INLEDANDE MATEMATISK ANALYS

2001

FH

Sidor: 76

Pris: 40kr

3/9/2001 (1)

- Bevis
- Ĝva upp en teknik
- Räknande, tid - individuellt

Inledande Matematisk Analys - Föreläsning

- Begreppet: "nära", uppskattningar
- Handlar om olikheter

$f(x)=0$ * Hur många rötter har ekvationen? (Alla problem kan ej lösas exakt
* Ungefär var ligger de?
* Vid bevis av $a<b$. Hur mycket får man "slänga" av b?
* $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Begrepp: (funktion, ekvation, tal, rät linje, etc) – definieras

Påståenden: (Vad gäller? Samband. Ex: Pytagoras sats) – bevisas

* När varje begrepp definieras används kända, redan definierade begrepp. Varje begrepp: toppen av en pyramid av begrepp.

* Samma vid beviset av nya påståenden används redan bevisade satser i beviset.

Begrepp som ej definieras: mängd, element, rät linje, punkt

Relationer som ej definieras: tillhör, punkten ligger på linjen...

Påståenden som ej bevisas: (Antas vara sanna utan bevis)

3 olika namn:
* Axiom ([illegible])
* Postulat (geometri)
* Principer (fysik)

(2)

Axiomexempel. Talteori:

Varje naturligt tal har en efterföljare. (n, n+1,

* Ju mer uppenbar sats; desto svårare att bevisa
* Akta sig för att tro att ngt ej behöver bevisas. Om ej axiom.

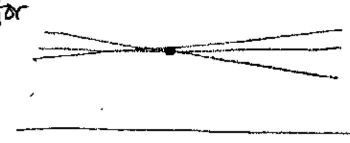
Euklides Parallellaxiom:

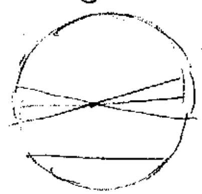
(E) Givet en rät linje, och en punkt utanför denna, finns en enda linje genom den givna punkten, ~~som är~~ parallell med den givna linjen.

Grunden för den Euklidiska geometrin

(H) Annan version:

Givet en rät linje, och en punkt utanför denna, finns flera linjer genom den givna punkten, parallella med den givna linjen.





Om man begränsar planet till en cirkelskiva, är alla linjer som ej skär linjen inom det begränsade planet parallella m. linjen, då skärningspunkterna ligger utanför.

Kleins modell av den hyperboliska geometrin

* Axiom antas vara sanna utan bevis, inom en viss teori

M "mängd"

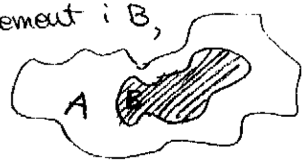
x element

$x \in M$ x tillhör M, $x \notin M$ x tillhör ej M.

Ex. $2 \in \mathbb{N}$ 2 tillhör mängden av naturliga tal
$\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

Ex: $\mathbb{N} \ni 2$ N innehåller 2.
$\mathbb{N} \not\ni \frac{1}{2}$

defi: A, B. B är delmängd i A, om varje element i B, också är element i A.



$B \subset A$

$B \subseteq A$ B delmängd i A, eller lika m. A

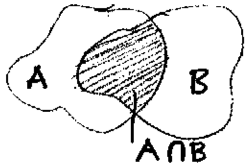
$B \subsetneq$ B är ej lika med A. Men kan vara delmängd.
$B \subset A$
$B \neq A$ B äkta delmängd i A

$A \supset B$, $A \supseteq B$

Snitt, Union, Skillnad.

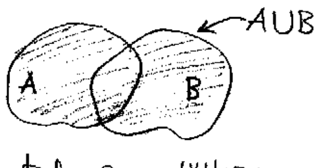
Snitt: $A \cap B$ Mängden av alla element, som tillhör både A och B

Ex:

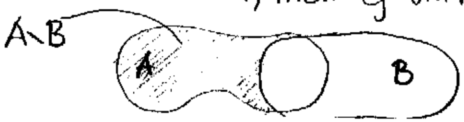


ser utsonu ..

Union: $A \cup B$ Mängden av alla element, som tillhör A eller B.
(Antingen A, eller B, eller båda)



Skillnad: $A \setminus B$ Mängden av alla tal, som tillhör A, men ej tillhör B.



Hur anger man en mängd?

$A = \{1,2,3\}$ lista   tre element

$2 \in A$, $4 \notin A$

$\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ fortsätter i all oändligt

Om inget annat anges: börjar N med 1 enligt Jana.

($\mathbb{N} = \{0,1,2,3...\}$ i vissa böcker, börjar de naturliga talen med 0)

$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^n}\}$

Uppräknelighet: egenskap. Går att lista element.

$(1,2] = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\}$
$]1,2]$

Implikation, Ekvivalens, negation (Matematisk logik)

Utsagor: A, B (påstående)

Ex: Det regnar < sann / falsk $f(P, t)$ plats, tid

Utsagor: Kan vara sann eller falsk.
Matematiken är konsistent.
Ett påståendet kan ej vara sann och falsk samtidigt.
Sanningshalten ändras, beroende av variabler

Ex: $-2 > 0$ falsk!

$x > 0$ Beror på x om sant eller falskt.

Implikation: $\not\rightarrow$

$A \Rightarrow B$ A medför B, A implicerar B, B följer av A.

Om A är sann, så är även B sann.

Ex: $\underbrace{(x>1)}_{A} \Rightarrow \underbrace{(x>0)}_{B}$

$\not\Leftarrow$ (men B medför inte A)

Ekvivalens: $\Leftrightarrow$ $\rightleftarrows$ Ekvivalent med.

Ex: $x^2>1 \Leftrightarrow |x|>1$

Negation:

$\neg A$ icke-A

Ex: icke-A sann $\Leftrightarrow$ A falsk

Ex: $\neg(x>1) = (x\leq 1)$

Projekt: Hej Matematik

www.math.chalmers.se/~greger/Teaching/Hej Matematik

Torsdagar: 10-12 (resurstid) (ej v.1)

15 elever & handledare

2 grupper per vecka

Sal: FL 74 och FL 51

anmälan: sker inför varje tillfälle.

sker på hemsidan. (sju av fullt)

lösningar till uppgifter: finns på hemsidan

(5)

(2) INLEDANDE ANALYS - Föreläsning 5/9/2001

Mängder samt element i mängder definieras ej (6)

A, $\left.\begin{matrix} x \in A \\ A \ni x \end{matrix}\right\}$ x tillhör A

$B \subset A$

$B \subseteq A$ B delmängd i A eller lika med A.

$B \subsetneq A$ Äkta delmängd. B delmängd i A. Absolut ej lika m.

$A \cap B$  snitt - den gemensamma delen

$A \cup B$  union

$A \setminus B$  skillnad Subtrahera mängder som ej ma
=Det gemensamma

(A) (B) $A \cap B = \emptyset$ tomma mängden

$A \setminus B = A$

$\emptyset$: mängd, som saknar element,

skilj med noll. För noll är ett tal.

$\{0\} \neq \emptyset$

$\emptyset \subset A$ Tomma mängden är delmängd i varje annan mängd. För alla A.

Sats $\emptyset \subset A$ för alla A

Varje element i $\emptyset$ är ett element i A.
Kan ej bevisas [illegible] ej.

(7)

Bevis Motsägelsebevis

Istf. används motsägelsebevis. Anta motsatsen. Logiska följder. Synes att falskt.

Antag att påståendet inte är sant.

$\exists$ sådan att

$\Rightarrow$ Det finns en mängd A s.a. $\emptyset \not\subset A$.

(tomma mängden ej delmängd i A. $\Leftrightarrow$ finns ngt element i $\emptyset$ som ei finns i A)

$\Rightarrow$ Det finns element i V.L som ej tillhör A.

Omöjligt, ty $\emptyset$ saknar element.

(Kommit fram till motsatsen av antagandet)

>!< Motsägelse! Beror på att antagandet var felaktigt.

$\Rightarrow \emptyset \subset A$ (för varje mängd) A ($\forall$)

Tänk igenom. Logisk svårighet.

Matematisk ordlista

för alla	$\forall$
det finns (existerar)	$\exists$
(en enda) det finns en entydig lösning	$\exists!$
motsägelse	>!<
(det finns inte	$\nexists$)

$\sum$ summatecken

(8)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2}$$

k summationsindex
summan oberoende av k

$\int$ Integralen: en summa också.

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^x \frac{1}{\mathring{a}^2}\,d\mathring{a}$$

Integral och summan beroende på n ($\sum$) och x ($\int$)

Konvention för beteckningar

(i,j), k, l, m, n naturliga tal (ev. heltal)

Fysikalisk bakgrund

t = tid, v = hastighet, a = acceleration

Geometri

A, B, C ...	Punkter
a, b, c ...	Sträcklängder
α, β, γ ...	vinklar
r	radie
O	medelpunkt i cirkel (origo)

x, y, z Reella variabler
(z komplex variabel) beror på sammanhang

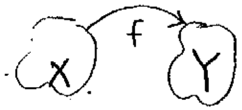
$\mathbb{C}$: $z = x + iy$

ξ	[ksi:]	$\overset{\text{motsvarar}}{\longleftrightarrow}$	x	Ex: Det finns ξ så att ngt. Vet att ngt finns, men vi kan ej ta fram det.
η	eta	$\longleftrightarrow$	y	
ζ	[dzeta:]	$\longleftrightarrow$	z	Rör sig om Existenssats

ε, δ Små positiva tal $\varepsilon \to 0$

N Stort positivt tal $N \to \infty$

Funktion



$f : X \to Y$

$\forall x \in X \ \exists! y \in Y$ s.a $f(x) = y$

För varje element x i mängd X finns ett enda element y i mängden Y så att $f(x) = y$

Definitionsmängd : D_f (Mängden av alla x så att $f(x)$ finn

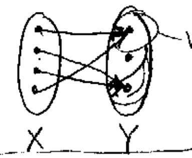
$D_f \{x : \exists f(x)\}$

Ex: $\sqrt{1-x^2} = f(x)$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\}$

$\iff x^2 \leq 1 = [-1, 1]$ innehåller sina ändpunkter (Slutet intervall)

$f[-1,1] \to \mathbb{R}$

Värdemängd : $V_f = \{y \in Y : \exists x \text{ s.a } f(x) = y\}$



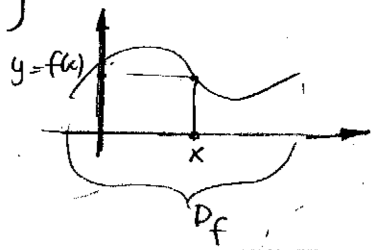
$f(x) = \sqrt{1-x^2} \geq 0$
roten ur: alltid pos. tal / noll.

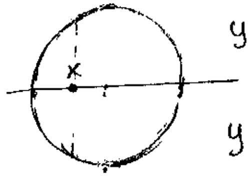
$V_f \begin{cases} y \geq 0 \\ (1-x^2) \leq 1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \leq 1 \\ \Rightarrow y \leq 1 \end{cases}$ $V_f = [0, 1]$

Graf: $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$

$G_f = \{(x,y) : x \in D_f, \ y = f(x)\}$ alla punkter i planet s.a x tillhör D_f och y tillhör V_f

graf $= \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$





$y = \sqrt{1-x^2}$

$y = -\sqrt{1-x^2}$

Beskriver två funktioner.
Den ena = den övre halvcirkeln
Den andra —"— undre —"—

Funktioners egenskaper

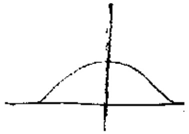
växande

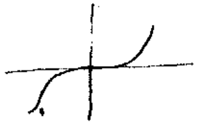
avtagande

konstant

periodiska

(11)


jämna (symmetri m. avseende på y-axeln)


udda (symmetrisk m. avseende på x-axeln)

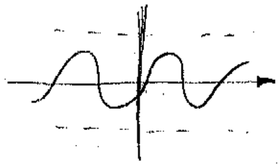

Kontinuerlig : [obruten tråd]

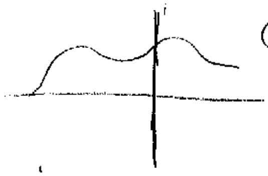

diskontinuerlig


injektiv — varje x-värde har ett y-värde

bijektiv

sujektiv


begränsade (i y-led)


deriverbara
- "slät"
- kontinuerlig
- i varje punkt på grafen ska en tangent kunna dra

$\boxed{f : D_f \to \mathbb{R}}$ gäller alla def.

def. f växande om $\forall x_1, x_2 \in D_f \quad x_1 \leq x_2$

gäller $f(x_1) \leq f(x_2)$

(12)

def. f avtagande om $\forall x_1, x_2 \in D_f \quad x_1 \leq x_2$

gäller $f(x_1) \geq f(x_2)$

---

def. f strängt växande om $\forall x_1, x_2 \in D_f \quad x_1 < x_2$

gäller $f(x_1) < f(x_2)$

---

def f strängt avtagande om $\forall x_1, x_2 \in D_f \quad x_1 < x_2$

gäller $f(x_1) > f(x_2)$

- Då likhet gäller, är konstanta funktioner växande.

Monotona Funktioner : växande (str), avtagande (str),

---

def. $f \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f periodisk om $\exists T$ (finns ett tal sådant) : $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

* Det minsta möjliga $T > 0$ kallas period.

Ex: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)}$ [Period tangens : π] OBS! kolla!

---

def $f D_f \to \mathbb{R}$

D_f symmetrisk m. avseende på 0 (för varje f(x) ska man kunna beräkna f(-x). Samtidigt)

f jämn om $f(-x) = f(x)$

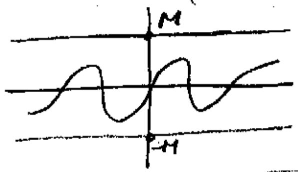
f udda om $f(-x) = -f(x)$

Ex: $f(x) = x^2$ jämn på $\mathbb{R}$

$f(x) = x^2 \quad x \in [0, \infty]$

def. f begränsad om $\exists M \in \mathbb{R}$ s.a $|f(x)| \le M,\ \forall x \in D_f$

(det finns ett tal M)
(det krävs bara en, men finns det en, finns flera)



Ex: $|\sin x| \le 1$

def: f injektiv om $x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$

För varje nytt x ska det innebära ett nytt y.

= Man ska ej kunna börja i två x, och komma till samma y

def: $f\ X \to Y$

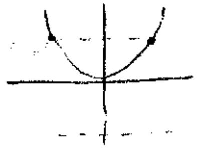
Varje y-värde har ett x-värde

f ~~surjektiv~~ på om $\forall y \in Y\ \exists\ x \in X : f(x) = y$

def: $f : X \to Y$

f bijektiv om f är både injektiv och surjektiv.

Ex: $f(x) = x^2$



ej injektiv. (varje y har ej ett x)

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

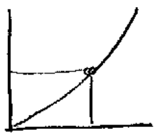
ej surjektiv (gäller bara positiva

② $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$

injektiv

ej surjektiv (negativa y-värden saknar motsvarande x-värden

③ $f\ [0, \infty] \to [0, \infty]$



Bijektiv
- injektiv
- surjektiv

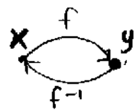
$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$f : X \to Y$ bijektiv

injektiv: $x_1 \ne x_2 \to f(x_1) \ne f(x_2)$

surjektiv: $\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$

$\Rightarrow \exists f^{-1} : \underset{\text{definierad i}}{Y} \to \underset{\text{värden i}}{X}$



$f^{-1}(f(x)) = x$

$f(f^{-1}(y)) = y$

$f \circ f^{-1}(y) = y$

$f^{-1} \circ f(x) = x$

$f \circ g(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x))$
Sammansatt funktion
∘ sammansättning

Ex: $\sin(\ln(x)) = (\sin \circ \ln)(x)$

$\ln(\sin x) = (\ln \circ \sin)(x)$

$f \circ g \ne g \circ f$

LÄXA MÅNDAG: Läs igenom om: Grafen till invers funktion. (symmetri)

Fundera på följande:

Vi har $f(x)$ hur betecknar vi inversen? $f^{-1}(y)$? $f^{-1}(x)$?

Polynom

polynom: funktion av typen:

$p(x) = \underset{\ne 0}{a_n} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

grad p = deg $p = n$ (högsta förekommande potensen)

1. Finns det rötter? → Algebrans fundamentalsats ger svar
2. Kan vi ta fram dem?

Algebrans fundamentalsats

Låt $p(x)$ vara ett polynom s.a $\deg p \geq 1$ och

$a_k \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$ är en delmängd av $\mathbb{C}$)

Då har ekvationerna $p(x) = 0$ minst en rot i $\mathbb{C}$.

(bevisat att 5:te och 6:te grads polynom ej har rötter)

Faktorsatsen (för polynom)

$p(x)$ polynom

α = nollställe till $p(x)$ $\overset{\text{om och endast om}}{\Longleftrightarrow}$ $p(x) = (x-\alpha)\,q(x)$

för något polynom q.

handlar om ekvis.

Bevis:

- handlar om ekvivalens.
  ekvivalens: två implikationspilar
  två satser att visa: givet H.L gäller V.L och vice versa.

Bevis: $\Rightarrow$ (anta V.L, försöka bevisa H.L)

Givet är att α är nollställe till $p(x)$

$\frac{p(x)}{x-\alpha} = q(x) + \frac{rest(x)}{x-\alpha}$ konstant. ty vi likhet mellan funktioner $\forall x \neq \alpha$

$\deg(x-\alpha) = 1$
$\deg(rest(x)) < 1 \Rightarrow rest(x) = c = const$

$\Rightarrow p(x) = (x-\alpha)\,q(x) + c \quad \forall x$ gäller alla x

Välj $x = \alpha$ $\quad \underbrace{p(\alpha)}_{=0} = (\alpha-\alpha)\cdot q(\alpha) + c = c$

$\Rightarrow c = 0 \qquad \Rightarrow p(x) = (x-\alpha)\,q(x)$

$\left(\text{"="} \; \forall x \neq \alpha \Rightarrow \text{"="} \; \forall x \right)$ likhet mellan polynom

Bygger på kontinuitet

$\Leftarrow$ Givet är att $p(x) = (x-\alpha)\,q(x) \quad \forall x$

Tag $x = \alpha \quad p(\alpha) = (\alpha-\alpha)\,q(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ nollställe till p.

Ex: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

Läxa: (Måndag) Givet ett polynom $p(x)$ (reella koeff)
(Har minst ett komplex rot enl. alg. fundamentalsats)
1. Hur långt kan man faktorisera?
a. $\mathbb{C}$
b. $\mathbb{R}$

1 1
1 2 1

Binomialsatsen (Newton)

$(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$

$a, b \neq 0$

Räcker att hitta formel för: $(1+x)^n$

Def: Binomialkoefficienter

$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$ $\quad k = 1, \ldots, n$

Dra: från en nolla, Dra: från en etta } två fall

"n över k"

def. $\binom{n}{0} = 1$

def: $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots k, \quad k \in \mathbb{N}$ alla naturliga tal

"k-fakultet"

def: $0! = 1$

Sats $\binom{n}{k}$ kan skrivas enbart mha fakulteter

(i) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(iii) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Sats: Binomialsatsen

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n =$$

$$= 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Bevis (det ej, utelämnat)

$\binom{n}{k} \stackrel{?}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$

förläng m alla faktorer som krävs för att få n!

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{\underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots k}_{=k!}} \cdot \frac{\overbrace{(n-k)(n-k-1)\dots 2\cdot 1}^{n!}}{\underbrace{(n-k)(n-k-1)\dots 2\cdot 1}_{(n-k)!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

man ser symmetrin

(ii) $\binom{n}{k} \stackrel{?}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$

(iii) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \stackrel{?}{=} \binom{n}{k}$

VL: $\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right)$

$= $ n-

$[k = k(k-1)!]$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} \cdot \frac{\cancel{k}+n-\cancel{k}}{(n-k)k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Ex $\binom{3}{2} = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$ ← två faktorer nedåtgående, två faktorer uppåtgående

$\binom{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$

1. under el. över hälften. byt!

$\binom{15}{7} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 13\cdot 11\cdot 5\cdot 9$

Om ska programmer: gruppera: $\frac{15}{7}\cdot\frac{14}{6}\cdot\frac{13}{5}\cdot\frac{12}{4}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{10}{2}\cdot\frac{9}{1}$ = Mindre tal att räkna med!

