{m!(n-m+1)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)}{m!(n+1-m)!} = \binom{n+1}{m}$$

V.S.V.

anm.

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{(n!)^2}$$ (räkna tenta 07-08 uppgift 2 !!)

BINOMIALTEOREM:

$a, b \in \mathbb{R}$ ty $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ product kommutativ

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Bevis.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots\ldots}_{n \text{ st. faktorer}}$$

är en linjär combo' av termer $\underbrace{a^k b^{n-k}}_{n \text{ faktorer}}$

$a^k b^{n-k}$ förekommer $\binom{n}{k}$ gånger (så många gånger kan man välja faktorn a, k ggr ur de n faktorerna. och då n-k ggr faktorn b)

ordning spelar ej roll ty produkt är kommutativ.

$$= \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \ldots\ldots \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\ldots \binom{n}{n} a^b b^0$$ V.S.V

ex.

$$(a+b)^3 = bbb + \overbrace{abb + bab + bba}^{\substack{3 \text{ ggr faktor } b \\ 2 \text{ ggr}}} + \overbrace{aab + aba}$$

$$+ \underbrace{baa}_{\substack{3 \text{ ggr} \\ \text{faktor } a \\ 2 \text{ ggr}}} + aaa.$$

ANNAT BEVIS:

"induktion m.h.a. regel 4."   bäst: Taylorutveckling lp 2.

ex. a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n = ((1+1)^n !!)$ antalet delmängder

M en mängd med n element.
det finns $\binom{n}{k}$ delmängder med k element.

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

$= (1-1)^n = 0$

P.B. Appendix B

KÖP P.B. Flervariabelanalys Appendix A

NY SIDA!
i NYTT BLOCK!

OMOM.

I) SUPREMUMAXIOM

dvs ? x-riktning $\longleftrightarrow$

DEF. $M \subseteq \mathbb{R}$, $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$, vi säger:

eller lika med!!

b_0 är en MAJORANT till M om $x \leq b_0$ för alla $x \in M$
(ÖVRE GRÄNS)

eller lika med!!

b_1 är en MINORANT till M om $x \geq b_1$ för alla $x \in M$
(NEDRE GRÄNS)

ANM: a) en mängd $M \subseteq \mathbb{R}$ är begränsad UPPÅT / NEDÅT om M har en MAJORANT / MINORANT.

b) en fkt $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ är —— " ——
om V_f har en MAJORANT / MINORANT.] ett värde större/mindre än alla $y \in V_f$
I guess

med b_0 är $b > b_0$ MAJORANT men finns det en minsta MAJORANT?

AXIOM:
varje icke-tom uppåt begränsad mängd M har en minsta majorant. $M \subseteq \mathbb{R}$

DEF. om $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ är begränsad uppåt så kallas den minsta majoranten till M för SUPREMUM av M, bet.

$\boxed{\sup . M}$

Sats och def.

varje icke-tom nedåt begränsad mängd $M \subseteq \mathbb{R}$ har en största minorant, kallas **INFIMUM** av M, bet. $\boxed{\inf M}$

supremum: överst, högst, störst

infimum: nederst, högst, minst.

Bevis.

$M^* = \{-m : m \in M\}$ är uppåt begränsad,

$\underbrace{-\sup M^*}_{\text{minsta majorant.}} = \underbrace{\inf M}_{\text{största minorant.}}$!

SATS. sup, inf entydigt bestämda.

hur visar man att $b = \underbrace{\sup M}_{\text{minsta majorant.}}$?

SATS. $b_0 \in \mathbb{R}$ $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, M begränsad uppåt.

$b_0 = \sup M \iff$

(1) $x \leq b_0$ för alla $x \in M$ — eller lika med!! — (b_0 majorant till M)

2) till varje $K < b_0$ — enbart större än — finns $x_0 \in M$ med $x_0 < K$ (b_0 är minsta majorant, dvs inget $K < b_0$ är ~~är ej~~ majorant!)

ex.

a) $M = [0,3]$: $\sup M = 3$, $\inf M = 0$ t.o.m STÖRSTA / MINSTA element av M — $3 \in M$, $0 \in M$

b) $M =]0,3[$: $\sup M = 3$, $\inf M = 0$ — $3 \notin M$, $0 \notin M$

Bevis:

(1) $x \leq 3$ för alla $x \in M$

(2) till $k < 3$ finns $x_0 \in M$

t.ex. $x_0 = \frac{k+3}{2} > k$ (om $k > 0$)

om $k \leq 0$: välj $x_0 = 1$

c) $M = \{ r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2 \}$ begränsad uppåt

$\sup M = \sqrt{2}$ (kallar Bernhard så) existerar

$\sqrt{2} \notin M$ då öppna intervallet: $r < \sqrt{2}$

Sats 1. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $D_f \cap [R, \infty[\neq \emptyset$

a) för alla $R > a$ (t.ex. $D_f =]a, \infty[$)

för t.ex. $\sin x$ begr. men ej växande!

om f är växande och begränsad uppåt så existerar $\lim_{x \to \infty} f(x)$, nämligen $\lim_{x \to \infty} f(x) = \sup V_f$

ett värde y större/lika m. fkt. största värde.

Bevis:

$b_0 = \sup V_f$ existerar, ty V_f är begränsad uppåt.

skall visa: $\boxed{b_0 = \lim_{x \to \infty} f(x)}$ DVS:

till varje $\varepsilon > 0$ finns x_0 så att $|f(x) - b_0| < \varepsilon$

för $x \in D_f$, $x > x_0$.

det är ej längre majorant.

$\boxed{y_0 = f(x_0)}$

låt $\varepsilon > 0$, till $K = b_0 - \varepsilon < b_0$ finns $y_0 \in V_f$ så att $y_0 > K$

$b_0 = \sup V_f$

dvs: $f(x_0) > b_0 - \varepsilon$

nu är f växande, det ger:

för alla $x \in D_f$, $x > x_0$ gäller:

$f(x) \geq f(x_0)$, alltså MAJORANT!!

$b_0 - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq b_0 < b_0 + \varepsilon$

dvs $|f(x) - b_0| < \varepsilon$ V.S.V.

b) om f är avtagande, begränsad nedåt så existerar $\lim_{x \to \infty} f(x) = \inf V_f$ största minorant

(analogt för $x \longrightarrow -\infty$)!

EXEMPEL. (Tenta 07-01-10, uppg. 6)

a) bestäm $\underset{\text{minsta majorant}}{\underline{\underline{\sup}}} \left\{ \frac{x}{1+x},\ x \geq 0 \right\}$:

lösning: $f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ växande, begränsad uppåt

alltså $\sup \left\{ \frac{x}{1+x} : x \geq 0 \right\} = \lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) = \underbrace{1}_{\text{största värden den antar.}}$

b) bestäm $\underset{\text{största minorant.}}{\underline{\underline{\inf}}} \left\{ \frac{x}{1+x^2}\ \ x \geq 1 \right\} =$

lösning $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ begränsad nedåt (≥ 0)

$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0$ för $x > 1$ dvs.

f är avtagande,

alltså

$\inf \left\{ \frac{x}{1+x^2}\ \ x \geq 1 \right\} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + x} = 0$

ty $\frac{1}{x} + x \longrightarrow \underline{\underline{\infty}}$ då $x \longrightarrow \infty$

KOM IHÅG:

$\lim_{x \to \infty} \arctan x = \sup V_{\arctan} = \sup \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[= \frac{\pi}{2}$!!!

$\lim_{x \to -\infty} \ldots\ldots\ldots\ldots = \inf \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[= -\frac{\pi}{2}$!!!

Rep: $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ $\quad m \leq n$

TILL ORDN.

talet $\binom{n}{m}$ står i rad / kolonn m. Pascal's triangel

regeln

4. $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$

här rad $n+1$ beräknas ur rad n

sup M = minsta majoranten till M

inf M = största minoranten till M

SUPREMUMAXIOM:

$\emptyset \neq M$ uppåt begränsad $\Rightarrow$ då existerar sup M.

SATS 1.

f växande, begränsad uppåt

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \sup V_f$ existerar.

f avtagande, begränsad nedåt

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \inf V_f$ existerar.

om $D_f = \mathbb{N}$ $\quad f$ kallas då "följd"

f växande / avtagande om $f(n) \geq f(m)$ / $f(n) \leq f(m)$ för $n \geq m$

a) $\sup\left\{1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$ ty $1-\frac{1}{n}$ växer

b) $\inf\left\{1+\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ ty $1+\frac{1}{n}$ avtar

SATS 2.