PASCALS TRIANGEL

n = 0: 1

n = 1: 1 1

n = 2: 1 2 1

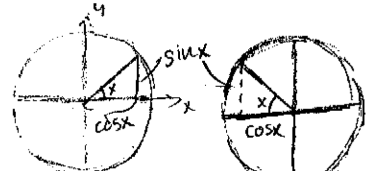
n = 3: 1 3 3 1

n = 4: 1 4 6 4 1

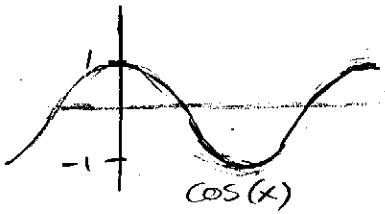
$\binom{4}{1}$, $\binom{4}{3}$

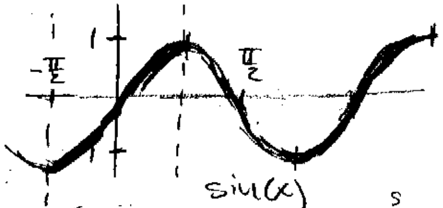
$\binom{4}{1} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1}$

Trigonometriska funktioner och deras inverser



(19)





(avgränsa. Varje värde mellan -1 och 1 antas endast 1 gång!) s

$\sin(x)\ \underset{D_f}{\mathbb{R}} \to \underset{V_f}{\mathbb{R}}$

$\sin(x)\ \mathbb{R} \to [-1,1]$ surjektiv

$\boxed{\sin(x)\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \underset{V_f}{[-1,1]}}$

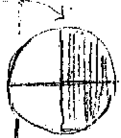
$\sin(x)\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1,1]$

$\sin(x)\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ går lika bra

$\sin(x)\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ bijektiv - inverterbar på just dessa intervall

def: arcsin : $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
"arcussinus"

- Den inversa funktionen till sin(x) på dessa intervall. D.v.s
- arcsin(x) är den vinkel $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vars sinus är x.



$x \in [-1,1] \quad \arcsin(x) = y \iff \begin{cases} y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin y = x \end{cases}$

Ex: 1. Lös ekvationen $\sin(x) = 0$

$x = n\pi \ , \ x \in \mathbb{Z}$ ← heltal

2. Bestäm $\arcsin(0) = t$

krav: $\begin{cases} \sin(t) = 0 \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

$\sin(0) = 0$

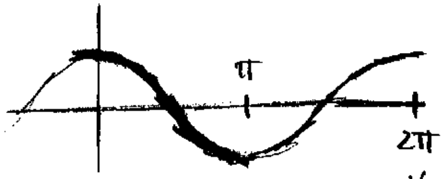
$0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(0) = 0$

(20)

Ex. 1. Lös $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad x_n = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad x_n' = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

2. Bestäm $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, ty $\begin{cases} \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$



$\arccos : \underset{D_f}{[-1,1]} \to \underset{V_f}{[0,\pi]}$.

Invers till cos

$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

Faktorsatsen

α nollställe till $P \iff P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ för ngt polynom Q

Hur långt kan faktoriseringen drivas?

1. $\mathbb{C}$ $P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$

2. $\mathbb{R}$ $a_k \in \mathbb{R}$ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ reella nollställen till P

övriga nollställen icke-reella

$P(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_k)Q(x)$

$\deg Q = \deg P - k = n-k$

Q har inga reella nollställen

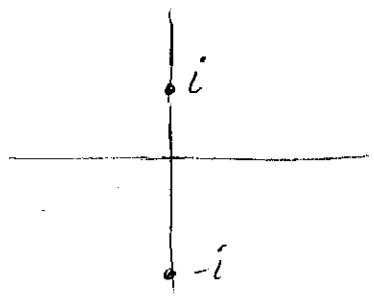
$\deg Q$ jämnt tal. Högstagrads koefficienten och konstanten måste ha samma tecken

reella koefficienter

$\Rightarrow$ α komplext nollställe samtidigt som

$\bar{\alpha}$ är nollställe $\qquad \bar{i} = -i$

Ex: x^2+1



$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$ reell faktor

$\alpha = a+bi$

$\bar{\alpha} = a-bi$

$\Rightarrow$ alla polynom kan faktoriseras med reella koefficienter kan faktoriseras med reella förstagrads faktorer (motsvarar de reella nollställena) och reella andragradsfaktorer, som saknar reella nollställen.

$(x-\alpha)$ $\qquad (x^2+Ax+B)$ saknas reella nollställen

Ex: x^2+1 går ej att dela upp reellt

$x^4+1 = (x^2+Ax+1)(x^2+Bx+1)$

Jämför koefficienterna i båda leden!

x^4: $1 = 1$

x^3: $0 = A+B$

x^2: $0 = 1+AB+1$

x^1: $0 = A+B$

x^0: $1 = 1$

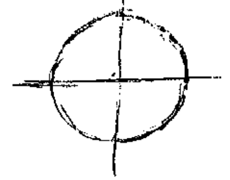
$A = -B \qquad -2 = -B^2$

$B = \sqrt{2} \qquad A = -\sqrt{2}$

Ansats

Ansats: Vi antar att lösningen till problemet har en viss form, och bestämmer lämpliga koefficienter, parametrar ... utifrån den formen.

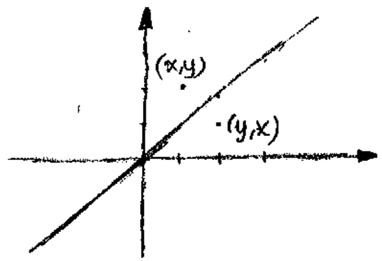
OBS! Man måste gå tillbaka och testa att det blev en lösning.



$x^4+1=0$ Rötter på enhetscirkeln (23)

Ex: $\cancel{x}^6+1 = (x^2)^3+1$

Grafen till invers funktion:



$$G_f = \{(x, f(x))\}$$

Spegla G_f i bisektrisen $(x=y)$ till I och III kvadranten:

$$M_f = \{(f(x), x)\}$$

Om f är inverterbar;

$$(\overset{V_f}{f(x)}, \overset{D_f}{x}) = (f(x), f^{-1}(f(x))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_f = G_{f^{-1}}$$

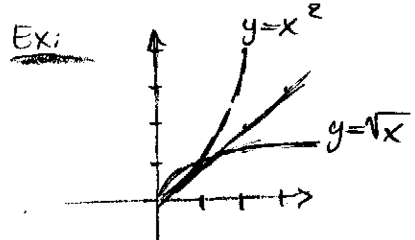
$$f(x) = V_f$$

$$f^{-1}: V_f \to D_f$$

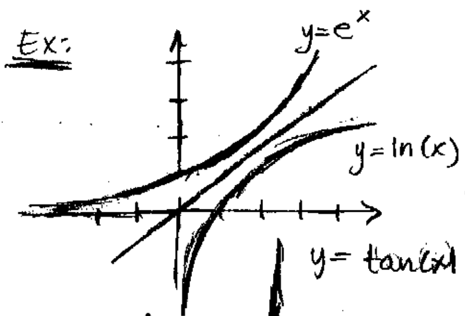
- Formel
- Vilka mängder den är definierad på

Kan rita en funktions invers. (24)

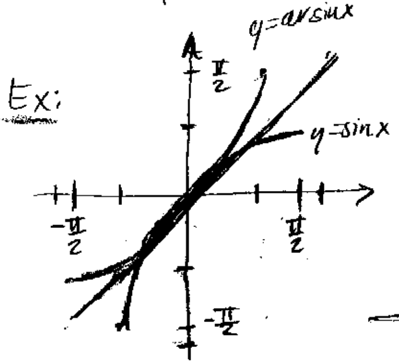
Ex:



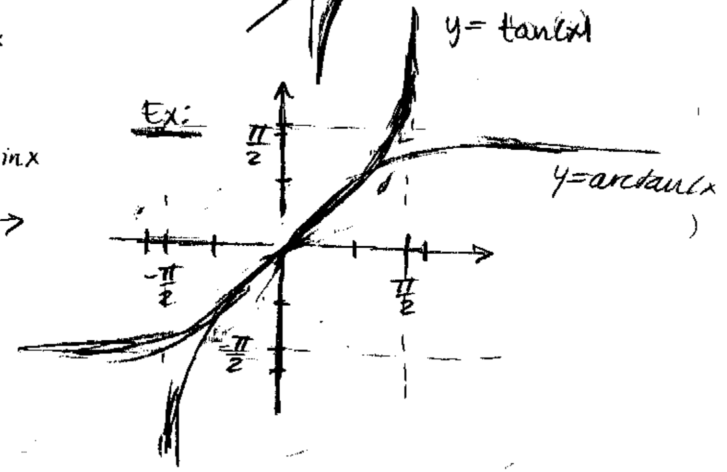
Ex:



Ex:



Ex:



Försök själva mha metoden ovan skissera $\arccos(x)$ och $\operatorname{arccot}(x)$.

Matematisk induktion

$\mathbb{N}$ basbegrepp (defineras ej)

axiom

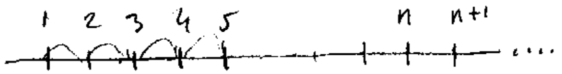
Peanos axiom — varje naturligt tal har en efterföljare. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Induktionsaxiomet

Låt $M \subseteq \mathbb{N}$, så att

$1 \in M$ Då gäller $M = \mathbb{N}$,

$n \in M \Rightarrow n+1 \in M$



Ett-steg eul. induktionsaxiomet

Exempel:

$$1+2+3+\dots+n \overset{?}{=} \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Låt P_n vara påståendet "$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$"

Låt $M = \{n \in \mathbb{N} : P_n \text{ sant}\}$ (mängden av alla naturliga tal, så att)

Visa att $M = \mathbb{N}$

Bevis:

1) $\overset{?}{}$ $1 \in M$, dvs P_1 är $\overset{?}{}$sant. Visa!

Gäller formeln ovan för $n=1$?

$$VL = \underset{}{\overset{(1+\dots+n)}{1}}, \quad HL = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$\Rightarrow P_1$ är sant (formeln gäller för $n=1$) $\Rightarrow 1 \in M$

2) (Induktionsantagandet)

Antag att P_n är sant för $n=k$, (ett visst n)

dvs. antag att följande gäller:

$$1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

3) Är det sant att P_{k+1} är sant under antagandet i steg 2)?

$$VL: \underbrace{(1+2+\dots+k)}_{\text{enligt induktionsantagandet}}+(k+1) \overset{n=k+1}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+1)+}{2}$$

P_1 sant

Om P_k sant $\Rightarrow P_{k+1}$ sant

$\Rightarrow$ enligt induktionsaxiomet är påståendet sant för (alla naturliga tal) $\forall n \in \mathbb{N}$

Ex: $1+3+5+\dots+(2n-1) \overset{?}{=} n^2$

Bevis:

1. Testa för $n=1$

$VL = 1 \qquad HL = 1 \qquad$ Sant! $\qquad$ Om ej övertygad:

$(n=2: \quad VL = 1+3 = 4 \qquad HL = 2^2 = 4)$

2. (Induktionsantagandet)

Antag att formeln gäller för $n=k$ dvs;

$$1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2$$

3. Gäller formeln för $n=k+1$ under antagandet i 2)?

$$VL = 1+3+5+\dots+(2k-1) + \underbrace{((2k+1)-1)}_{=2k+1} \underset{\text{enligt induktions-antagandet}}{=} k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

enl. kvadreringsreglerna

Formeln gäller för $n=1$
Om den gäller för $n=k$,
så gäller den för $n=k+1$ $\Rightarrow$ Enligt induktionsaxiomet gäller den $\forall n \in \mathbb{N}$

Matematisk induktion

$$\binom{n}{k} \overset{\text{per def.}}{=} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{0} \overset{\text{def}}{=} 1 \qquad \left(0! \overset{\text{def}}{=} 1\right)$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ex:
$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Binomialsatsen

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{k}x^k + \dots + x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gäller alla naturliga tal (även för $n=0$)

Bevis: (induktion)

1) $n=1$. $VL = 1+x$
$HL = 1 + \binom{1}{1}x = 1 + \frac{1}{1}x = 1 + x = VL \Rightarrow$ formeln gäller för $n=1$

2) (Induktionsantagandet)
Antag att formeln gäller för $n=m$, dvs
$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$$

3. Gäller formeln för $n=m+1$ under antagandet i 2)?

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)^m(1+x) \underset{\text{enligt induktionsantagandet}}{=} \left(1 + \binom{m}{1}x + \dots + \binom{m}{k}x^k + \dots + x^m\right)(1+x)$$

(det eg. ... om det gäller. Antar $\binom{m}{\cdot}x$ el. $1\cdot x$)

$1\cdot 1$ $\quad \cdot x \quad \cdot 1\cdot$ an

$$1 + \left(1+\binom{m}{1}\right)x + \left(\binom{m}{1}+\binom{m}{2}\right)x^2 + \dots + \left(\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1}\right)x^k + \dots + x^{m+1} =$$

då koeff. på rad m i Pascals triangel — Byt ut mot: — kan enbart fås genom högsta noteringen.

$$= 1 + \binom{m+1}{1}x + \binom{m+2}{2}x^2 + \dots + \binom{m+k+1}{k+1}x^{k+1} + \dots + x^{m+1}.$$

Enligt induktionsantagandet, gäller formeln.

ANALYS - FÖRLÄSNING 5   12/9/2001

Bernoullis olikhet

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Bevis (avsiktligen bristfälliga) $\boxed{x \geq 0}$

① $(1+x)^n = \underbrace{1+\binom{n}{1}x}_{\geq 1+n\cdot x} + \underbrace{\binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n}_{\geq 0} \geq$

$\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$

② Induktionsbevis

1. $\underline{n=1}$: $VL: (1+x)^1 = 1+x \geq HL: 1+x$

$\Rightarrow$ olikheten gäller för $n=1$

2. Antag att olikheten gäller för något $n=k$, dvs att $(1+x)^k \geq 1+k\cdot x$

3. (under induktionsantagandet) Gäller ~~då~~ olikheten även för $n=k+1$?

$VL: (1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \overset{\text{gäller endast enl. induktionsantagandet}}{\geq} (1+kx)(1+x) = 1+x+kx+kx^2 =$

(ersätts med $(1+kx)$ som enligt IA är mindre än $(1+x)^k$)

har multiplicerat en olikhet med ~~ett~~ tal

$= 1+(k+1)x + \underbrace{kx^2}_{\geq 0} \geq 1+(k+1)x$

$\Rightarrow$ enligt induktionsaxiomet gäller olikheten $\forall n \in \mathbb{N}$ (även för $n=0$)

Om en olikhet multipliceras m. ett tal, kan olikhetens tecken ändras, beroende på talets storlek. Måste alltså ange att ovan gäller endast då $x \geq -1$

Bevis 1: gäller för $x \geq 0$

Bevis 2: gäller för $x \geq -1$

Alltså fångar ej bevis 1 upp alla förekommande $-1 > x > 0$. Sålunda är induktionsbeviset bättre.

$(1+x)^k \geq 1+kx \quad |\cdot(1+x) \Leftrightarrow (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx)$

Vid bevis av olikheter:

- man måste förkasta en del termer
- risk: att man förkastar för mycket

I2: Talföljd $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$; $a_n \in \mathbb{R}$

$a_0 = 10$

$a_{n+1} = \sqrt{2a_n+2} + 3$

Rekursiv talföljd

- varje element givet som funktion av föregående element.
- $f(a_n) = a_{n+1}$ $\Rightarrow$ startvärde a_0
- $F(a_n, a_{n-1}) = a_{n+1}$ $\Rightarrow$ startvärden: a_0, a_1

Ex: $a_0 = 1 \quad a_1 = 1$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Fibonaccis talföljd

a. Visa att $a_n \geq 7$ för alla n.

b. Visa att följden är avtagande.
   dvs: $a_{n+1} \leq a_n$

c. Konvergent, dvs $\exists$ gränsvärde a: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

a. $a_n \overset{?}{\geq} 7 \quad \forall n \geq 0$ (visa)

① Induktion: $a_0 = 10 \geq 7$ $(n=1)$

2. Antag att påståendet gäller för n=k. Dvs:

$a_k \geqslant 7$ för något k.

3. Gäller **då** att även nästa element $a_{k+1} \geqslant 7$?

$$a_{k+1} = \sqrt{2 \cdot \underbrace{a_k}_{\geq 7} + 2} + 3 \geqslant \sqrt{2 \cdot 7 + 2} + 3 = 7$$

$\Rightarrow$ enligt induktionsaxiomet gäller $a_n \geqslant 7$ för alla $\forall n \in \mathbb{N} \overset{och}{\vee} \{0\}$.

---

b. <u>Induktion</u>

① <u>n=1</u> $\quad a_1 \leq a_0$ $\quad$ ersätt $\sqrt{22}$ m. ngt större = 5

$$a_1 = \sqrt{2 \cdot 10 + 2} + 3 < 5 + 3 = 8 < 10 = a_0$$

$\sqrt{16} < \sqrt{22} < \sqrt{25}$

② Antag att $a_{k+1} \leq a_k$ för något k.

③ Gäller **då** $a_{k+2} \leq a_{k+1}$?

$$a_{k+2} = \sqrt{2 \cdot a_{k+1} + 2} + 3 \overset{enl. 2.}{\leq} \sqrt{2a_k + 2} + 3 = a_{k+1}$$

$\Rightarrow$ enligt induktionsaxiomet är följden avtagande.

c. $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{?} a$ $\qquad a_0 = 10$, $\quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 2} + 3$

<u>Antag</u> att $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$

$\Rightarrow a_{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} a$

Gränsövergång: a_{n+1}

Vl: $\to a$ $\quad$ hl: $\sqrt{2a+2} + 3$ $\quad$ Om det finns ett gränsvärde, kommer den att uppfylla

$a = \sqrt{2a+2} + 3 \leftarrow$ denna ekv

$a = \sqrt{2a+2} + 3 \quad \Rightarrow \quad a - 3 = \sqrt{2a+2} \;\Big|^2$ (kvadrera)

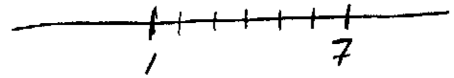
$a^2 - 6a + 9 = 2a + 2$

$a^2 - 8a + 7 = 0$

$(a-1)(a-7) = 0$

$\cancel{a' = 1}$ $\quad$ ty vet att $a_n \geqslant 7 \; \forall n$ $\quad$ Uppkommit vid kvadreringen. $1 \neq \sqrt{2+2} + 3$, 1 uppfyller ej kravet!

$\boxed{a'' = 7}$



Om det finns ett gränsvärde, så är det 7.

Finns det ett gränsvärde.

Två påståenden som bör accepteras som axiom.

<u>Sats</u>: Om en följd av reella tal är växande, och uppåt begränsad, så är den konvergent, Dvs: den har ett gränsvärde.

Växande: $a_n \leq a_{n+1}$ $\quad$ $\exists A : a_n \leq A \; \forall n$ $\quad \Rightarrow \exists a : a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$

<u>Sats</u>: Om en följd av reella tal är avtagande, och nedåt begränsad, så är den konvergent. Dvs: den har ett gränsvärde.

$\Rightarrow$ följden i upp. I2 är konvergent. ty den var avtagande och nedåt begränsad.

Konvergent = har gränsvärde $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Divergent = har ej gränsvärde $\quad \begin{cases} 1, 2, 3, \ldots, n & n \longrightarrow \infty \\ 1, -1, 1, -1 & \text{går ett med ett} \end{cases}$

Sats: (bevisas senare)

Följden med element $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ är växande och uppåt begränsad

$(1+\frac{1}{n})^n \leq (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$
$(1+\frac{1}{n})^n \leq 3$ } bevisas på fredag

$\Rightarrow$ följden är konvergent.

$(1+\frac{1}{n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e = 2{,}71\ldots$

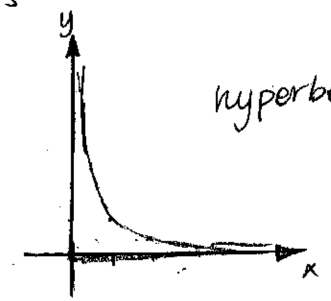
GRÄNSVÄRDEN

→ talföljders
→ funktioners

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$

$\cancel{\lim a \to a}$

$f(x) = \frac{1}{x} \to 0$ $x>0$, $x \in \mathbb{R}$



hyperbel

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L = f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} L$

Skillnad mellan följder och funktioners gränsvärden

- Följder: Kan endast ställa frågor om uppförande när $n \to \infty$
- Funktioner: Närma sig ändliga tal.
  dvs: gränsvärden då $x \to$ ändligt värde
  Samt då $x \to \pm\infty$

Ex: $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 2]{?} 0$ $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|x-2|}{2x}$ $x \to 2 \Rightarrow x>0$ efter ett tag

Då $x \to 2$ passeras såväl $x=0$ som $x=1$.
Alltså kan vi byta ut $2x$ i nämnaren mot 2 el 3 ... 4

$\frac{|x-2|}{2x} \leq \frac{|x-2|}{2}$ ($|x-2| \to 0$, $\frac{|x-2|}{2} \to 0$)

(Viktigt begrepp inom analysen)!

def: $f: D_f \to \mathbb{R}$ $x_0 \in D_f$

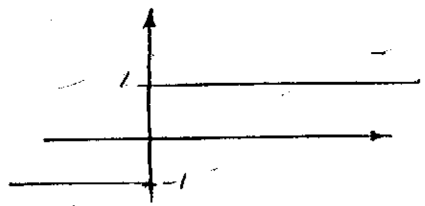
f kallas kontinuerlig i x_0, om:

$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

(Ex. lovan: $\frac{1}{x}$ är kontinuerlig i $x_0 = 2$.)

Ex 2: $\mathrm{sgn}(x)$ Reagerar på vad x har för tecken.
sign
signum

$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$



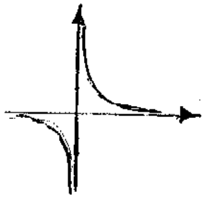
$\mathrm{sgn}(x)$ är kontinuerlig för alla $x>0$ och för alla $x<0$.

$\mathrm{sgn}(x)$ är ej kontinuerlig (diskontinuerlig) i $x_0 = 0$.

$\mathrm{sgn}(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} -1 \neq \mathrm{sgn}(0)$

$\mathrm{sgn}(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +1 \neq \mathrm{sgn}(0)$

Ex: $\frac{1}{x}$ i $x_0 = 0$ Frågan kan ej ställas, ty punkten $x_0 \notin D_f$ tillhör ej D_f.



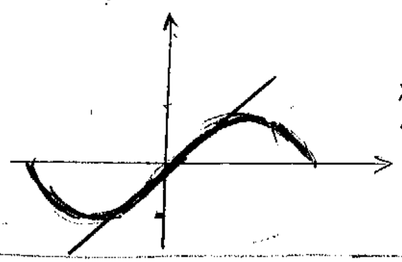
$f(x) = \frac{1}{x}$ är kontinuerlig i alla punkter, ty $x=0$ tillhör ej D_f.

STANDARDGRÄNSVÄRDEN

$\frac{a^x}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ $\boxed{a>1}$ $\boxed{\alpha>0}$

$\frac{{}^a\log(x)}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$



x beter sig som sinx i x=1

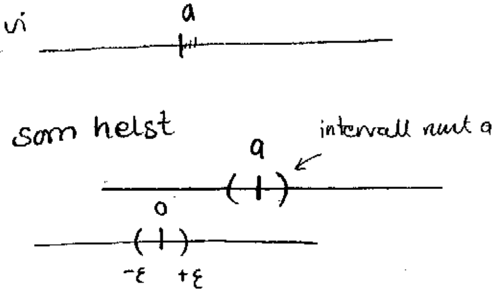
ANALYS - FÖRELÄSNING 6

Gränsvärden
1. Definitioner
2. Räkneregler
3. De elementära funktionerna
4. Standardgränsvärden

Definitioner (stringent mat. mening i det intuitiva)

Talföljd : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ $a_k \in \mathbb{R}$

Konvergens mot a: På sikt kommer vi mkt nära a.



"mycket nära": hur nära som helst

Ex: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$

Mkt litet intervall : ε

Tag $\varepsilon > 0$ = vi har angett "närhetsgraden" vi vill uppnå.

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\forall n > \frac{1}{\varepsilon}$ ($\frac{1}{n}$ ligger mellan $-\varepsilon$ och ε bara när n är tillräckligt stort. n måste då vara: $\frac{1}{\varepsilon}$)

---

mängdklammer $\{a_k\}$ ← beteckning för en talföljd

def

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_k \in \mathbb{R}$

$a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$ $(\lim_{k\to\infty} a_k = a)$ om

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall k > N \quad |a_k - a| < \varepsilon$

(Normalt gäller att N_ε växer, när man väljer mindre ε)
(N_ε beror av ε)

ε = intervallet runt det förmodade gränsvärdet.

Ex: $a_n = \frac{n+1}{n-1} \xrightarrow[n \to \infty]{?} 1$

Tag ett godtyckligt $\varepsilon > 0$

Vill finna N_ε sådant att: $\forall n > N_\varepsilon \quad \left| \frac{n+1}{n-1} - 1 \right| < \varepsilon$ ($a_n - a$)

$\left| \frac{n+1}{n-1} \right| = \left| \frac{\cancel{n}+1 - \cancel{n}+1}{n-1} \right| = \frac{2}{n-1} < \varepsilon$

$n \geq 2$
naturligt tal,
Får ej vara 1
Alltså $n \geq 2$

$\Rightarrow 2 < \varepsilon(n-1) \Rightarrow 2 + \varepsilon < \varepsilon \cdot n$

$\Rightarrow \boxed{n > \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} = N_\varepsilon}$

Dvs: för alla tal större än $\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$, kommer vi komma närmare gränsvärdet än ε.

ÖVNING: Låt $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$,

Vad är talet N_ε?

FUNKTIONER

$f(x)$, $x \to x_0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$

Ex: $\cancel{\lim_{x \to \infty} \ln(x)}$

Vad måste uppfyllas för att vi överhuvudtaget ska kunna leta efter ett gränsvärde.

$f(x)$ $\quad x \to x_0 \quad \Rightarrow f(x) \to \; \Rightarrow f(x) \to -\infty \quad \Rightarrow f(x) \to x_0$ $\quad$ Många möjliga alternativ

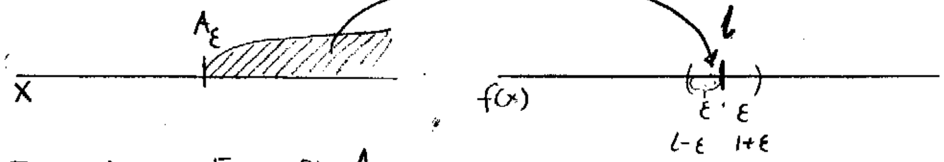
$x \to \infty \quad$ — " —

$x \to -\infty \quad$ — " —

För varje ε ska man kunna gå så långt att vi kommer komma närmare l än ε.

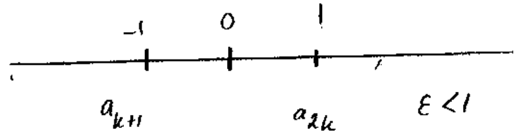
def: $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ om

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_\varepsilon : \forall x > A_\varepsilon \quad |f(x) - l| < \varepsilon$ $\leftarrow$ ($-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$; $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$)



För varje x större än A_ε, ska $f(x)$ avbildas, så att det ligger i intervallet $l - \varepsilon < l < \varepsilon + l$

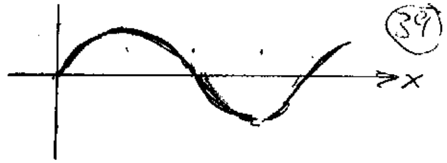
Ex: $-1, 1, -1, 1, \ldots \quad a_n = (-1)^n$



Om $\varepsilon < 1$ är intervallbredden mindre än två.
Alltså kan jag ej få med både -1 och +1 i samma intervall.

ÖVNING:
Vad betyder att talet b inte är gränsvärde till en följd? $\quad b \neq \lim_{n \to \infty} a_n$?

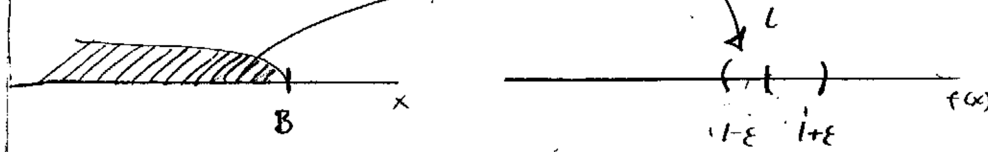
<u>Ex</u>: $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$ $\varepsilon < 1$ $\nexists A_\varepsilon$



<u>def</u> $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$

$\forall_\varepsilon > 0 \quad \exists B_\varepsilon : \forall x < B_\varepsilon$

$|f(x) - l| < \varepsilon$

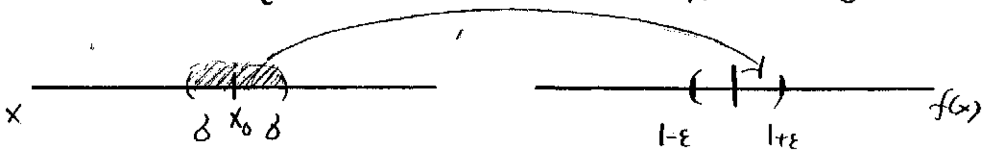


Skall finnas ett tal B på x-axeln, så om jag befinner mig till vänster om denna, ska f(x) ligga i intervallet $l-\varepsilon < l < l+\varepsilon$

<u>def</u>: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

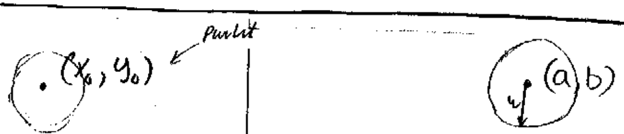
för varje $\varepsilon > 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \ |x - x_0| < \delta$ $\quad |f(x) - l| < \varepsilon$



Bara delta är tillräckligt litet, skall f(x) befinna sig tillräckligt nära L.

TVÅ PLAN.



(x,y) $\quad$ f(x,y)

Om vi anger ett ε runt funktionen och ett δ runt x

Kommer för varje x inom rätt intervall, kommer f(x) att hamna i intervallet innebre än ε runt punkten a, b

$x_0 \in \mathbb{R}$ eller $x_0 = \infty$ eller $x_0 = -\infty$

$l \in \mathbb{R}$ eller $l = \infty$ eller $l = -\infty$

<u>def</u>: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, om det för varje) $\forall$ omgivning V till l $\exists$ omgivning $\mathcal{U}$ till x_0, så att $f(\mathcal{U}) \subset V$

(Mkt Abstrakt topologiskt bevis ↑)

$l \in \mathbb{R}$ omgivning V $(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$ Anges genom $\varepsilon > 0$

$x_0 \in \mathbb{R}$ omgivning $\mathcal{U}$ $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ Anges genom $\delta > 0$

$x_0 = \infty$ omgivning $\mathcal{U}$ $(A, +\infty)$ / intervallet börjar, slutar ej. Anges genom A

$x_0 = -\infty$ omgivning $\mathcal{U}$ $(-\infty, B)$ Anges genom B

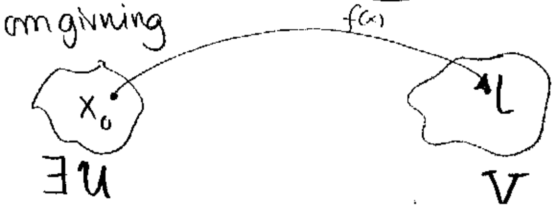
ÖVNING

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

Titta på den abstrakta definitionen. Vilket tal ändligt, vilket oändligt. Sätt in rätt typ av omgivning. Som exemplet ovan

$\mathcal{U}$ = omgivning



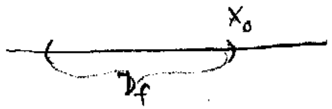
Vad behövs, för att vi ska kunna skriva upp en gränsvärdes-definition?

$f: D_f \to \mathbb{R}$ — Krävs att $f(x)$ kan beräknas i x_0. Dvs: x_0 ska befinna sig mkt nära/i D_f

$x \to x_0$

$x \to x_0$ kräver att x_0 är en s.k **hopningspunkt** till D_f.

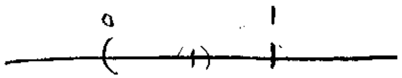
$(f(x) \to ?)$



<u>def:</u> $M \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

x_0 kallas hopningspunkt till M, om varje omgivning till x_0 innehåller minst en punkt från mängden $x \in M$, som ej är den ursprungliga punkten. $x \neq x_0$.

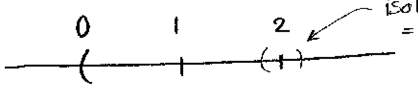
<u>Ex:</u> 1) $M = (0, 1]$ hopningspunkter



Varje omgivning runt en punkt finns det fullt med punkter runt punkten, som inte är punkten själv.

$\Rightarrow$ Såväl 0:an, som 1:an, och talen däremellan är hopningspunkter.

2) $(0, 1] \cup \{2\}$



2:an = isolerad punkt = ej en hopningspunkt

(Mängden som består av punkten 2 ≈ punkten 2.)

innehåller ingo punkter från mängden förutom 2:an själv

omgivning = behöver ej vara symmetrisk, men måste existera på båda sidor om talet.

$\forall$ omgivning
$\forall \varepsilon > 0$ $\Big\}$ underförstått: hur liten omgivning som helst runt punkten x_0

Själva x_0 måste ligga inne i mängden.

<u>Räkneregler.</u>

$f, g : D \to \mathbb{R}$

x_0 hopningspunkt till D

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = l \pm L$

$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = l \cdot L$

$\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{L}$, förutsatt att $L \neq 0$

<u>Bevis:</u> +

? $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ så att $\forall x \ |x - x_0| < \delta_\varepsilon$

så gäller $\big|\big(f(x) - g(x)\big) - (l + L)\big| < \varepsilon$

$\big|(f(x) - l) + (g(x) - L)\big| \leq |f(x) - l| + |g(x) - L|$

Vet: $|a + b| \leq |a| + |b|$ Triangelolikheten

Om vi lyckas göra detta $< \varepsilon$ så blir även det vänstra uttrycket (som ju är mindre) $|(f \pm g) - (l + L)| < \varepsilon$

ty: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ gm

$$\begin{array}{rl} & |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ + & |g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \hline & |f(x) - l| + |g(x) - L| < \varepsilon \end{array}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_{f_\varepsilon} > 0 \quad \forall x \quad |x - x_0| < \delta_{f\varepsilon} \quad |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_{g_\varepsilon} > 0 \quad \forall x \quad |x - x_0| < \delta_{g_\varepsilon} \quad |g(x) - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon = m(\delta_{f\varepsilon}, \delta_{g\varepsilon}) \; \forall x \; |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

$$|(f(x) + g(x)) - (l + L)| \leq |f(x) - l| + \underbrace{|g(x) - L|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x - x_0| < \delta_{f\varepsilon}$$
$$|x - x_0| < \delta_{g\varepsilon}$$

ÖVNING: Gör om resonemanget för $f(x) - g(x) \to l - L$

ANALYS – FÖRELÄSNING 7

Gränsvärden

1. Definitioner
2. Räkneregler
3. Elementära funktioner
4. Standard gränsvärden

$x_0 = 0 \quad (-1, 0)$

ej omgivning till noll, dy nollan ingår ej!

$f \; D_f \longrightarrow R$

$x \to x_0 \quad x_0$ hopningspunkt till D_f

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ om $\forall$ omgivning V_f till D_f

$\exists$ omgivning U_{x_0} till x_0 så att

$$f(U_{x_0}) \subset V_f$$

x, l ändliga eller oändliga

x_0 ändligt $\in \mathbb{R}$

omgivning, öppet interval (som innehåller x_0)

(t.ex $x_0 - \delta, x_0 + \delta$) symmetriskt

$x_0 = +\infty \quad (A, +\infty)$

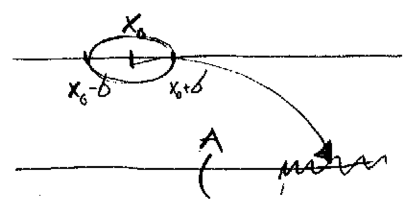
$x_0 = -\infty \quad (-\infty, B)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ om $\forall A \; (< \infty)$

$(f(x) \in (A, \infty))$

$$\exists\, \delta_A > 0 : \forall x \; |x - x_0| < \delta_A \quad f(x) > A$$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ om $\forall A$



$\exists\, B_A : \forall x < B_A \quad f(x) > A$

(omgivning till $-\infty$) $(-\infty, B_A)$

Följd: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ har Gränsvärdet A: reellt tal $\lim_{n \to \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$

UPPGIFT: Visa att $\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a$

Visa att om följden $\to A$, implicerar det

Så går även det aritmetiska medelvärdet mot A.

- Ge även exempel på $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$, $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$

$\because$ då aritmetiska medelvärdet går mot ett gränsvärde, men följden själv ej har detta gränsvärde.

Triangelolikheten

$$\big||a| - |b|\big| \le |a+b| \le |a| + |b| \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Exempel: $a = 3$ $b = 5$

$$\underbrace{|3-5|}_{-2} \le \underbrace{|8|}_{8} \le \underbrace{|3| + |5|}_{8}$$

Varje tal; mindre än, el. lika med sitt absolut belopp!

Bevis: ? $|a+b| \le |a| + |b|$ Generellt bevis:

$$(a+b)^2 = |a+b|^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \le$$

$$\underset{"="}{\le} |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

$ab = |a| \cdot |b|$ om samma tecken
$ab = -|a| \cdot |b|$ om olika tecken

- Likhet om a och b har samma tecken.

$\Rightarrow |a+b| \le |a| + |b|$

? $\big||a| - |b|\big| \le |a+b|$

$$|a| = |(a+b) - b| \le |a+b| + |b|$$

$|a| - |b| \le |a+b|$ Analogt visas $|b| - |a| \le |a+b|$

$\Rightarrow \big||a| - |b|\big| \le |a+b|$

Tillämpningar:

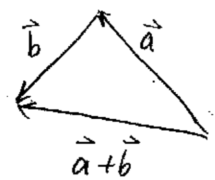
$|a+b| \le |a| + |b|$

$$\frac{1}{|a+b|} \le \frac{1}{\big||a| - |b|\big|} = \frac{1}{|a| - |b|}$$

Om vet att: $|a| > |b|$; sätt $|a|$ först

Ska ngt uppskattas: använd olikheter.

Ersätt $|a+b|$ med ngt mindre. $\frac{1}{|a+b|} \le \frac{1}{\big||a|-|b|\big|}$



- längden av den ena sidan = längden av de andra sidorna i triangeln

UPPGIFT: $\big||a| - |b|\big| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$
Visa. Gör motsvarande hålla! för fallet $\vert a-b \vert$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x\to x_0} g(x) \to L$ Visa Gränsvärdet för produkt av Gränsvärden

? $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) \to l \cdot L$

? $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$: (så att) $\forall x \ |x - x_0| < \delta_\varepsilon$

$$|f(x) \cdot g(x) - l \cdot L| < \varepsilon$$

Tag $\varepsilon > 0$ (godtyckligt)

• Få det till något som vi vet är $< \varepsilon$: $f(x)-l$ och $g(x)-L$; kan vi uppskatta

(47)

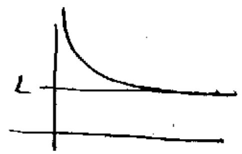
$|f(x)\cdot g(x) - l\cdot L|$ [lägg till, dra ifrån, så att kan bryta ut $f(x)-l$]

$|a+b| \leq |a|+|b|$

$= |\underbrace{f(x)\cdot g(x) - l\,g(x)}_{\text{bryt ut } g(x)} \underbrace{+ l\,g(x) - l\cdot L}_{\text{bryt ut } L}| \leq$

$|f(x)\cdot g(x) - l g(x)| + |l g(x) - lL| =$

$= \underbrace{|g(x)|}_{< |L|+1} \underbrace{|f(x)-l|}_{\text{ok}, < \varepsilon_1} + |l| \underbrace{|g(x)-L|}_{\text{ok}, < \varepsilon_1}$



$g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L$

$\therefore g(x) \geq L$

$|g(x)| \xrightarrow[x\to x_0]{} |L| \Rightarrow |g(x)| < \begin{matrix} 2|L|+1 \\ \frac{3}{2}|L|+1 \\ |L| + \frac{1}{100} \end{matrix}$

Ersätt $g(x)$ m vad som helst större än L. +1 (om $L=0$)

$|f(x) - l| < \varepsilon_1$ för $|x-x_0| < \delta_f$

$|g(x) - L| < \varepsilon_1$ för $|x-x_0| < \delta_g$

$|g(x)| < |L|+1$ för $|x-x_0| < \tilde{\delta}_g$

Kalla $\delta = \min(\delta_f, \delta_g, \tilde{\delta}_g)$ (Snittet av all δ, dvs det minsta gemensamma.)