Dedekind-snitt, fullständighetsaxiom:

om $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$,

sådana att $a \leq b$ för alla $a \in A$ och $b \in B$

så finns det (minst) ett x_0

sådant att $a \leq x_0 \leq b$ för alla $a \in A$, $b \in B$.

Bevis:

$\sup A = \alpha$ existerar, ty A uppåt begränsad $\leq$ varje $b \in B$

$\inf B = \beta$ .... B nedåt begränsad $\geq$ varje $a \in A$

alltså $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ för alla $a \in A$, $b \in B$

ty MINSTA majorant!! ty STÖRSTA minorant!!

ty α majorant

ty β minorant

DETTA ANVÄNDS för det mesta så här, kallas

INTERVALLINKAPSLING(SSATS)

intervallen $I_k = [a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$ satisfierar

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots\ldots \supseteq I_{k-1} \supseteq I_k \supseteq \ldots\ldots$; då gäller

det finns ett $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ (dvs $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$ snittet är ej tomt

x_0 ligger i alla I_k)

om $b_k - a_k \longrightarrow 0$ då $k \longrightarrow \infty$

så finns

PRECIS ett $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ (dvs $\{x_0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$)

$A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ $\alpha = \sup A = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ (a_k växer!!)

$B = \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ $\beta = \inf B = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$ (b_k avtar!!)

om $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k - b_k) = 0 = \lim\limits_{k\to\infty} a_k - \lim\limits_{k\to\infty} b_k$

$= \alpha - \beta$: så är $x_0 = \alpha = \beta$!!! V.S.V.

SATS 3. (S.O.M.V)

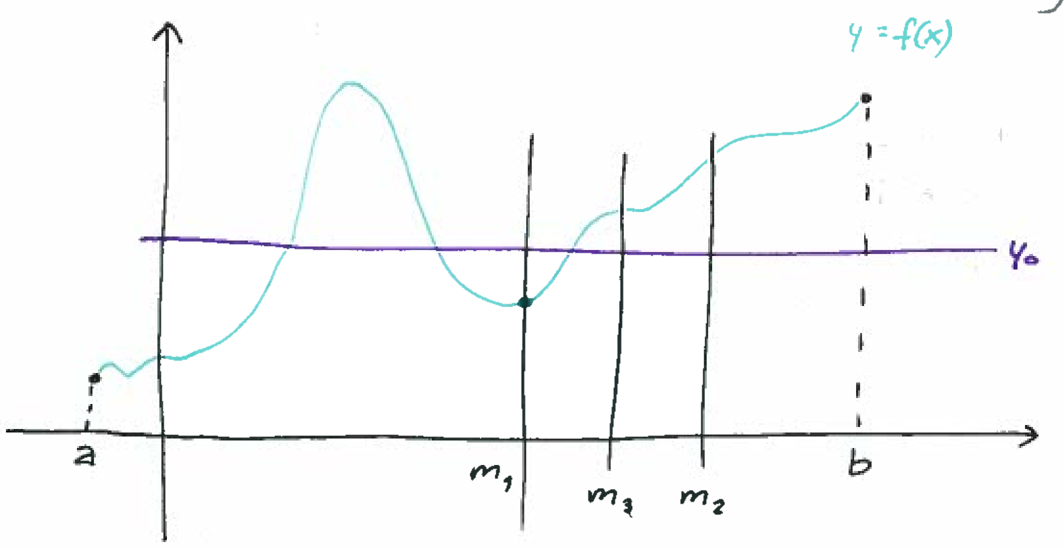
om $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ är kont. på $[a,b]$ så antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$

Bevis:

för $f(a) < f(b)$: låt $y_0 \in \left]f(a), f(b)\right[$

$(f(a) < y_0 < f(b))$: skall nu visa att det finns ett $x_0 \in [a,b]$ med $y_0 = f(x_0)$

idén (metoden) : "intervallhalvering"



ta $m_1 = \dfrac{a+b}{2}$ (mittpunkten av $[a,b]$)