$\Rightarrow$ för $|x-x_0| < \delta$ gäller

$|f(x)\cdot g(x) - l\cdot L| \leq (|L|+1)\varepsilon_1 + |l|\varepsilon_1 = \varepsilon$

om $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{|L|+|l|+1}$

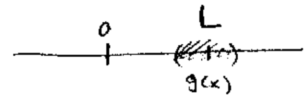
$\varepsilon \cdot$ konstant = lika bra som ε.

(48)

KVOT:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$ $\quad L \neq 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{L}$



för $|x-x_0| < \delta'$ $\quad |g(x)| > \frac{|L|}{2} > 0$

• Bara x tillräckligt nära x_0, är gränsvärdet ej noll. Behöver ej ~~skriva~~ att $g(x) \neq 0$

• Räcker $\boxed{\dfrac{1}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \dfrac{1}{L}}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\dfrac{1}{g(x)} \longrightarrow l\cdot\dfrac{1}{L}$

kommer ej skrivas i tentamen gäller

Sats: f, g $D \to \mathbb{R}$, x_0 hopningspunkt till D

$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

$|g(x)| \leq M \quad \forall x \in D$ ($\forall x$ i en omgivning till x_0)

$\Rightarrow f(x)\cdot g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

Bevis: $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$

$\forall x \; |x-x_0| < \delta_\varepsilon \quad |f(x)| < \varepsilon$ $\qquad |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ skulle ge $|f(x)||g(x)| <$

Tag (godtyckligt) $\varepsilon > 0$

För x : som uppfyller $|x-x_0| < \delta_\varepsilon$ gäller $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \varepsilon \cdot k$

Kan göras godtyckligt litet

$\Rightarrow f(x)\cdot g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

- Om den ena har gränsvärde $=0$, och den andra begränsad, räcker detta bevis

Ex: $\lim_{x \to 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x})$

$\sin(\frac{1}{x})$ saknar gränsvärde när $x \to 0$ Visa det!

$$\left.\begin{array}{l} |\sin(\frac{1}{x})| \le 1 \\ x \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \xrightarrow[x \to 0]{} 0,$$

Sats $\lim_{x \to x_0} f(x) \to l$ $\quad \lim_{x \to x_0} g(x) \to L$ (x_0 ändligt el. oändligt)

$f(x) \le g(x)$ $\forall x$ i en omgivning till x_0 (intervall runt x_0)

$\Rightarrow l \le L$

$f(x) < g(x)$ $\forall x$ i en omgivning till x_0

$\Rightarrow l \le L$ (Även om $f(x) < g(x)$ kan gränsvärdena vara lika)

Ex: $f(x) = 0 \ \forall x$ (En konstant = sitt eget gränsvärde) $\quad g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$

$0 < \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$, $\quad \lim_{x \to x_0} 0 = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x}$

Motsägelsebevis

Bevis Antag motsatsen, dvs: $l > L$ (Vill särа intervallen: $L \quad l$; $g(x) < f(x)$)

Tag $\varepsilon = \frac{|l-L|}{3}$ (Konkret! ei godtyckligt) $\left(< \frac{|l-L|}{2} \right)$ Viktigt.

För $|x - x_0| < \delta_1$ $\quad g(x) < L + \varepsilon = L + \frac{l-L}{3} = \frac{2L+l}{3}$

För $|x - x_0| < \delta_2$ $\quad f(x) > l - \varepsilon = l - \frac{l-L}{3} = \frac{2l+L}{3} > \frac{2L+l}{3}$ enligt antagande

$\Rightarrow$ För $|x - x_0| < \min(\delta_1, \delta_2)$ $\quad f(x) > g(x)$ Motsägelse! >!<

$\Rightarrow l \le L$

- Om man vill visa att ngt inte gäller, räcker det att hitta ett enda ε, för vilken sambandet ej gäller. Om det ej gäller för ett enda, gäller ej sambandet. Alltså kan man välja ett konkret ε. Behöver ej ta ett godtyckligt ε.

Sats: Instängningsregeln (Polis lemmat)

$h(x) < f(x) < g(x)$

$\lim_{x \to x_0} h(x) = L = \lim_{x \to x_0} g(x)$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

ELEMENTÄRA FUNKTIONER

Lista av funktioner, oftast förekommande.

- Potensfunktionerna x^α
- Exponentialfunktionerna a^x $\begin{pmatrix} a > 0 \\ a \ne 1 \end{pmatrix}$
- De trigonometriska funktionerna $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$
- Alla deras inverser $x^{\frac{1}{\alpha}}$, ${}^a\log(x)$, arcusfunktioner
- Alla sammansättningar av funktionerna ovan

$e^{\ln(x)} = x \quad \forall x > 0$ (ty logaritm ej def för $x<0$)

$\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Titta alltid om båda leden är definerade

II $\ln(x^2) = 2\ln(x) \quad \forall x > 0$ Farlig! man märker ej om fel.

Kravet VL $\to x \neq 0$ HL $\to x > 0$

$\tan(\arctan x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

III $\arctan(\tan x) = x \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Farlig likhet: alla arcus funk. $\arctan(\tan(2\pi)) = 0$ Kolla noga. Gäller endast på de intervall där arcusfunktionernas värden finns.

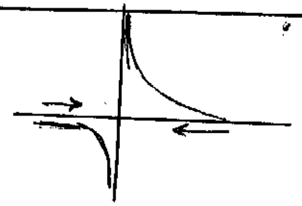
$(\sqrt{x})^2 = x \quad \forall x \geq 0$

III $\sqrt{x^2} = x \quad \forall x \geq 0$ (falsk för neg x)

$x \ln x$

$x \to 0$

$x > 0$



$x \to 0^+$

$x \to 0_+$

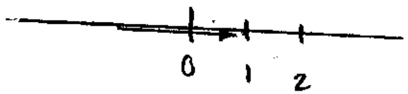
$x \to +0$

$x \to 2+0$

$x \to 2^+$

$x \to 2_+$

$\left.\begin{matrix} x \to 1 \\ x < 1 \end{matrix}\right\}$ $x \to 1^-$, $x \to 1_-$, $x \to 1-0$



GRÄNSVÄRDEN

def höger gränsvärde

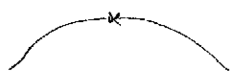
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ om $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta_\varepsilon > 0$ så att : $\forall x$:

$|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, $x > x_0$ gäller $|f(x) - l| < \varepsilon$

$x_0 < x < x + \delta_\varepsilon$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$



Det finns ett gränsvärde, - det finns ett fr. höger, ett

Annars finns: bara höger eller bara vänstergränsvärde

Sats (polislemmat)

$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x$ i en omgivning till x_0 (för vara $\neq \infty$)

$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$ (för var $\neq \infty$)

förutsättningar

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

slutsats

1. Formell kommentar: Om man skulle göra ett motsägelsebevis, ska motsatsen till satsens slutsats antas. (det understrukna) (förutsättningarna rör vi ej över)

Dvs: antag att gränsvärde ej existerar eller: det finns ett gränsvärde som ej $= L$

2. Om det finns ett gränsvärde för t, följer av olikhetssatsen att det är L

Bevis: $h(x) - L \leq f(x) - L \leq g(x) - L$

$|f(x) - L| \leq \max(|g(x) - L|, |h(x) - L|)$ det största av de omgivande 2. beloppen

Ex: $-5 \leq t \leq -3$, $|t| \leq 5$ Osäker: om min el max: prova m. hjälp ex exempel!

Tag $\varepsilon > 0$ (godtyckligt)

$\exists \, \delta_{g\varepsilon} > 0 : \forall x \; |x - x_0| < \delta_{g\varepsilon}$ ska ge: $|g(x) - L| < \varepsilon$

$\exists \, \delta_{h\varepsilon} > 0 : \forall x \; |x - x_0| < \delta_{h\varepsilon}$ som ger $|h(x) - L| < \varepsilon$

Låt $\delta_{f\varepsilon}$ vara $\min(\delta_{g\varepsilon}, \delta_{h\varepsilon})$ (det minsta av)

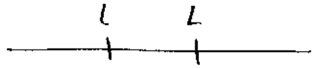
ty om $|x - x_0| < \delta_{f\varepsilon}$ $\begin{cases} \Rightarrow |x - x_0| < \delta_{g\varepsilon} \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon \\ \Rightarrow |x - x_0| < \delta_{h\varepsilon} \Rightarrow |h(x) - L| < \end{cases}$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)$ finns och är $= L$.

Det svåraste: oftast: att veta om något finns el. ej.

ÖVNING: Visa att

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L\end{array}\right\} \Rightarrow l = L$$



Antag motsatsen, dvs att L och l befinner sig på olika platser på tallinjen. Hitta omgivningar som ej har med varandra att göra.

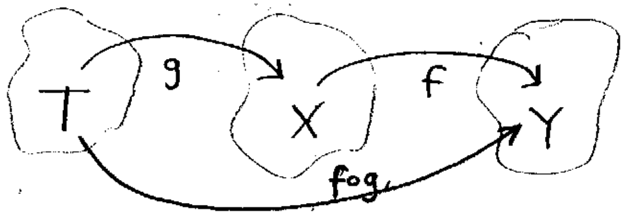
Ex:

$x^2 \xrightarrow[x\to 2]{} 4$ $\quad f\circ g(t) = f(g(t))$

$e^{x^2} \xrightarrow[x\to 2]{} e^4$ $\quad$ måste bevisas

Sats (Sammansatta funktioner)

f, g $\quad$ (f måste vara definierad där g har sina värden)



$D_f \subseteq V_g$

$$\left.\begin{array}{l} g(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} x_0 \\ f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l \end{array}\right| \Rightarrow f\circ g(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} l$$

Bevis: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 : \forall x \ |\overset{\substack{(g(t)\to x_0)\\ g(t)}}{x} - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad |f(x) - l| < \varepsilon$ $\quad x = g(t)$

för detta $\delta_{(\varepsilon)}$ $\exists \eta(\delta_{(\varepsilon)}) > 0 : \forall t \ |t - t_0| < \eta \quad |g(t) - x_0| < \delta_{(\varepsilon)}$

I den innersta funktionen väljer vi :: ett konkret ε

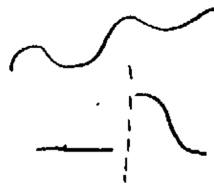
Tag t så att $|t-t_0| < \eta(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow |g(t) - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \exists \lim_{t\to t_0} f(g(t)) = l$$

Man vill att $f(x)$ ska vara nära sitt gränsvärde.
För att att $g(t)$ ska vara nära x_0, måste vi vara δ nära
för att t

Kontinuerliga Funktioner

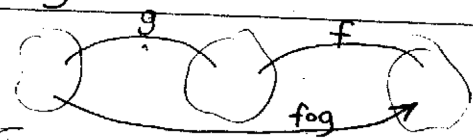
def $f: D_f \to \mathbb{R}$
$x_0 \in D_f$
f kontinuerlig i x_0 om
$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$



$f, g : D \to \mathbb{R} \quad x_0 \in D$

f, g : kontinuerliga i x_0

$\Rightarrow f \pm g$ kontinuerliga i x_0
$f\cdot g$ — " —
$\frac{f}{g}$ — " — (om $g(x_0) \neq 0$)



$\left\{\begin{array}{l} t_0 \text{ (Punkt)} \\ g \text{ kontinuerlig i } t_0 \\ \quad g(t_0) = x_0 \end{array}\right.$ $\quad \left\{\begin{array}{l} x_0 \\ f \text{ kontinuerlig i } x_0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow f \circ g$ kontinuerlig i t_0

def. f kontinuerlig i X (en mängd) om
f kontinuerlig i $x \ \forall x \in X$

De elementära funktionerna

Potensfunktioner

$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ (α fixt för varje potensfunktion, varierande bas)

$x, x^2, x^3, \dots, x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\left.\begin{array}{l} x^0 \overset{def}{=} 1 \\ x^{-n} \overset{def}{=} \dfrac{1}{x^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} x \neq 0$ (negativa potenser kräver $x \neq 0$)

$\alpha \in \mathbb{Q}$ Rationella tal

$\alpha = \frac{p}{q}$ $\quad p \in \mathbb{Z}$ heltal, $\quad q \in \mathbb{N}$ naturligt

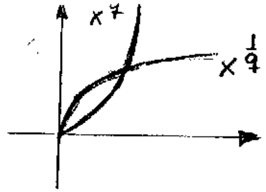
(om α negativt, tillskrivs täljaren minustecknet. Nämnaren alltid positiv)

$x^{\frac{p}{q}} \overset{def}{=} \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$?

$x^{\frac{1}{q}}$ = inversen till y^q (hur vet jag om den finns?)

Om q jämnt krävs att $x > 0$ (annars ei injektiv)

Krav som ställs för alla potensfunktioner: $\boxed{x > 0}$



$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Q}$

$\alpha \in \mathbb{R}$, men $\alpha \notin \mathbb{Q}$ irrationellt Ex: $\sqrt{2}$

$\Rightarrow \exists \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \quad \alpha_k \in \mathbb{Q}$ så att $\alpha_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \alpha$ (ex: π: 3; 3,1; 3,14; 3,141)

Krav: x^α kontinuerlig funktion av α.

$x^{\alpha_k} \longrightarrow x^\alpha$ (att gränvärdet finns bevisas ej nu)

EXPONENTIALFUNKTIONER

$a^x \quad (a \neq 1) \qquad a = 1 \ : \ a^x = 1$

Samma process som för x^α: (Fast med x ist. för α)

$x \in \mathbb{N}$

$x \in \mathbb{Z}$

$x \in \mathbb{Q}$

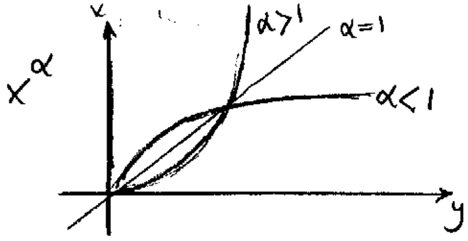
$x \in \mathbb{R} \leftarrow$ kontinuerlig

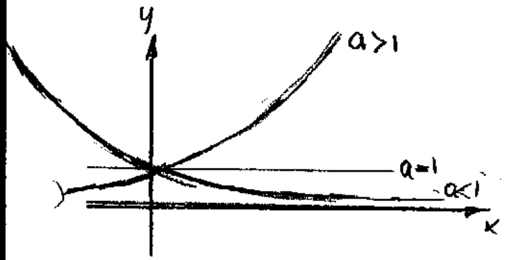
LOGARITMFUKTIONER

def: Inversen till $^a\log \quad \underline{(a \neq 1)}$

$\left(f(x)\right)^{g(x)} \overset{def}{=} e^{g(x) \cdot \ln(f(x))} \quad \left(a^{g(x)\, ^a\log(f(x))}\right.$

För de potenser vi känner, gäller detta samband. Alltså antas detta per definition.





$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$

$\boxed{a>1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty$$

Bevis: $a>1 \Rightarrow a = 1+p$, där $p>0$

vill ersätta x m. ett naturligt tal, men få $(1+p)^x$ större än detta.

$$\frac{(1+p)^{x}}{x^\alpha} \geq \ ?$$

$n = [\text{heltalsdelen av } x] =$ det största heltal $\leq x$

(Ex: $[\pi] = 3$ $[2] = 2$ $[-\pi] = -4$)

$x \geq n$

$x < n+1$

n x n+1

1) Tag $\alpha = 1$

ngt större än ngt som $\to \infty$ går själv mot $\to \infty$

$$\frac{(1+p)^x}{x} \geq \frac{(1+p)^n}{n+1} > \frac{\binom{n}{2}p^2}{(n+1)} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}\cdot p^2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

$(1+p)^n = 1 + \binom{n}{1}p + \binom{n}{2}p^2 + \dots$ passar ej

... alltså passar alla termer efter $\binom{n}{2}p^2$

2) $\alpha \neq 1$ $(\alpha>0)$ $\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{a^{x/\alpha}}{x}\right)^\alpha$ $b = a^{1/\alpha} > 1$

$$\Rightarrow \frac{b^x}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha}_{\frac{a^x}{x^\alpha}} \longrightarrow +\infty$$

använt kontinuiteten av funktionen. När funk går mot $\to\infty$, går ∞

ANALYS - FÖRELÄSNING 9

2001/9/21 (59)

Sats $\dfrac{a^x}{x^\alpha} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ förutsatt att $a > 1$

Bevis.

$(\alpha > 0\ ,\ \alpha \geq 0 = \text{uppenbart})$

Sats $\dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$ $\boxed{\text{för } \alpha > 0}$

för ej vanaco $\longrightarrow$

Bevis: Tag för $\alpha = 1$

$\dfrac{\ln(x)}{t}$ $[\text{Sätt } \ln(x) = t]$, $\Rightarrow \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{t}{e^t} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

$\to (x \to \infty)$

$t = \ln(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

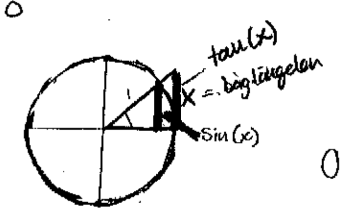
$\Rightarrow$ Gäller för $\alpha = 1$

Låt $\alpha > 0$ vara godtyckligt

$$\frac{\ln(x)}{(x)} = \frac{\ln(x^\alpha)}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\ln(x^\alpha)}{x^\alpha} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

Sats: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ (Bygger på den geom. tolkningen av $\sin(x)$)

Bevis:

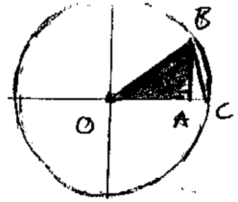


$\boxed{x = \text{mäts i radianer !!}}$

$0 < \frac{\pi}{2} < x \Rightarrow$

$\sin(x) < x < \tan(x)$

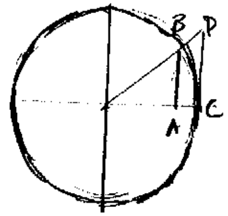
(60)



$A_{OAB} < \overset{\text{av den}}{A_{OBC}} <$ sektorn OCB

$\frac{1}{2}\underset{(\cos(x))}{OA} \cdot \sin(x) < \frac{1}{2} \cdot \underset{\text{basen}}{1} \cdot \underset{\text{höjden}}{\sin(x)} < \underset{\text{andel}}{\frac{x}{2\pi}} \cdot \pi \cdot \underset{\text{radien}}{1^2}$

$\underbrace{\sin(x) < x}_{\text{första delen av beviset klart.}}$



$(\underbrace{A \text{ sektorn OCB}}_{\frac{x}{2}} < A_{AOCD}$

$\frac{x}{2} < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan(x) \Rightarrow x < \tan(x)$

$-0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\sin(x) < x < \tan(x)$

$\dfrac{\sin(x)}{x} < 1$

$x < \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow \cos(x) < \dfrac{\sin(x)}{x}$

$\cos(x) < \dfrac{\sin(x)}{x} < 1$ $(\cdot -1) = -1 < -\dfrac{\sin(x)}{x} < -\cos(x)$

Instängningsregeln

Uppskattning av $0 < 1 - \dfrac{\sin(x)}{x} < 1 - \cos(x)$

Vill bli av med $\cos(x)$, ty vi vet ej om den är kontinuerlig

$$0 < 1 - \frac{\sin(x)}{x} < 1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Låt $x \to 0^+$ $\to 0 \leq \ldots\ldots \leq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{\sin(x)}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$: $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 1$

$= (-x) \to 0^+ \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

I gränsövergångarna måste man tilldela tillhåter.

[Fungerar bara på $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, men detta är ingen restriktion, ty vi undersöker fall då $x \to 0$, och 0 ligger i detta intervall!]

($-\frac{\pi}{2} < x < 0$ $(-x)$ positiv x - negativ)

Sats: Följden $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ är konvergent

Bevis: Vi ska visa att följden är uppåt begränsad, och (monotont) växande.

3

1/ Uppåt begränsad ?

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{(binomialsatsen)}}{=} 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}}_{1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}}_{\text{ersätt m 1}} + \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{n^3}}_{\text{ersätt m 1 = blir mindre än ovan}} + \dots + \frac{1}{n^n} <$$

$\left(n^n = \text{större än } n! \Leftrightarrow \frac{1}{n^n} < \frac{1}{n!}\right) =$

$$< 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{(geometrisk summa, m kvot } \frac{1}{2}\text{)}}$$

$\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$ ersätt allt m. 2:or

$$= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$$

tag bort neg. tal = ngt ännu större fås

2/ Monotont växande (med växande n) ?

En term i binomialutvecklingen (en godtycklig term)

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \overset{\text{def. för binomial-koefficienten}}{=} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\dots\cdot k}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$= \frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}$$

(Ändra till $n+1$, vad händer i termerna?) = de växer!

när n växer, $\Rightarrow \frac{k}{n}$ avtar $\Rightarrow 1-\frac{1}{n}$ växer

$$\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} < \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^2}$$

utvecklingen för $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ innehåller termer som är termvis större och dessutom fler

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$\Rightarrow$ Följden är växande och uppåt begränsad.

$\Rightarrow$ Den är konvergent.

def: $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\substack{n\to\infty \\ \to e}} < \underbrace{\left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)}_{e \;\; n\to\infty} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Grov uppskattning

Hur vet man att man gör en rätt uppskattning? – vet aldrig

Ibland kan man göra en för grov uppskattning $\Rightarrow$ blir ej givande.

- antingen är påståendet fel. gör ej att bevisa
- eller har gjort för grova uppskattningar.

$\Rightarrow$ då stryker man uppskattningen, börjar om

$$1+1+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dots+\frac{1}{n!} < \text{(ersätt alla faktorer m. 3) (geometrisk följd)}$$

$$< 2+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^{n+2}}\right) < 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = 2{,}75$$

Tag ytterligare en term, ersätt allt med 4:or ist. för 3:or

$\Rightarrow$ ännu bättre uppskattning.

Sats: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ givet att $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

$\boxed{x\to-\infty}$ ← övning skriv om. blanda in $|x|$. få samma lim.

Bevis. $n=[x]$ heltalsdelen av x

$n \le x < n+1$, $x \to +\infty \Leftrightarrow n\to+\infty$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ersätt m. ngt större; ersätt m. ngt mindre

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 1\cdot e = e$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e}\cdot\frac{1}{\underbrace{1+\frac{1}{n+1}}_{\to 1}} \to e$$

$\Rightarrow$ (Polislemmat) Även den instängda funktionen $\to e$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow[x\to\infty]{} e$$

Sätt $t=\frac{1}{x}$ $\quad x\to+\infty \Leftrightarrow t\to 0^+$

$x\to-\infty \Leftrightarrow t\to 0^-$

Gränsvärdet är e i både $\pm\infty$

$$\Rightarrow (1+t)^{1/t} \xrightarrow[t\to0]{} e$$

---

ln är en kontinuerlig funktion (dess kontinuitet postuleras; bevisas ej nu)

<u>ln kontinuerlig</u>:

$$\Rightarrow \ln(1+t)^{1/t} \xrightarrow[t\to0]{} \ln(e)$$

$$\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to0]{} 1$$

$\dfrac{e^x-1}{x}$ [Exponentialfunkt. och logaritmen är varandras inverser]

Sätt $x=\ln(1+t)$

$x\to0 \Leftrightarrow t\to0$

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^{\ln(1+t)}-1}{\ln(1+t)} = \frac{\cancel{1}+t-\cancel{1}}{\ln(1+t)} = \frac{t}{\ln(1+t)} \xrightarrow[t\to0]{} 1$$

$\to$ Samma som: $t=e^x-1$ $\quad$ Följer av att: $\frac{\ln(1+t)}{t}\xrightarrow[t\to 1]{} 1$

$$\frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} \xrightarrow[t\to0]{} \text{även mot } 1$$

DERIVATOR

(65)

def: f definerad i en omgivning till x_0

Om gränsvärdet $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ finns,

så kallas f deriverbar i x_0, och gränsvärdet kallas f:s derivata i x_0, och betecknas $f'(x_0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \left(\text{om } \overset{\text{gr-värdet finns}}{\lim \exists}\right)$$

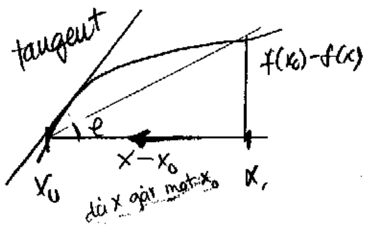
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \quad [h = x - x_0]$$

Om f är deriverbar i varje punkt i D_f, så kallas f deriverbar i D och om man låter punkten variera i D, får man $f'(x)$ som en funktion i D.

Derivata: Hastigheten med vilken funktionen ändras.

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ kallas: differenskvot
(kvot mellan 2 skillnader)
ger en medelhastighet.

Då:
$x \to x_0$ ger momentan hastighet = hastigheten i just en punkt.



Geometrisk tolkning

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \tan e$ Sekantens lutning

$f'(x_0)$ tangentens lutning i x_0

(66)

Sats f deriverbar i $x_0 \Rightarrow f$ är kontinuerlig i x_0

(Det omvända är ej alltid sant!) $\not\Leftarrow$

Bevis $|f(x) - f(x_0)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ Funktionen kontinuerlig

omskrivning. vill komma fram till derivatan

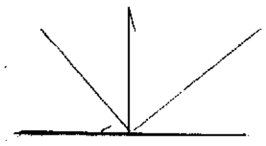
$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \right) = 0$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) \longrightarrow f \text{ kontinuerlig i } x_0$$

Ex: Kontinuerlig, men ej deriverbar.

$f(x) = |x|$ Kontinuerlig överallt, även i 0.



$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$ högerderivata

$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$ vänsterderivata

Olika gränsvärden från höger och vänster.

$1 \neq 1 \Rightarrow f(x) = |x|$ ej deriverbar i punkten 0.

Geometriskt: Det saknas tangent i punkten 0.

Det finns kontinuerliga, icke-deriverbara funktioner.

Derivator

def: f kallas deriverbar i x_0, där $x_0 \in D_f$

tillsammans med en omgivning om . . .

$\exists \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

f:s derivata i x_0

$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset D_f$

$|h| < \delta$

---

def: f deriverbar i D om f deriverbar $\forall x \in D$

$f'(x)$ funktion av x, $x \in D$

Om f' deriverbar, så $(f')' = f''$

"f's andra-derivata"

$f''', f^{IV}, f^{V} \dots$

$f'' = f^{(2)}$ $\quad f' = f^{(1)}$ $\quad f = f^{(0)}$

deriveras induktivt $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$

Sats: f deriverbar i $x_0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ kontinuerlig i x_0

Sats: f, g deriverbara i $x_0 \Longrightarrow$

(i) $f+g$ deriverbar i x_0, och $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ (αf) deriverbar i x_0, och $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$

(iii) fg deriverbar i x_0 och $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(iv) $\frac{f}{g}$ deriverbar i x_0 och $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x_0))^2}$

$g(x_0) \neq 0$

Subtraktion: $f-g = f + (-g)$

Bevis: (iii)

$\frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$

$= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$

$= \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} g(x_0+h) + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(dy g kontinuerlig i x_0
enligt satsen ovan)

Induktivt:

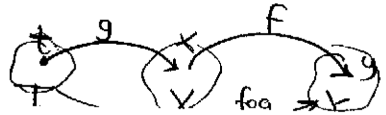
$(\underbrace{f_1 f_2 \cdots f_n}_{g})' = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_n'$

Sats Kedjeregeln $f \circ g$

g deriverbar i t_0, f deriverbar i $x_0 = g(t_0)$

$\Rightarrow$ $(f \circ g)$ deriverbar i t_0, och $(f \circ g)' = f'(x_0) g'(t_0)$

$f(g(t))' = f'(g(t))g'(t)$



Sats: (Derivata av invers funktion), f, f^{-1}; f^{-1} kont i $y_0 = f(x_0)$

f deriverbar i x_0, $f'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}$ deriverbar i $y_0 = f(x_0)$ och

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

BRISTFÄLLIGT OUN. BEVIS:

$f^{-1}(f(x)) = x$ | Derivera kedjeregeln

$(f^{-1})' f(x_0) f'(x_0) = 1 \quad \overset{x=x_0}{\Leftrightarrow} (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Detta bevis förutsätter att f^{-1} är deriverbar. Vi vet ej om den existerar. Men om den existerar så visar den vad derivatan blir

Bevis (invers funktion) Riktigt

$$\frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k} \qquad \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Vill visa: $\exists \lim_{k \to 0} \frac{\cdots}{\cdots}$ och $\lim \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Differenskvoten bör :: uppföra sig som 1 genom f:s differenskvot

Då kallar vi täljaren för h.

Låt: $h = f^{-1}(y_0+k) - \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0} \Rightarrow x_0 + h = f^{-1}(y_0+k)$ $\quad / f$

$x = f^{-1}(y)$

$x - x_0 = f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)$

applicera f på båda sidor

ta funktionen f av båda sidor

$\Rightarrow f(x_0+h) = y_0 + k = f(x_0) + k$

$\Rightarrow k = f(x_0+h) - f(x_0)$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{f'(x_0)}$$

KRAV

1. När $k \to 0 \overset{?}{\Rightarrow}$ att $h \to 0$
2. $h \neq 0$

2. $h \overset{?}{\neq} 0 \qquad h = f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)$

f^{-1} inverterbar $\Rightarrow f^{-1}(y_0+k) \neq f^{-1}(y_0) \Rightarrow h \neq 0$

(= injektiv)
(olika funk.svarden resulterar i olika värden)

Därför är h aldrig 0!

1. ? $k \to 0 \Rightarrow h \to 0$?

f^{-1} kontinuerlig i y_0

$$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}_{h} \xrightarrow[k \to 0]{} 0$$

DERIVATOR AV ELEMENTÄRA FUNKTIONER

$x^{\alpha} \underset{\text{pot.funk}}{\overset{\text{definieras mha}}{=}} e^{\alpha \ln(x)}$ (Godtycklig potens)

$(x^n)' = n x^{n-1}$

Bevis: $\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \overset{\text{Binomial-satsen}}{=} \frac{x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \dots + h^n - x_0^n}{h}$

$= n x_0^{n-1} + h \underbrace{\left[\binom{n}{2} x_0^{n-2} + \dots + h^{n-2}\right]}_{\text{stabilt}} \xrightarrow[h \to 0]{} n x_0^{n-1}$

n fixt
x_0 fixt

$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + c$

Derivata av polynom mha satsen ovan.

$(e^x)' = e^x$

Bevis: $\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} e^{x_0}$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ Övning: Härled m.h.a satsen för derivata av invers funktion. Nedan kommer att ges ex. på hur denna sats kan användas.

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ $\quad \ln|x| \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$

$(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln(x)})' = e^{\alpha \ln(x)} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$ där

Formeln gäller alltså för godtyckliga α. (ej bara heltal som

$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln(a)} \cdot \ln(a) = a^x \ln(a)$

TRIG. FUNKTIONER Kan man derivera en, kan man härleda även derivatan av de andra.

$(\sin(x))' = \cos(x)$

Bevis: $\frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} \overset{\text{formeln för sin av en summa}}{=} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \sin(h)\cos(x_0) - \sin(x_0)}{h} =$

• Vill få fram cos!

$= \frac{\sin(h)}{h} \cdot \cos(x_0) + \sin(x_0) \frac{\cos(h) - 1}{h}$

$= \frac{\sin(h)}{h} \cos(x_0) - \sin(x_0) \frac{-\cos(h)+1}{h} = \frac{\sin h}{h} \cos(x_0) - \sin(x_0) \frac{2\sin^2(\frac{h}{2})}{h}$

$1 - \cos h$, $h \to 0$

$\left|\frac{2\sin^2(\frac{h}{2})}{h}\right| < \frac{2\left(\frac{|h|}{2}\right)^2}{|h|} = \frac{1}{2}|h| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \Bigg\} \xrightarrow[h \to 0]{} \cos(x_0)$

ersätter $\sin(\frac{h}{2})$ med $\frac{|h|}{2}$

Varje bevis sker i en fix punkt.
Sedan kan man säga att x kan tillåtas variera, ty samma sak hade kunnat göras i varje punkt.

$(\cos(x))' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = -\sin(x)$ M.h.a kunskap om derivatan för sin(x)

$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$(\cot(x))' = \qquad = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

ARCUSFUNKTIONERNAS DERIVATOR

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$(\arcsin(x))'$, måste gå via satsen för invers funktion, använda sig av derivatan.

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Krav:
- $f'(x_0) \neq 0$
- $\arcsin(x_0)$ = kontinuerlig

__Bevis:__ $x_0 = \sin(t_0)$

$\cancel{(\arcsin(x_0))'}$ $(\arcsin(x_0))$ = tal derivatan av ett tal = konstant = 0. Skriv såhär istället:

$$(\arcsin(x))'\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{\cos(t_0)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x_0))} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$$

__Kommentarer:__

Krävs pga inverterbarhet

$x_0 = \sin(t_0)$ $\quad t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\frac{1}{\cos(t_0)}$ $\quad \cos(t_0) \neq 0$

$\Rightarrow t_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_0 \in (-1, 1)$

cos positiv i hela intervallet $\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Alltså kan vi ersätta med $+\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x_0)}$ och ej $-$.

__Sats__ (Bevis i Appendix C)

f strängt monoton och kontinuerlig på ett intervall,

$\Rightarrow$ f är inverterbar, och f^{-1} är också strängt monoton och kontinuerlig.

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

__Bevis:__ $x_0 = \tan(t_0)$, $\quad t_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$t_0 = \arctan(x_0)$

$$(\arctan(x))'\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{(\tan(t))'}\Big|_{t=t_0} = \cos^2 t_0 =$$

cos av arctan kan vi redan

$$= \frac{\cos^2 t_0}{\cos^2 t_0 + \sin^2 t_0} = \frac{1}{1+\tan^2(t_0)} = \frac{1}{1+x_0^2}$$

ONSDAG: Bevis av kedjeregeln:

Kolla innan i boken!!!

ANALYSFÖRELÄSNING NR 11

- 2 olika sätt att dra slutsatser → deduktion → induktion

Deduktion: Från allmänna fallet, dras slutsatser om specialfal

Induktion: Från specialfall dra slutsatser om allmänna fallet.

Matematik – i princip deduktiv

Induktion – i princip otillåten, vissa undantag.

1 = ex: då det handlar om ändligt många objekt

2 = uppräkneligt många (oändliga) man går att skriva

Ex: $991n^2+1 = k^2$ $n, k \in \mathbb{N}$

Det första n, första n, för vilket $\exists k$ så att ovanstående gäller är:

$n = 12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767$

Alltså: det räcker ej att testa flera hundra fall.

En lösning kan finnas mycket längre fram.

Naturligt tankegångssätt Påståendenas väg

1. "Gör experiment" – kolla specialfall, för hand el med datorn
2. Hypotes
3. Bevis

$\mathbb{R}$

Kan tillämpas på specialfall. (Vilket fall som helst)

Går ej att testa alla fall, ty $\mathbb{R}$ de reella talen är ouppräkneligt många. (Människosläktet: uppräkneligt många, en tanke tar en viss tid, går aldrig att tänka på alla reella tal

---

Ett annat bevis än bokens, på kedjeregeln.

Först: Bevis av kedjeregeln i ett specialfall.

Sats: f, g

g deriverbar i t_0, f deriverbar i $x_0 = g(t_0)$

$\Rightarrow f \circ g$ är deriverbar t_0 och $(f \circ g)'(t_0) =$

$$= \left(f(g(t))\right)'\Big|_{t=t_0} = f'(g(t_0))g'(t_0) = f'(x_0)\cdot g'(t_0)$$

derivera först, sätt sedan i t_0

- Betona att allt äger rum i enskilda punkter. Det gäller varje punkt i mängden. Därför blandar vi in x_0 och t_0, istället för att skriva bara x och t. Men vi måste derivera först, och sedan sätta in t_0, ty annars blir derivatan av en konstant noll.

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(x(y))}$$

$f(x) = y$

Ett sätt att tala om funktioner, utan att använda variabler.

sin

ln

$\sqrt{\cdot}$

$\cdot^2$

$f(\cdot)$

Bevis i fallet $g(x) \neq g(x_0)$ $\quad k = g(t_0+h) - g(t_0)$

$$\frac{(f\circ g)(t_0+h) - (f\circ g)(t_0)}{h} = \frac{f(\overbrace{g(t_0+h)}^{g(t_0)+k}) - f(g(t_0))}{h} =$$

$$= \underbrace{\frac{f(g(t_0)+k) - f(g(t_0))}{k}}_{f'(g(t_0))} \cdot \underbrace{\frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h}}_{g'(t_0)} \overset{?\ \neq 0 \text{ ei garanterat}}{=} f'(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$$

$h \to 0$, $k \to 0$ ty g kontinuerl

Beviset gäller då $g'(t_0) \neq 0$

(gränsvärdet av $g(t_0+h) - g(t_0)$)

$g'(t_0) \neq 0 \implies$ för tillräckligt små $h \neq 0$

$$\frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h} \neq 0 \quad = \quad \text{Den inre derivatan skild från noll}$$

Bevis av kedjeregeln (EJ BOKENS)

Sats f, x_0 inre punkt för D_f

f deriverbar i $x_0 \iff \exists A \in \mathbb{R}$ s.a

$f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + (x-x_0)\varphi(x)$,

där $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ (krav)

$A = f'(x_0)$

Kommentar: (hör ei till beviset)

$$f(\overset{x}{x_0+h}) = f(x_0) + f'(x_0)\,\overset{0}{h} + \overset{0}{h}\,\overset{0}{\varphi}(x_0+h)$$

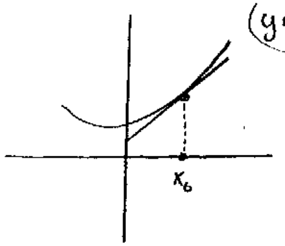
Om vi glömmer "felet" är den försumbar, mindre än h

$\lim\limits_{h\to 0} \varphi(x_0+h) = 0$

$y - f(x) = k(x-x_0)$

$(y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0))$

tangenten i $(x_0, f(x_0))$



Bevis: (ekvivalens. Dela upp. Bevisa åt båda håll).

$\boxed{\Rightarrow}$ Givet är att f är deriverbar i x_0

$$= \exists \underbrace{f'(x_0)}_{\text{tal, oberoende av } x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff$$

$$\iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 \quad \text{(gemensam nämnare)}$$

$$\iff \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}}_{\varphi(x)} = 0$$

Kalla för $\varphi(x)$ $\quad$ lös ut $f(x)$

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0 \;;\; f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{A = \text{derivatan finns!}}(x-x_0) + (x-x_0)\varphi(x)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Givet: $\exists A : f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + (x-x_0)\varphi(x)$,

$\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$

Bilda differenskvoten

$$\text{Då: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} $$

(def för derivbarhet)

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \Rightarrow f \text{ deriverbar i } x_0$$

och $f'(x_0) = A$

Deriverbarheten uttrycks enbart i produkter = praktiskt. Behöver ej bekymra oss om division m. ngt som skulle kunna vara noll.

Funktion av flera variabler, då blir A en matris. Lätt att generalisera denna sats. Gäller i många fler fall än division, ty vi kan multiplicera vektor, ..., odyl, men ej dividera.