DVS. ta det högra intervall

om $f(m_1) \geq y_0$ så sätt $a_1 = a$ och $b_1 = m_1$

vänstra

om $f(m_1) < y_0$ så sätt $a_1 = m_1$ och $b_1 = b$

sätt $I_1 = [a_1, b_1]$

$f(a_1) \leq y_0 \leq f(b_1)$ NYA INTERupprepa proceduren:

sätt $m_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$:

om $f(m_2) \geq y_0$ så sätt $a_2 = a$ och $b_2 = m_2$

om $f(m_2) < y_0$ så sätt $a_2 = m_2$ och $b_2 = b$

sätt $I_2 = [a_2, b_2]$

$f(a_2) \leq y_0 \leq f(b_2)$

Då får vi intervall

$I_k = [a_k, b_k]$ med

$f(a_k) \leq y_0 \leq f(b_k)$

och

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \ldots\ldots \supseteq I_{k-1} \supseteq I_k \supseteq \ldots\ldots$

Intervallinkapslingssatsen ger:

det finns $x_0 = \lim\limits_{k \to \infty} a_k = \lim\limits_{k \to \infty} b_k$:

och $a_k \leq x_0 \leq b_k$, nu är f. kont,

och $f(a_k) \leq y_0 \leq f(b_k)$

då $k \to \infty$

$f(x_0)$

instängningslagen ger

nu att $y_0 = f(x_0)$

V.S.V.

förutsätt.: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ är kont. på $[a,b]$

påst. a) f är begränsad

b) f antar ett största & minsta värde på $[a,b]$

c) f är likformigt kont. på $[a,b]$

Bevis:

a) visar: f begränsad uppåt:

ANTAG: f är <u>inte</u> begränsad uppåt.

intervallhalvering)

ta $m_1 = \dfrac{a+b}{2}$ då är f ej beg. uppåt

i ett av de 2 intervallen $[a,m_1]$ eller $[m_1,b]$

kalla detta intervall $I_1 = [a_1, b_1]$

(om ej. beg. i båda... ta <u>vänstra</u>!)

och det finns $x_1 \in I_1$ så $f(x_1) > 1$

ta $m_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$ $\quad I_2 = [a_2, b_2]$

I_2 = det intervall (av $[a_1,m_2]$ $[m_2 b_1]$)

där f ej beg. uppåt,

och $x_2 \in I_2$ så att $f(x_2) > 2$

FORTSÄTT...

så fås intervall $I_k = [a_k, b_k]$ med $x_0 \in [a_k, b_k]$

med $f(x_k) > k$

och $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \ldots\ldots$

$b_k - a_k = \dfrac{a+b}{2^k} \longrightarrow 0$ då $k \longrightarrow \infty$

alltså finns $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$

$a_k \leq x_k \leq b_k$ $k \to \infty$ x_0

instängningslag ger:

$$\lim_{x \to \infty} x_k = x_0$$

f är kont, alltså $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x_0)$

går ej, ty $f(x_k) > k \longrightarrow \infty$ då $k \longrightarrow \infty$ MOTSÄGELSE!!

- f begränsad nedåt, på samma sätt.
  eller $-f$ begränsad uppåt !!!

Bevis:

b) vet av a) att V_f är begränsad uppåt
alltså existerar $b_0 = \sup V_f$:
det ger att $f(x) \leq b_0$ för alla $x \in [a,b]$
skall nu visa att det finns $x_0 \in [a,b]$
med $f(x_0) = b_0$ ("antas, b_0 = maximum)

ANTA MOTSATS:

dvs $f(x_0) < b_0$, då är

$$g(x) = \frac{1}{\underbrace{b_0 - f(x)}_{\text{ty denna } > 0}} \quad \text{kont. på } [a,b]$$

alltså begränsad uppåt.

till $w > 0$ finns $x_w \in [a,b]$ så att

$f(x_w) > b_0 - \frac{1}{w}$ (ty b_0 = sup = minsta majorant!)

dvs $\frac{1}{w} > b_0 - f(x_w)$

$g(x_w) = \frac{1}{b_0 - f(x_w)} > w$ MOTSÄGELSE !!

alltså beg. uppåt

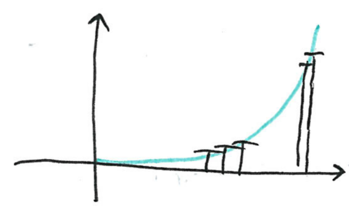
DEF. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

f kallas LIKFORMIGT KONTINUERLIG på $M \subseteq \mathbb{R}$ om det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta(\varepsilon)$ så att $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ för alla $x, x_0 \in [a,b]$ så att $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

skall duga på hela intervallet.