Bevis för kedjeregeln

f deriverbar i x_0

Sats för sammansatt funkt. används i bevis

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varphi(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$$

$$\begin{pmatrix} x = g(t) \\ x_0 = g(t_0) \end{pmatrix}$$

g också deriverbar

$$f(g(t)) = f(g(t_0)) + f'(g(t_0))\big(g(t)-g(t_0)\big) + \big(g(t)-g(t_0)\big)\varphi(g(t))$$

x är g(t), ty vi har en sammansatt funktion

$$= f(g(t_0)) + \underbrace{f'(g(t_0))\big(g'(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\delta(t)\big)}\, +$$

$$\lim_{t\to t_0} \delta(t) = 0$$

$$+ \big(g'(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\delta(t)\big)\varphi(g(t)) =$$

resttermen: allt övrigt

$$= f(g(t_0)) + f'(g(t_0))g'(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\theta(t)$$

Ser ut som vi vill, för att dra slutsatser om deriverbarhet

[Koll att restterm verkligen går mot noll = försumbar]

$$\theta(t) = \underbrace{f'(g(t_0))}_{\text{tal}}\underbrace{\delta(t)}_{\substack{\to 0 \\ t\to t_0}} + g'(t_0)\varphi(\underbrace{g(t)}_{\to t_0}) + \underbrace{\delta(t)}_{\to 0}\underbrace{\varphi(g(t))}_{\to 0} \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$$

$\varphi \to 0$

$\Rightarrow f\circ g$ är deriverbar i t_0, och

$$\big(f(g(t))\big)'\Big|_{t=t_0} = f'(g(t_0))\,g'(t_0)$$

Använt oss av att
g kontinuerlig i t_0, ty g deriverbar.

- svårt bevisa kontinuerliga funktioners egenskaper
- lättare . —"— deriverbara —"— .

Kontinuerliga funktioners egenskaper

summa och dyl bevisat redan ty kontinuitet = gränvärden.

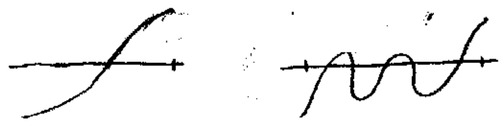
Satsen (om mellanliggande värden)

f kontinuerlig i $[a,b]$

Variant.

1/ Om $f(a)\,f(b) < 0$ (= de har olika tecken)

$\Rightarrow$ så $\exists\ \underset{\text{(en punkt)}}{\xi} \in (a,b)$ s.a $f(\xi) = 0$



($\exists$ betyder: det finns MINST ett.)

Måste alltså ha skurit axeln.

2/ om $f(a) = A$, $f(b) = B$ $A \neq B$, och

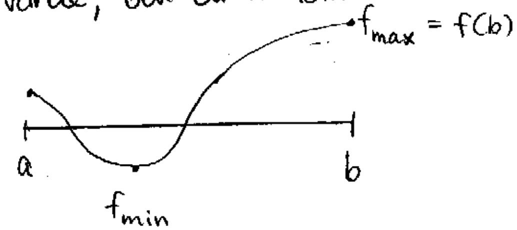
om C mellan A och B

vet att den finns, men kan ej säga vilken punkt

så $\exists\ \xi \in (a,b)$ så att $f(\xi) = C$

Sats f kontinuerlig i $[a,b]$ (Slutet, begränsat intervall)

$\Rightarrow$ f antar både ett största värde, och ett minsta värde i $[a,b]$

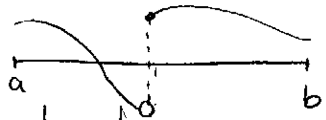


Går ej att släppa på några av förutsättningarna ovan – generalisera.

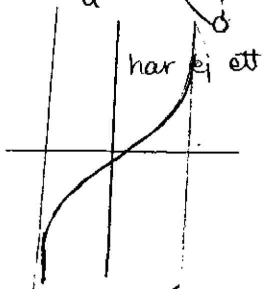
Mot exempel till generaliseringar

1) f diskontinuerlig

går ej



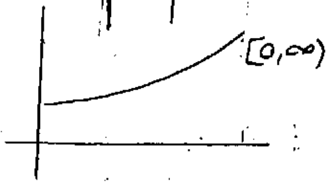
har ej ett minsta värde



2) (a,b) $\tan(x)$ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

kontinuerlig, men saknar största och minsta värde

3) $[a, \infty)$ e^x

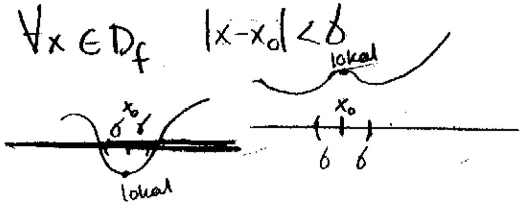


---

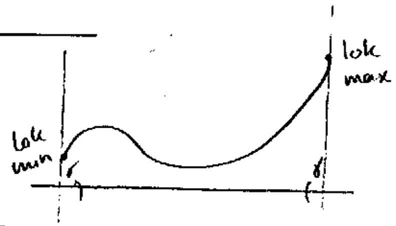
def f har lokalt $\overset{\text{minimum}}{\text{maximum}}$ i x_0 om

$\exists \delta > 0$ så att $\forall x \in D_f$ $|x-x_0| < \delta$

$f(x) \overset{\geq}{\leq} f(x_0)$



Strängt lokalt max. $f(x) < f(x_0)$
Strängt lokalt min. $f(x) > f(x_0)$



Sats f har lokalt extremum (= minimum el. maximum) i en inre punkt x_0.

f deriverbar i x_0

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

$\Leftarrow\!\!\!\!\!/$ motsatsen ej sann
Ex: $f(x) = x^3$

Bevis: Maximum

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)$$

$x \to x_0^-$ $x - x_0 < 0$

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

$x \to x_0^+$ $x - x_0 > 0$

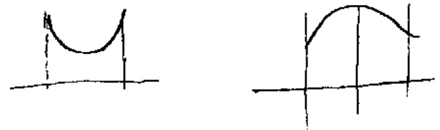
$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$$

Stationär punkt: $f'(x_0) = 0$

LOKALA EXTREMA

extremum, extrema

lok min, lok max



globalt minimum = minsta värde

globalt maximum = största värde

Största och minsta värde

1) $f'(x)=0$ bland lösningarna finns alla inre lokala extrema

2) f(intervallets ändpunkter) kan vara lokala/globala extrema

3) Punkter där f ej är deriverbar

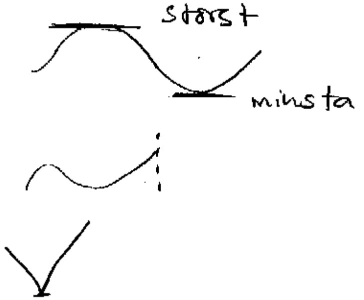
$f\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

lösning till $f'=0$, a, b, där $\nexists f'$

1)

2)

3.



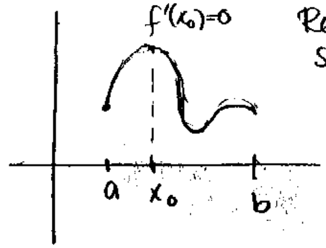
Sats: $f\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

f har lokala extrempunkter i en inre punkt x_0

f deriverbar i x_0

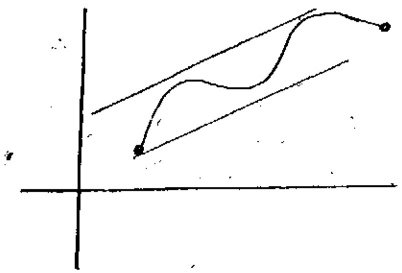
$\Longrightarrow f'(x_0)=0$

Medelvärdessatsen



Rolles sats

Lagranges sats



Medelvärdessats

$f[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

f kontinuerlig på $[a,b]$

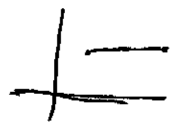
f deriverbar i (a,b)

$\Longrightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ så att $\underbrace{f'(\xi)}_{\text{tang. riktnings. koeff i } (\xi, f(\xi))} = \underbrace{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{sekantens riktningskoeff.}}$

Bevis:

1) $f(b)=f(a)$? $\exists\, \xi \in (a,b)\ f'(\xi)=0$ (Rolles Sats)

2) $f \equiv \text{konst} = f(a)=f(b) \Longrightarrow f' \equiv 0$ på (a,b)



(ii) $f \not\equiv const$

f konti på $[a,b] \Rightarrow f$ antar både största och minsta värde i $[a,b]$

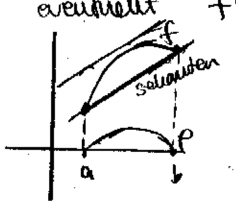
$\underline{f(a) = f(b)}$ kan inte vara både största och minsta värde $\Rightarrow$ antingen största, **eller** minsta värde antas i en inre punkt ξ

f har även lokala max och lok min i ξ (inre)

$\Rightarrow f'(\xi) = 0$

---

2) eventuellt $f(b) \neq f(a)$ (Lagranges sats)



I boken bevis har f(a) utelämnats

Sekantens ekvation

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}(\cancel{b-a}) = 0$$

$\Rightarrow$ enligt Rolles sats $\exists\, \xi \in (a,b) : \varphi'(\xi) = 0$

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Bevis – likt det förra.

ÖVNING Cauchys medelvärdessats

$f, g \quad [a,b] \to \mathbb{R}$

Kontinuerliga på $[a,b]$

deriverbara på (a,b)

$g' \neq 0$ på (a,b)

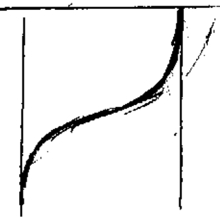
$$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b) \text{ så att } \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Om det ej finns en pkt där derivatan $=0$, så är ej $f(b) = f(a)$, (enligt Rolles sats)

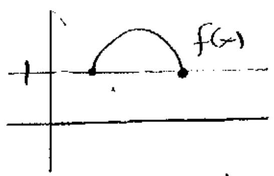
Ex $f(x) = \arcsin(x)$

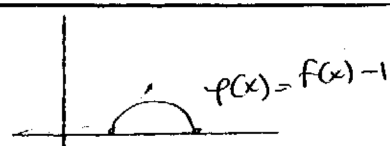
kont. på $[-1,1]$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



deriverbar i $(-1,1)$ (ej deriverbar i ändpunkterna)





Vi subtraherar sekanten.
Samma sak gjorde vi förut, med en lutande sekant.

Bevis av Cauchys MV-sats (medvetet otillräcklig)

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \frac{b-a}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)}$$

fel: ej samma ξ.

Bevisa för fallet samma ξ

Imitera beviset ovan.

Sats $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ (Integralkalkylens huvudsats)

deriverbar i (a,b)

Kontinuerlig i $[a,b]$

$f' \equiv 0$ på hela intervallet (a,b)

$\Rightarrow f \equiv \text{const}$ på $[a,b]$

Bevis Låt $c \in [a,b]$ (fix punkt)

Låt $x \in [a,b]$ (godt. varierande punkt)

$f(x) \overset{?}{=} f(c)$

Vill visa att oavset vilken pkt vi tar, får samma funktion värde

$\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(\xi)$ enligt Lagranges MV-sats

(ξ mellan x och c.)

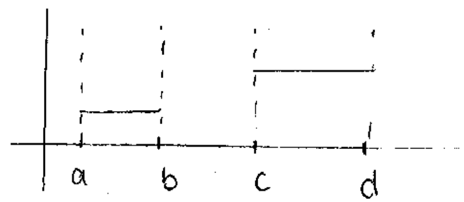
$x, c \in [a,b]$

$\Rightarrow \xi \in (a,b) \Rightarrow f'(\xi) = 0$ (för då är $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = 0$

$\Rightarrow f(x) = f(c)$

OBS! VIKTIGT att det är på ett intervall! Sammanhängande mängd ?

Ex:



$f' \equiv 0$ på $(a,b) \cup (c,d)$ (och)

$f \not\equiv \text{const}$ — " —

Följdsats

$f, g\ [a,b] \to \mathbb{R}$

kontinuerlig på $[a,b]$

deriverbara i (a,b)

$f' \equiv g'$ i (a,b)

$\Rightarrow f(x) = g(x) + C$ för ngt $C \in \mathbb{R}$, $\forall x\ [a,b]$

Bevis: Tillämpa föregående sats på funktionen $f-g$

Sats Bevisa själva

f deriverbar i (a,b)

f växande (/avtagande) i (a,b)

$\Rightarrow f' \geq 0$ $(f' \leq 0)$ i (a,b)

Strängt växande $\Rightarrow f' > 0$ (struken: $>$)

Bevis Själva (beviset om lok. extrema i inre punkter) Bevisa motsatsen

---

Sats $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

deriverbar i (a,b)

kontinuerlig i $[a,b]$

$f' > 0$ i (a,b)

$\Rightarrow f$ strängt växande i $[a,b]$ (motsatsen behöver ej gälla, precis som

Om lok extr $\Rightarrow f'(x) = 0$ men $f'(x)$ kan vara noll även om ej lok. extr.

89

Bevis Tag x_1, x_2 : $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

? $f(x_1) < f(x_2)$

Bilda skillnaden

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(x-x_2)}_{>0} > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

multiplicerat upp nämnaren

för ngt $\xi \in (x_1, x_2)$ $\Rightarrow f$ strängt växande

ÖVNING: Pröva att bevisa de andra möjligheterna, utan att titta på beviset ovan.

Tillämpningar vid analys av funktioner

teckenschema för f':

$f'(x_0) = 0$ $\quad x_0$ stationär punkt

	$x < x_0$	x_0	$x > x_0$
f'	$-$	0	$+$
f	↘	lok min	↗

f'	$+$	0	$-$
f	↗	lok max	↘

f	$+$	0	$+$
f	$-$	0	$-$

terasspunkter

(ex: x^3)

$f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ lok min i x_0

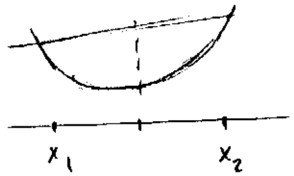
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ lok max i x_0

$f''(x_0) = 0$???

$f^4/f^6 =$ Om först derivatan som är noll är jämn f lok extr i x_0.

Om udda: $(f^3/f^5$: $=$ terasspkt

90



Konvex

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

$\theta = \frac{1}{2}$

mittpunkten

konkav

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Om f konvex eller konkav $\Rightarrow$ f kontinuerlig.

$x_1 + \theta(x_2 - x_1)$, $0 < \theta < 1$ $\quad \Rightarrow$ uppenbart enl. ovan

theta

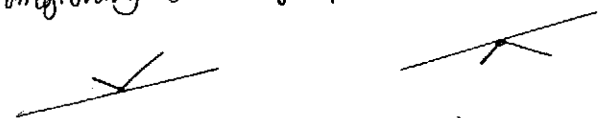
x_θ på sträckan mellan x_1 och x_2

f konvex $\Leftrightarrow$ $f(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + \theta(f(x_2) - f(x_1))$

$\forall \theta \in (0,1)$

f deriverbar , f kontinuerlig

$\Leftrightarrow$ f:s graf ligger över tangenten i en omgivning till varje punkt



(konkav: under tangenten)

<u>Sats</u> f' strängt avtagande $\Rightarrow f$ konkav

f' strängt växande $\Rightarrow f$ konvex

$f'' > 0 \Rightarrow f'$ strängt växande $\Rightarrow f$ konvex

$f'' < 0 \Rightarrow f'$ strängt avtagande $\Rightarrow f$ konkav

		x_0	
f''	+	0	−

inflexionspunkt

(terasspunkt speciell inflexionspunkt)
ei utanek

ex: $f = x^4$ $\quad f''(x)$: + 0 +

Till nästa gång: läs igenom: primitiva funktioner!

avsnitt: 2.5.2
4.5 kan vara svårt bevis 4.5

"Numerisk lösn av ekv"

- fundera på: "Obestämbara gränsvärden" = där direkt gränsövergång skulle ge: "$\frac{0}{0}$", osv.

  Sammanställning - gör. 7st

- Avsnitt 2.5.2, 4.5

- Rekursiva följder (spec vi genomläsning av ovan)

<u>Primitiva funktioner</u> Kolla i inledande uppg.

Steneil: GU-dentor. Uppg. 5: Svåraste på tentan.
Uppg 3 o 4: bör alla klara

naturliga funkt. lättare — Invers/omvänd operation <u>svårare</u>

"Omvänt"

x^2	$\sqrt{x}$
e^x	$\ln(x)$
$e^x e^y = e^{x+y}$	$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

beror på egenskapen (ej samma x och y)

Principiell skillnad i svårigheter

+	−

D_f och V_f ges av den naturliga funktione

<u>def:</u> f funktion

F primitiv till $\underline{\underline{f}}$ om $\exists\, F' = f$

1. För vilka f finns en primitiv?
3. Om det finns en primitiv, hur hittar man den?
2. Givet att f har en (= finns minst en) primitiv, hur många primitiva finns det?

Sats (Bevisas senare)
(Ger tillräckligt villkor för att en primitiv ska existera)

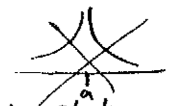
f kontinuerlig i I (intervall)

$\Rightarrow$ f har primitiv funktion i I

$\not\Leftarrow$

ÖSNING: det finns disskontinuerliga funk, som har en primitiv
= det finns deriverbara funktioner, var derivata är disskontinuerlig.)

- Försök hitta en deriverbar funktion, vars derivata är disskontinuerlig i ngn punkt.



ty, f' ∄ i a

Det rör sig om en "klammerfunktion"
Ty kontinuerliga funktioner består av elementära funktioner, vars derivata blir andra elementära funktioner.

A tillräckligt villkor för B: $A \Rightarrow B$

B nödvändigt villkor för A: $A \Rightarrow B$

För att A ska vara uppfyllt, MÅSTE B vara uppfyllt.

(Svar på fråga 1, föregående sida)

---

2. Hur många primitiva finns det, om det finns en?

$F' = f$

$\Rightarrow \forall C \in \mathbb{R} \quad (F+C)' = f$ dvs: ∞ många lösn. som skiljer sig med C

Låt G vara en annan primitiv till f

$G' = f$

$\Rightarrow (F-G)' = 0$ (på I (intervall))

$\Rightarrow F-G = \text{const} = C$ (på I)

$\Rightarrow F = G + C$

- Alla primitiva till en funktion skiljs åt av en konstant

---

3. $\sin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$

inversen: $\arcsin [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin(x) = y \iff \begin{cases} \sin(y) = x \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$

Vi har bevisat att ∃ invers och infört en beteckning för den. (Men vet ej vad svaret är, exakt)

---

f kontinuerlig på I

$\Rightarrow \exists$ primitiv F

$F' = f$ på I : Alla primitiva: $F + \underset{\text{const}}{C}$

$F(x)(+C) = \int f(x)\,dx$ ← en mängd av funk. skiljs åt av c

(Beräkna integralen av = skriv den på termer av elementära funktioner)

* Alla elementära funktioners derivator, är elementära funktioner.

* Det finns elementära funktioner, vars primitiva **ej** är elementära funktioner.

Exempel: $\int e^{\pm x^2}\,dx$

$li(x) = \int \frac{dx}{\ln(x)}$ "integrallogaritmen"

$\int \frac{\sin x}{x}\,dx$

} Ej elementära (vanligt förekommande exempel)

Beräkna / Bestäm } $\int f(x)\,dx \iff$ Uttryck i elementära funktioner

---

TABELL - lära sig

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$a^x = e^{x\ln(a)}$

$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$

$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x) + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + \underbrace{C}_{\text{godt. konstant}} \neq -\arcsin(x) + \underbrace{C}_{\text{godt. konst.}}$ ej samma C

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C = -\operatorname{arccot}(x) + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln(x + \sqrt{x^2+\alpha}) + C$

Bäst att komma ihåg - lär utantill

$+C$, $-C$, $+2C$ } godtyckliga konstanter, då C godtycklig.

$+C^2$, $|C|$ } godtycklig, positiv konstant (≥ 0)

EGENSKAPER hos primitiva funktioner

$(f+g)' = f' + g'$
$(\alpha f)' = \alpha f'$
} linearitets-egenskaper

Sats: $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$\int (\alpha f(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$

(De godtyckliga konstanterna inbakade i de obestämda integralerna)

Bevis:

$$\left(\int (f(x)+g(x))\right)' \overset{def}{=} f(x)+g(x) \overset{def}{=} \left(\int f(x)\,dx\right)' + \left(\int g(x)\,dx\right)' \overset{\text{derivatans egenskaper}}{=}$$

$$\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right)'$$

$$\left(\int (\alpha f(x))dx\right)' \overset{def}{=} \alpha f(x) \overset{def}{=} \alpha\left(\int f(x)\,dx\right)' \overset{\text{derivatans egenskaper}}{=} \left(\alpha \int f(x)\,dx\right)'$$

Produktregeln för derivata.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Sats: (Partiell integration) (andra beteckningar än bokens)

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)$$

Bevis:

$$\left(\int f'(x)g(x)\,dx\right)' \overset{def}{=} f'(x)g(x)$$

OBS! Vid derivering läggs ej konst på

$$\left(f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\right)' \overset{\text{derivatans egenskaper}}{=}$$ def för primitiv funktion

$$= (f(x)g(x))' - f(x)g'(x) = f'(x)g(x) + \cancel{f(x)g'(x)} - \cancel{f(x)g'(x)}$$

$$(V.l)' = (h.l)'$$

de godtyckliga termerna är "inbakade".

$$\Rightarrow (V.l) = (h.l)$$

LÄS IGENOM BOKENS EXEMPEL!