$f(x) = x^2$
ej likf. på $[0, \infty[$

FLER SATSER:



a) f kont. och inj. på $[a,b]$ så är f str. monoton.

b) f injektiv och V_f ett intervall så är f kont.

(ger: f kont, f inj $\Longrightarrow$ f^{-1} kont...)

egentligen borde vi ta upp "numeriska aspekter"

P.B. 4.5 lösn. av ekv. (Newton/Rauphson)

7.11 numerisk beräkning av integraler.

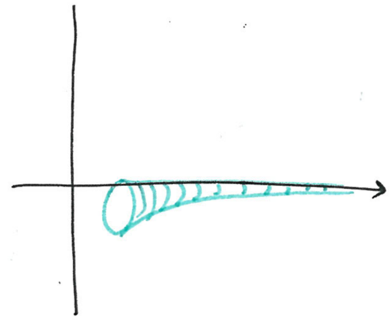
SLUT ENDE FINIS KONIEC

REPETITION.

ex. Gabriel's horn

kurvan $y = \frac{1}{x}$ $x \geq 1$ roterar kring x-axeln

volymen av rotationskroppen:



$$V = \pi \int_1^\infty y^2 dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = \pi$$

$r(x) = x, f(x)$

$r'(x)(1, f'(x))$

$ds = |r'(x)|dx$

mantelytan har arean

$$A = 2\pi \int_C y\,ds = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx$$

divergent,

ty $\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}} > \frac{1}{x} > 0$ för $x > 1$

och $\int_1^\infty \frac{1}{x}$ divergent.

hornet rymmer π liter röd färg men räcker det för att måla insidan ?!?

NOPE !

samma med $y = \frac{1}{x^3}$

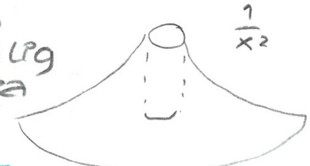
$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^6} dx = \frac{\pi}{5}$$

arean $2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x^3} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{x^4}\right)^2} dx$ ändlig

själva: kring y-axeln

botten: hela xy-planet

ändlig volym men oändlig area



$$\frac{1}{x^3}\sqrt{1 + \frac{9}{x^{16}}} < \frac{1}{x^3}\sqrt{10}$$

ÄNDLIG AREA

$\Rightarrow$ OÄNDLIGT LÅNG KON.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx \quad \text{KONV.}$$

Ö uppg. är $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2-\ln x}\,dx$ konvergent /divergent?

generaliserad i noll "0" ty $\ln x$ ej def i 0.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-\ln x}\,dx$$

existerar, ty

betrakta integrand

sätt $f(x) = \dfrac{1}{x^2-\ln x}$ för $x>0$

och

$f(0)=0$ ty blir fkt. värdet

då är f. kont. på hela intervall

kont. på $[0,\infty[$

ty $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2-\ln x} = 0 = f(0)$

$x^2-\ln x \longrightarrow \infty$ då $x \longrightarrow 0^+$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\underbrace{x^2}_{}-\ln x}\,dx$$

i princip att försumma

$$0 \le f(x) = \frac{1}{x^2\Big(1-\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\text{mot } 0}\Big)}$$

säkert mindre än vilket ε som helst.

$\dfrac{\ln x}{x^2} \longrightarrow 0$ då $x \longrightarrow \infty$

alltså

$\dfrac{\ln x}{x^2} < \dfrac{1}{2}$ SÄKERT för $x >$ ngt ω_0 dvs stort.

alltså

$$0 \le f(x) = \frac{1}{x^2\left(1-\frac{\ln x}{x^2}\right)} \le \frac{1}{x^2\cdot\frac{1}{2}}$$

$2\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ konv. $\overset{\text{enligt jmf. krit}}{\Longrightarrow}$ $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2-\ln x}\,dx$ konvergent

JÄMFÖR

⊕ POSITIVA FKT.

dvs

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2-\ln x} = \int_0^{1} \frac{1}{x^2-\ln x}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2-\ln x}\,dx$$

är konvergent