Ex: $\int \ln(x)\,dx$ se som: $\int 1\cdot\ln(x)\,dx$

$$\int 1\cdot\ln(x)\,dx = \int (x)'\ln(x)\,dx \overset{\text{satsen ovan}}{=} x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x\cdot\ln(x) - \frac{x}{0+1} + C$$

Anledning att sätta en etta framför funktionen: funktioner vars derivator är lättare att jobba med, än funktionerna själva.

Ex: $\int 1\cdot\arctan(x)\,dx$ $\quad \int 1\cdot\arcsin(x)\,dx$

$$\int \frac{g(x)}{f(x)} \neq \frac{\int g(x)}{\int f(x)}$$

OBS! Kvotformeln gäller ej för integraler.

KEDJEREGELN FÖR DERIVATOR

Villkor utelämnas.

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Sats: (Variabelsubstitution) Integrera likheten ovan

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx + C$$

Saknas en C här — har en egen C — lägger en C här istället

Låt F vara primitiv till f

$$\Rightarrow F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x) + C$$

Samma som ovan, fast andra beteckningar

Bevis:

$$(V.l)' \overset{\text{kedjeregeln}}{=} F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) = (H.l)'$$

Ex: $\int \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{y^2}\, dx = ?$

Två sätt att göra variabelsubstitution
1. Lära sig en lång lista med Standardsubstitutioner – som man måste lära sig
2. Försöka komma på ngt själv
(Lär dig alla standard subst. !!!)

$$\begin{bmatrix} x^2+y^2=1 \\ x=\sin(t) \end{bmatrix}$$

$\boxed{dx = (\sin(t))'\,dt}$ derivatan av sin, ∉ den nya differentialen

Bestäm ett intervall. t.ex: $|t| \le \frac{\pi}{2}$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{\cos^2 t}\,(\sin t)'\,dt = \int \cos t \cos t\,dt =$$

$$= \int \cos^2 t\,dt \underset{\text{(halva vinkeln)}}{=} \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \overset{\text{Integral av summa}}{=} \int \frac{1}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int \cos(2t)(2t)'\,d$$

inre derivata

Potenser av trig. funk. Fiffla med argumentet!

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C$$

[Vänd variabelsubstitutionen, få t som funktion av x]
Inför restriktioner, för att få en injektiv funktion

$x = \sin t \longleftarrow t = \arcsin(x)$ $\quad |t| \le \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

[Lär dig de trig. formlerna!
Arcusfunktioner dyker ofta upp!
Lär dig samband, restriktioner!]

F primitiv till f

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx \qquad x = \varphi(t)$$

$$F(\varphi(t)) = \int \underbrace{f(\varphi(t))}_{x}\,\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx}$$

$F(\underbrace{\varphi(t)}_{x})$ är en primitiv till $f(\underbrace{\varphi(t)}_{x})\,\varphi'(t)$

Beteckna $dx = \varphi'(t)\,dt$

$\boxed{x = \varphi t, \quad dx = \varphi'(t)\,dt}$

Slut. Gå tillbaka till x.
Krävs att φ inverterbar $t = \varphi^{-1}(x)$

Rationella funktioner

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \to \text{polynom}$$

1) Utför (eventuellt) polynomdivision, så att $\deg Q > \deg P$

$\deg P \geq \deg Q \qquad \frac{P}{Q} = \underbrace{\text{kvot}}_{\text{polynom}} + \frac{\text{rest}}{Q}$ rationell $\deg(\text{rest}) < \deg Q$

2) Faktorisera Q i reella faktorer så långt som möjligt

$(x-\alpha)^k \qquad (x^2+ax+b)^\gamma$

α reellt nollställe — saknar reella nollställen

3. Partialbråks uppdela

(Elementära) partialbråk $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$, $\frac{Mx+N}{x^2+ax+b}$

Sats: Givet en Rationell funktion $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$,

där $\deg(P)<\deg(Q)$, så kan $R(x)$ entydigt

delas upp i summa av partialbråk av

typen $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^r}$

Faktorisering av $Q(x)$:

$$Q(x)=\underbrace{(x-\alpha)^k(x-\beta)^p\dots}_{\text{motsvarar de reella nollställena}}\underbrace{(x^2+ax+b)^r(x^2+cx+d)^q\dots}_{\text{motsvarar de icke-reella nollställena}}$$

$(x-\alpha)^k$ ger upphov till partialbråken

$$\underbrace{\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\dots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}}_{k\text{ st}}$$

(x^2+ax+b) ger upphov till partialbråken

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+ax+b}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+ax+b)^2}+\dots+\frac{M_lx+N_l}{(x^2+ax+b)^l} \quad (l \text{ st})$$

4. Integrera Partialbråken

Det stora PROBLEMET: att faktorisera Q

(= hitta Q's nollställen)

Ej teoretiskt, men väl stort tekniskt problem.

Sats: Låt $Q(x)$ vara ett polynom med heltalskoefficienter;

$$Q(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0, \quad a_k\in\mathbb{Z}$$ (mängden av heltal)

Om $Q(x)$ har ett rationellt nollställe $x_0=\frac{p}{q}$,

där p och q är relativt prima (= inga gemensamma delare

(dvs = man har förkortat så långt som möjligt)

då gäller: att p delar a_0 och q delar a_n. p/a_0, q/a_n

Ex Finn nollställena till: $2x^3-3x^2-3x+2$.

högsta potens $a_n=a_3=2$

$a_0=2$

Möjligheter för p: $\frac{p}{a_0}$ $p=\pm1$; ±2

— " — för Q: $\frac{q}{a_3}$ $q=1$; 2

(Eventuellt tecken då rationella tal delas tilldelas täljaren)

$\left(\frac{p}{q} \quad p\in\mathbb{Z} \text{ heltal} \quad q\in\mathbb{N} \text{ naturliga tal} = \mathbb{Z}>0\right)$

Möjligheter till Rationella nollställen:

$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \cancel{\pm \frac{2}{2}}$ ← ej relativt prima.

(Om det finns rationella nollställen, finns de bland listan ovan.)

(Testa: Börja med det som är enklast. (= 1))

Testa: (+1): $2-3-3+2 \neq 0$;

noll ställe: (−1): $-2-3+3+2 = 0$.

(Kan bryta ut $(x+1)$ och dividera med det)

Testa (för säkerhets skull) nollställe $\left(\frac{1}{2}\right)$: $\frac{2 \cdot 1}{8 \cdot 4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 2 = 0$!

$\Rightarrow$ Man kan bryta ut även $\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Bevis: Låt $x_0 = \frac{p}{q}$ vara ett rationellt nollställe till $Q(x)$, där $p \& q$ är relativt prima (dvs: de har inga gemensamma delare).

$$\Rightarrow a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad \Big| \cdot q^n$$

applicera då båda sidor

$$\Leftrightarrow a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

(Titta på likheden på två olika sätt):

$$\Rightarrow a_n p^n = q\left(-a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q - \dots - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1}\right)$$

Märk väl såväl koef som poten är helta

q delar h.h $\Rightarrow$ q delar heltal v.l

$: q / a_n p$

p, q är ju relativt prima.

$\Rightarrow q / a_n$ (q delar a_n)

Nu löses istället termen $a_0 q^n$; $\star$ at:

$$a_0 q^n = p\underbrace{\left(-a_n p^{n-1} - \dots - a_1 q^{n-1}\right)}_{\text{heltal}}$$

p delar hl $\Rightarrow$ p delar även v.l

$p / a_0 q^n$ $\quad$ p, q relativt prima $\quad$ (Ingen faktor av p finns i q^n)

$\Rightarrow p / a_0$ (p delar a_0)

OBS! Finns inga garantier för att ett polynom har rationella nollställen. Men om det finns, kan de hittas såhär. Metod att leta nollställen.

Ex: $x^2 - 2$ Om det finns rationella nollställen,

$p: \pm 1, \pm 2$ ← inget av dessa tal är ett nollställe.

$q: 1$

Av alla partialbråk är den svåraste typen:

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + ax + b)^l} \quad l > 1 \quad \text{Tekniskt svårt.}$$

Integraler, som m.h.a variabelbyte ge integraler av rationella funktioner

(Det finns väldigt många standard-variabelsubstitutioner)

1. $\int R\left(x, \frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}}\right) dx$

Substitution: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^2$ (För att kunna vända) $t \geq 0$ $t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

$ax+b = t^2(cx+d)$

$(a-ct^2)x = dt^2 - b \Rightarrow x = \frac{dt^2-b}{-ct^2+a} = \varphi(t)$ rationell funktion av t.

$dx = \varphi'(t)\,dt$

rationell funktion av t. (ty derivatan av kvoten mellan två polynom blir även en kvot mellan två polynom)

Ex: $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\ x = \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt \end{array}\right] = \int t \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$

Beräkning av x och dx:

$t^2 = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow t^2 - t^2x = 1+x \Leftrightarrow x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$

$dx = \frac{2t(\cancel{t^2}+1) - 2t(\cancel{t^2}-1)}{(t^2+1)^2}dt$

Speciell subst. för funktioner av denna typ:

$\sqrt{x+\alpha} = \sqrt{\frac{x+\alpha}{0\cdot x+1}}$ Specialfall av exemplet ovan.

2. Uttryck som innehåller $\sqrt{ax^2+bx+c}$

(Alt. sätt till bokens)

Vill bli av med koefficienten a. Kan bryta ut $\sqrt{a}$ (görs i boken, men ej här)

(i) Ett dubbelt reellt nollställe

$$\sqrt{\underset{\geq 0}{a}(x-\alpha)^2} = \sqrt{a}\,|x-\alpha| = \begin{cases} \sqrt{a}(x-\alpha) & x \geq \alpha \\ \sqrt{a}(\alpha - x) & x < \alpha \end{cases}$$

(ii) Två reella nollställen:

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \overset{\text{skriv om}}{\sqrt{(x-\alpha)^2\frac{(ax-a\beta)}{(x-\alpha)}}} = |x-\alpha|\sqrt{\frac{ax-a\beta}{x-\alpha}} = t$$

(iii) Inga reella nollställen: (en 2:a gradsfunktion)

omöjligt, ty $\sqrt{\cdots} \geq 0$ uttryck under rottecken ka ej vara negativt.

Alltså gäller:

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} \underset{\text{anta } a=1}{=} \sqrt{x^2+bx+c} =$

$= \sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)}$ >0 ty, inga reella nollställen!

Variabel substitution:

$x + \frac{b}{2} = t$

$\Rightarrow \sqrt{t^2+\alpha^2} \longrightarrow$ i boken Se detta förslag

α - positiv konstant

$$\sqrt{t^2+\alpha^2} \rightarrow = \alpha\sqrt{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} = \alpha\sqrt{1+\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}} = \text{Ingetting}$$

Bra subst: $\frac{t}{\alpha} = \tan u$

$$= \alpha\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}} = \frac{\alpha}{|\cos u|}$$ teckenval beror på intervallet

$$dt = \alpha \frac{1}{\cos^2 u}\, du$$

3. $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

Först: titta på integralen. Kan jag hitta ngt som gör just den här lättare?

Universalsubstitutionen:

$x = 2\arctan(t)$

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Bra nytta av / att kunna uttrycka dx: termer av arctan.

$dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$ (rationell)

$\sin(2\arctan(t)) = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos(2\arctan t) = 2\cos^2(\arctan t) - 1 = \frac{2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ rationell

$\tan^2(\arctan t) = t^2 = \frac{1-\cos^2(\arctan t)}{\cos^2(\arctan t)}$

$\cos^2(\arctan t) = \frac{1}{1+t^2}$

Cos jämn funktion: naturligt att det står kvadrater överallt: $\frac{1-t^2}{1+t^2}$

sin (och tan) är udda $\therefore$ $\frac{2t}{1+t^2}$

Komma ihåg: Hjälp.

Eller: härled

ANALYSFÖRELÄSNING

På tentor: skriv alltid vad du använder.

t.ex: Pythagoras Sats

Obestämd Integral (Primitiv funktion): Olika uttryck kan vara samma

$F(x) + C = \int f(x)\,dx$ — en primitiv; $C \in \mathbb{R}$ godtycklig — mängden av alla primitiva till $f(x)$

En funktion (av x)

utläses: "Integral f av x dx."

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(ö)\,dö$$

tal

Bestämd Integral.

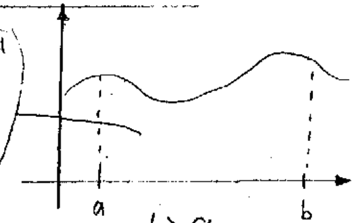
Riemannintegralen — En skalär. Endast ett är rätt.

"Integral från a till b f av x dx."

$\int$ = stiliserat S, som står för summa.

$f(x) \geq 0$

Finns det en area till området? Om ja, hur beräknar man den?



b > a

$m: \{\text{områden}\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$m(A) \geq 0$ m står för mått

dim 1 längd

dim 2 area

dim 2 volym

mängderna skär ej varandra

(2) $A \cap B = \emptyset$ (Deras snitt är tomma mängden)

$\Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ måttet av deras union är måttet av A + måttet av B

Additivitet

(109)

(1) A kongruent med B

$\Rightarrow m(A) = m(B)$

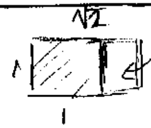
(dvs: arean är ej beroende av var den ligger.)

Kongruens

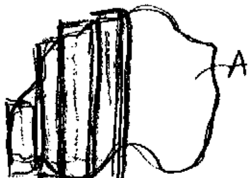
De två områdena (sträckorna) fås av varandra m.h.a kongruensavbildningar

1. Translation (parallellförflyttning)
2. Rotation (vridning)
3. Symmetri (spegling)

(3) Kvadraten med med sidan 1, har area 1.



arean av ngt med irrationella sidor: kan ej delas upp i enhetskvadrater.



den blåa arean $\leq m(A) \leq$ den röda arean

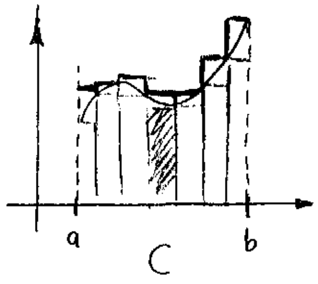
(om den finns)

def: A kvadrerbar (= har area)

om $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ett yttre "rött" område, som är union av rektanglar $\mathbb{B}$ och ett inre "blått" område, som är union av rektanglar $\mathbb{C}$ så att $m(B) - m(C) < \varepsilon$.

(110)

$f(x) \geq 0$



Indelning av intervallet $[a, b]$.

$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b$

En rektangel, som bygger på delintervallet $[x_{k-1}, x_k]$

baslängd: $(x_k - x_{k-1})$
höjd: h_k

area: $h_k(x_k - x_{k-1})$

Blå ("inskriven" i figuren) rektangel.

$\Rightarrow h_k \leq \min\limits_{[x_k, x_{k-1}]} f$ ← om det finns (mindre än det minsta $f(x)$-värdet på intervallet)

Röd (omskriven) rektangel

$\Rightarrow h_k \geq \max\limits_{[x_k, x_{k-1}]} f$ ← om det finns

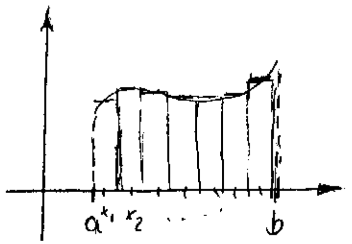
Antag nu att f har max och min på varje delintervall (t.ex om f kontinuerlig)

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\min_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq m(A) \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\max_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) (x_k - x_{k-1})$$

(om det finns)

Beror på uppförandet av: $\max f - \min f$
Kontinuitet är det viktiga kravet.

$\int_a^b f(x)\,dx$



$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

godt. vald

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \xrightarrow[\max_k (x_k - x_{k-1}) \to 0]{n \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

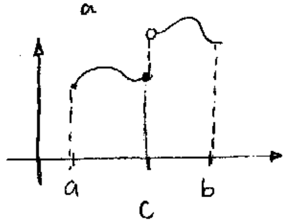
(Det största av intervallen)

Riemannsumma förf. (a defineras på ett av dessa sätt)

oberoende av valet av ξ_k

Om f är kontinuerlig på $[a,b]$, så är f Riemann integrerbar på $[a,b]$, dvs:

$\exists \int_a^b f(x)\,dx$



"Lite" disskontinuerlig = en, eller ändligt många disskontinuitetspunkter = Vi delar in intervallet.

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

Den mängd som är disskontinuerlig, har arean noll = är ett streck. Påverkar ej resultatet.

(Om ∞ många disskont. punkter = de får ej vara "för många")

• Monotona funktioner är alltid Riemannintegrerbara

(monoton: garanterar en viss dos kontinuitet)

Kontinuerliga funktioner har alltid en primitiv funktion.

Hur beräknar man $\int_a^b f(x)\,dx$?

Sats: (Newton-Leibniz)

f kont. på $[a,b]$

$\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt$ är en primitiv funktion till f (på $[a,b]$) ($x \in [a,b]$)

Kalla $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$,

$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b)$

Låt $\Phi(x)$ en godtycklig primitiv till $f(x)$.

$\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$ för något C

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$

För vilket x-värde kan vi räkna ut C i detta fall? : $x = a$

$x = a$: $\Phi(a) = 0 + C$

$\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + \Phi(a)$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

hitta en primitiv funktion till integranden, stoppa in start- och slutvärdet.

Partiell integration:

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l}\big[\phi(x)\big]_a^b \\ \phi(x)\Big|_a^b\end{array}\right\} = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Variabelbyte:

Om $F' = f$, så

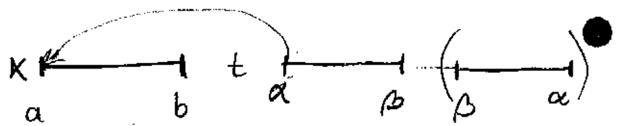
$$F(g(t)) = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

hitta lämpliga gränser

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

$x \in [a,b]$ $\quad$ $t \in [\alpha,\beta]$

$g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$

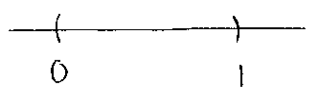


Här behöver vi ej gå tillbaka till x-termer,
Det tal vi får fram i bör vara samma som förs av

Sup supremum
inf infimum

$(0,1)$ $\max(x)$ $x \in (0,1)$ finns inte!

$\sup\limits_{x\in(0,1)}(x) = 1$ ("gränsvärdesmaximum")



$\min(x)$ $x \in (0,1)$ finns inte!

$\inf\limits_{x\in(0,1)}(x) = 0$ ("gränsvärdesminimum")

Def: $A \subset \mathbb{R}$, A begränsad uppåt

sup A är den minsta övre begränsningen

Ex: $A = (0,1)$ $\quad 2$ är en övre begränsning

dy $x \leq 2 \quad \forall x \in A$

5 — " —

$3/2$ — " —

1 är den minsta övre begränsningen $1 = \sup(0,1)$

(om den finns)?

Supremumaxiomet: (Analys möjlig för reella tal, men ej rationella)

Varje uppåt begränsad mängd av reella tal har en minsta övre begränsning,

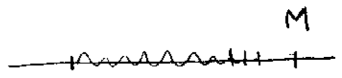
dvs: supremum.

INLEDANDE ANALYS   Fre, LV6   2001/10/12

Supremumaxiomet

$A \subset \mathbb{R}$, A uppåt begränsad

$\exists M : \forall x \in A$ gäller $x \leq M$



A passerar aldrig M!

Supremumaxiomet

Varje uppåt begränsad mängd av reella tal har en minsta övre begränsning, och denna begränsning kallas för mängdens Supremum.

$\sup(0,1) = 1 \notin (0,1)$ "gränsvärdesmaximum"

$\sup[0,1] = 1 \in [0,1]$ 1 är maxium, ty 1 tillhör $[0,1]$

Supremumaxiomet gäller ej i $\mathbb{Q}$ (rationella tal)

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \ \& \ x^2 < 2\}$$

uppåt begränsad (t.ex av 2), men saknar Supremum i $\mathbb{Q}$. (Analys ej bra för rationella tal)

$A \subset \mathbb{R}$: $\sup A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Dedekinsnitt)   Def för $\sqrt{2}$

A nedåt begränsad mängd $\subset \mathbb{R}$

Den största undre (nedre) begränsningen

kallas infimum för A ($\inf(A)$)

A nedåt begr. $B\{-x \quad x \in A\}$ uppåt begr. $\inf(A) = -\sup(B)$

1) Intervallinkapslingssatsen

2) följd uppåt begränsad och växande = konvergent

$$\left.\begin{array}{l} a_n \leq M \\ a_n \leq a_{n+1} \\ \forall n \end{array}\right\} \exists \lim_{n\to\infty} a_n$$

3. Satsen om mellanliggande värden

4. Kont. funktion på slutet och begränsat intervall antar största och minsta värde.

I 1, 2, 3 : handlar det om existensen av en punkt

Intervallinkapslingssatsen.

i generell analys: (Cantors sats)

Givet en följd av inkapslade och begränsade intervall,

dvs: $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots$

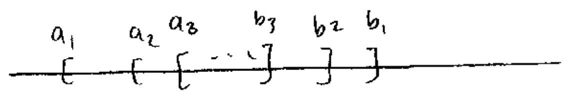
Varje intervall ingår i det föregående. De är slutna, begrs.

Då $\exists\ \xi$ s.a $\xi \in [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset\right)$

(finns en punkt, vars snitt ej är tomt)

Om dessutom $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ så $\exists!$ (finns en enda) $\xi \in [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}\right)$$



Det finns ngt gemensamt för dessa intervall.
Om deras avstånd krymper mot noll, finns en gemensam punkt.

Bevis: $A = \{a_1, a_2, \dots a_n, \dots\}$

$B = \{b_1, b_2, \dots b_n, \}$

Av inkapslingen: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots \leq a_n \leq \dots$; växande

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \dots \geq b_n \geq \dots$; avtagandet

? Är det sant att A uppåt begränsad ?

1) Tag $a_n \in A$ (element i A) $\quad a_n \leq b_n \leq b_1$ (ty b avtagande)

$\Rightarrow$ Enligt supremumaxiomet finns

$\exists \sup(A) = a$

Analogt ; ta $b_n \in B \quad b_n \geq a_n \geq a_1$ (ty a avtagande)

$\Rightarrow$ B nedåt begränsad

$\Rightarrow \exists \inf(B) = b_1$

Vi ska visa att $[a,b] \subseteq [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Vi måste alltså visa :

$a_n \overset{?}{\leq} a \overset{?}{\leq} b \overset{?}{\leq} b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(Hela mängden A ligger till vänster om B,
dvs. alla a_i oavsett index ligger till vänster om all b.)

Vi ska först visa att:

$a_n \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

1) $m \leq n$

$a_n \leq b_n \leq b_m$ OK!

2. $m \geq n$

$a_n \leq a_m \leq b_m$ OK!

(Från ändpunkter på olika intervall, för vi punkter
på samma intervall att jämföra)

Vi har visat att b_n är en övre begränsning för A, oavsett vilket index n. $(\forall n \in \mathbb{N})$

$a = \sup(A)$ är den minsta övre begränsningen.
(per def.)

$\Rightarrow \underbrace{a}_{\text{minsta övre begränsning}} \leq \underbrace{b_n}_{\text{övre begränsning}} \forall n \in \mathbb{N}$

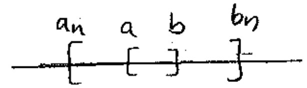
$\Rightarrow a$ nedre begränsning för B ; $b = \inf(B)$ största nedre begränsning

$\Rightarrow a \leq b$

$\left.\begin{array}{l}a \text{ övre begränsning för } A \\ b \text{ nedre begränsning för } B\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a_n \leq a \leq b \leq b_n} \; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow [a,b] \subseteq [a_n, b_n] \; \forall n \in \mathbb{N}$

Låt nu även $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



$0 \leq \underbrace{(b-a)}_{\text{tal oberoende av } n} \leq \underbrace{(b_n - a_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \quad \forall n$

$\Rightarrow b = a = \xi \quad [a,b] = \{a = b = \xi\}$

(använd definitionen av infimum och supremum)

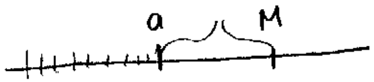
Sats: Varje växande och uppåt begränsad följd är konvergent.

Bevis: $\left.\begin{array}{l} a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \\ a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \exists M : a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\}$ Givet

$A = \{a_1, a_2, \dots a_n, \dots\}$ uppåt begränsad

$\Rightarrow$ enl. supremum-axiomet $\exists \sup(A) = a$

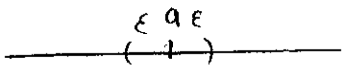
Vi ska visa att $\lim_{n\to\infty} a_n = a$



$? \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon$:

$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

$a = \sup(A)$



$\Rightarrow a_n \leq a \; (< a + \varepsilon) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Tag $\varepsilon > 0$

$? \; \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \quad a - \varepsilon < a_n \leq a$

a är den minsta övre begränsningen

$a - \varepsilon < a$

$\Rightarrow a - \varepsilon$ är inte en övre begränsning. alla övriga tal i följden kommer ligga ... mer ...

$\Rightarrow \exists a_m \in A$ och $a - \varepsilon < a_m \; (\leq a)$

$\Rightarrow$ Eftersom följden är växande

$a - \varepsilon < a_m \leq a_n \leq a \quad \forall n \geq m$

$\Rightarrow$ Vi kan ta $N_\varepsilon = m$

$\forall n > N_\varepsilon \quad a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon$

$|a_n - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}$

[Vi har alltså använd supremums två egenskaper:
- Att det är en övre begränsning
- Att det är den minsta övre begränsningen.]

C.I Satsen om mellanliggande värden

f kontinuerlig på $[a, b]$

$f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$

vet ej vilket störst

C ligger mellan A och B

$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ så att $f(\xi) = C$

[Användning: $f(a) =$ neg $f(b) =$ pos $\Rightarrow$ vet att kurvan skär x-axeln i intervallet
= för att lokalisera nollställen.]

Bevis:

1/ Antag att $f(a)f(b)<0$ ($\Leftarrow$ ena pos., andra neg)

$$C=0$$

Utan inskränkning säger vi att: $A=f(a)<0$
$B=f(b)>0$

Intervall-halverings metoden:

$a \quad \frac{a+b}{2} \quad b$

- Beräkna f:s värde i intervallets mittpunkt

$$\text{Om } f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \begin{cases} =0 & \text{klart, tag } \xi = \frac{a+b}{2} \\ <0 & \text{sätt } a_1 = \frac{a+b}{2} \quad b_1 = b \\ >0 & \text{sätt } b_1 = \frac{a+b}{2} \quad a_1 = a \end{cases}$$

Det första intervallet innehåller vårt nya intervall

$f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$ $\quad [a,b] \supset [a_1,b_1]$

- Beräkna $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$

$$\text{Om } f\left(\tfrac{a_1+b_1}{2}\right) \begin{cases} =0 & \text{klart!} \\ <0 & \text{Sätt } a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \quad b_2 = b_1 \\ >0 & \text{Sätt } b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \quad a_2 = a_1 \end{cases}$$

$f(a_2)<0 \quad f(b_2)>0$

$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2]$

....

Hur långt pågår detta?

Antingen blir vi klara efter ändligt många steg, eller så får vi en följd av inkapslade intervall.

$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset \dots \supset [a_n,b_n]$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ Enligt intervallinkapslingssatsen $\exists!\, \xi : \xi \in [a_n, b_n] \; \forall n \in N$

$$\xi = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} = \inf_{n\in N}\{b_n\}$$

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \qquad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$$

(Det viktigaste av allt:)

f kontinuerlig $\quad \underbrace{f(a_n)}_{<0} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\xi) \leq 0$

$\qquad\qquad\qquad \underbrace{f(b_n)}_{>0} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\xi) \geq 0$

$$\Rightarrow f(\xi)=0$$

<u>Fall 2</u> (ξ behöver ej vara noll)

2) Utan inskränkning $A < B$

$A < C < B$

Betrakta $g(x) = f(x) + C$

$g(a) = f(a) - C = A - C < 0$

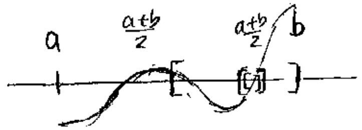
$g(b) = f(b) - C = B - C > 0$

$\Rightarrow$ Enligt del 1 $\exists\, \xi \in (a,b) : g(\xi) = 0$

$g(\xi) = f(\xi) - C = 0$

$\Rightarrow f(\xi) = C$

(Vi translanterar alltså grafen nedåt el. uppåt)

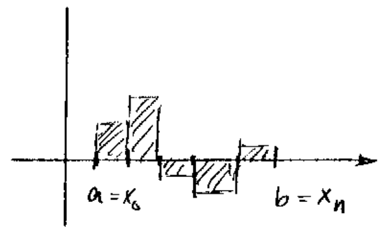


Detta liknar ej bolzens, ty den har utgått från en del axiom.

<u>Riemannintegralen</u>

Definition för trappfunktioner.

trappfunktion = styckvis konstant



$\varnothing(x) = C_k$ på (x_{k-1}, x_k)

$k = 1, \dots n$

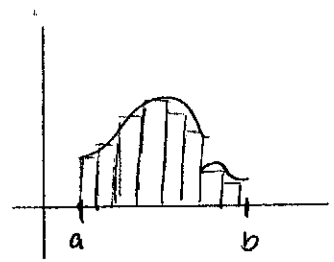
<u>def.</u>

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} C_k (x_k - x_{k-1})$$

"orienterad area"

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Viktigt villkor: f begränsad !!

<u>f begränsad</u> på $[a,b]$



begränsad $\Rightarrow \exists$ <u>trappfunktioner</u>

<u>$\varnothing, \Psi$</u> på $[a,b]$ så att:

$\varnothing(x) \le f(x) \le \Psi(x) \quad \forall (x) \in [a,b]$

("indelningen inbakad")

Uppenbarligen

om $\phi(x) \le (f(x)) \le \Psi(x)$

$\Rightarrow \int_a^b \phi(x)\,dx \le \int_a^b \Psi(x)\,dx$

$\forall$ undre ϕ, övre Ψ

$\Rightarrow \int_a^b \Psi(x)\,dx$ (godtycklig övre) är en övre begränsning för $\left\{ \int_a^b \phi(x)\,dx \; ; \; \phi \le f \right\}$

$\Rightarrow \exists \sup_{\phi \le f} \int_a^b \phi(x)\,dx = \underline{I}$ nedre integralen av f på $[a,b]$

Analogt:

godt. $\phi \le f$

$\underbrace{\int_a^b \phi(x)dx}_{\text{nedre begränsning}} \le \int_a^b \Psi(x)\,dx \;, \quad \forall \Psi \ge f$

$\Rightarrow \exists \inf_{\Psi \ge f} \int_a^b \Psi(x)\,dx = \bar{I}$ övre integralen av f på $[a,b]$

Def av delintervallet

Definition av integrerbarhet:

f kallas Riemannintegrerbar om

$\underline{I} = \bar{I} \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)\,dx$

$\sup_{\phi \le f} \int_a^b \phi(x)\,dx = \inf_{\Psi \ge f} \int_a^b \Psi(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{I}$

$I + \varepsilon \ge \overset{\text{största nedre begr.}}{\inf_{\Psi \ge f}} \int_a^b \Psi(x)\,dx$ Största nedre begränsning

ngt större än

$\Rightarrow$ ej nedre begränsning för $\int_a^b \Psi(x)\,dx$

$\Rightarrow \exists \Psi_0$ trappfunktion $\ge f$ på $[a,b]$

och $\int_a^b \Psi_0(x)dx < I + \varepsilon$

Analogt: (fyll i själv)

$\exists (\phi_0)$ trappfunktion så att $\int_a^b \phi_0(x)\,dx > I - \varepsilon$

belopp behövs ej, ty $\Psi \ge 0$

$\Rightarrow \exists$ trappfunktioner ϕ, Ψ, $\phi \le f \le \Psi$ på $[a,b]$

så att: $\left(0 \le\right) \int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)dx < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ godtyckligt)

(Definition för Riemannintegrerbarhet i boken)

Funktion derivbar om det finns en övre och undre trappfunktion, skillnaden mellan övre och undre integralen mindre än ε.

Vill veta: { vilka egenskaper har integralen?
vilka funktioner är integrerbara?
Hur beräknar man dem.

Egenskaper (Bevisas ej)

(Bevisas genom approximationer till trappfunktioner + gränsövergång: inf och sup.)

Linearitetsegenskaper:

1. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2. $\int_a^b (\alpha f(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

3. $f \geqslant 0$ på $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

f som $=0$ är en nedre trappfunktion. Vilket ger 3.

4. $f \geqslant g$ på $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$

5. Om f integrerbar $\Rightarrow |f|$ integrerbar, och triangelolikheten gäller:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$\int$ summa $\sum$ $\quad |\Sigma \cdot| \leq \sum |\cdot|$

(Gäller förutsatt att alla integraler finns.)
ej helt stringent, dock

- $\int_a^a f(x)\,dx \overset{def}{=} 0$ Def. fungerar ej i detta fallet: Så denna egenskap gäller per definition.

a<b

- $\int_b^a f(x)\,dx \overset{def}{=} -\int_a^b f(x)\,dx$

Även om det större talet står som undre gräns, kan vi beräkna integralen mha en ny def. Konsistent med resten av definitionerna.

6. $a < c < b$

$$\Rightarrow \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(Konstruera trappfunktioner. Ha c med som indelningspunkt ⇒ automatisk indelning i två summor.)

(Kontinuerliga funktioner är integrerbara)

Sats: Integralkalkylens medelvärdessats

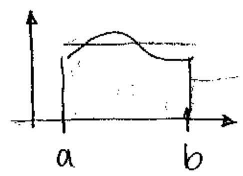
intuitivt geometriskt

generaliseras

1. f kontinuerlig på $[a,b]$

$$\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b] \text{ så att } \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

area under graf — rektangels area



(① = ② för $g = 1$)

2. (Generaliserade i.m.v.s)

f, g kontinuerliga på $[a,b]$

$g \geqslant 0$ på $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$ så att $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$

Fundera på? ¿ $\xi \in (a,b)$

när vi läser igenom beviset ¿ $g \leq 0$

<u>Bevis (av den generaliserade)</u>

f kont på $[a,b]$ $(g \geq 0)$

$\Rightarrow \exists\, m = \min_{[a,b]} f$, $M = \max_{[a,b]} f$

(dessa antas som värden)
(Det minsta och största värdet f antar)

$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

Gäller detta om $g \leq 0$?

[Multiplicera hela olikhetskedjan med $g(x)$]

$m g(x) \leq f(x)g(x) \leq M g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

($g(x) \geq 0$)

egensk. 2
$\Rightarrow m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$

[dividera med $\int_a^b g(x)\,dx$]

$$\Rightarrow \underset{\substack{\min_{[a,b]} f \\ \text{antas som värde}}}{m} \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}}_{=C} \leq \underset{\substack{\max_{[a,b]} f \\ \text{antas som värde}}}{M}$$

(Vi har två värden som antas. C ligger mellan dessa två. f är kontinuerlig)

C mellan två f-värden; f kontinuerlig;

$\Rightarrow$ enligt satsen om mellanliggande värden

$\exists\, \xi \in [a,b] \;:\; f(\xi) = C$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$

(Bevis för fallet $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$)

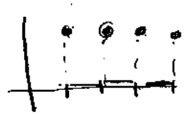
---

g kont ; $g \geq 0$

$\int_a^b g(x)\,dx = 0 \Rightarrow g(x) \equiv 0$

(Om en kontinuerlig funktion, ≥ 0, och integralen $= 0$, måste funktionen vara identiskt noll!)

(Om g disskont. Ex.



g disskontinuerlig
$\int g = 0$
$g \geq 0$
$g \neq 0$

ÖVNING Bevisa:

g kont; $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow g \neq 0$

i en omgivning till x_0

Om $\int_a^b g(x)\,dx = 0 \Rightarrow g \equiv 0$

$\Rightarrow$ i satsen står då $0=0$

Analysens Huvudsats (Newton-Liebniz)

(Förutsätter att vet att kont. funk. är deriverbara)

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ kontinuerlig

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ ($\int$ finns, ty f kontinuerlig)

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$ (Integralen, betraktad som funktion av sin övre gräns, är primitiv till integranden.)

Bevis- (Bilda differenskvoten)

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \overset{\text{def av } F}{=} \frac{1}{h}\left(\underbrace{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}_{=\int_a^x + \int_x^{x+h}}\right) =$$

höjden i rektangeln varierar med intervallängden

förutsättning: ty f är kontinuerlig

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \underset{\text{enl. integralkalkylens MV-sats}}{=} \frac{1}{h} f(\xi_h)\cdot h = f(\xi_h)$$

ändpkter i integrationsintervallet

ξ_h mellan x och $\underset{h\to 0}{\underbrace{x+h} \longrightarrow x}$

$\Rightarrow$ Enligt "polis lemmat" $\xi_h \xrightarrow[h\to 0]{} x$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi_h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$$ $\leftarrow$ (Förutsättning: **f kontinuerlig** def. av kontinuitet)

$\Rightarrow \exists\, F'(x) = f(x)$

(Varför är kontinuerliga funktioner integrerbara?)

Kontinuerliga funktioners integrerbarhet

(På små intervall: ovan och under-funktionerna (trappfunk) nära f. Intuitivt. Ej stringent)

def f kontinuerlig i $x_0 \in D_f$ om:

föreskriver hur

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in D_f \;\; |x-x_0| < \delta_\varepsilon$$

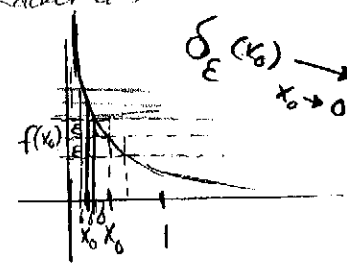
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Räcker ej för oss.

$\delta_\varepsilon(x_0) \xrightarrow[x_0 \to 0]{} 0$

Ex: $f(x) = \frac{1}{x}$, $(0,1)$

Tag $x_0 \in (0,1)$. Försök hitta δ



(ε anger hur nära $f(x_0)$ vi är
Alltså finns ε på y-axeln)

(Ju närmare noll vi kommer, kommer samma ε ge upphov till en allt mindre δ.
δ är alltså även beroende av x_0.)

Man behöver förfina intervallen olika mkt för olika x-värden. I detta fall är ingen förfining nog.

def f kallas likformigt kontinuerlig på I (mängden är ett intervall) (133)

om: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta_\varepsilon > 0 : \forall x', x'' \in D_f : |x' - x''| < \delta_\varepsilon$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

(Det ska finns ett δ som fungerar för alla x.)

Sats: (Bevisas kanske sedan)

Om f kontinuerlig på ett $\underbrace{\text{slutet och begränsat}}_{\text{kompakt mängd}}$ intervall $[a,b]$

$\Rightarrow$ f är även **likformigt** kontinuerlig på $[a,b]$

Dessa satser + def gör att vi kan bevisa att kont funk är integrerbara

ANALYSFÖRELÄSNING ONS LV. 7 (134)

Kontinuerliga funktioner är Riemannintegrerbara.

def f likformigt kontinuerlig på I (mängd)

Om $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta_\varepsilon > 0 : \forall x', x'' \in I \, (\subset D_f)$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \qquad |x' - x''| < \delta_\varepsilon$$

(Det ska alltså gå att hitta ett minsta δ)

Sats f Kontinuerlig på en kompakt mängd (sluten & begränsad, typisk $[a,b]$)

$\Rightarrow$ f likformigt kontinuerlig på mängden ($[a,b]$)

---

likformigt kontinuerlig $\Longrightarrow$ kontinuerlig

$\not\Longleftarrow$

Ex: $\frac{1}{x}$ kont, ej likf. kont. på $(0,1)$

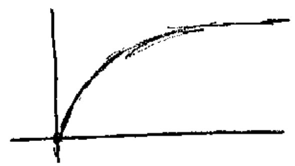
Kontinuitet + kompakt mängd = likform. kont

Ex: $f(x) = \sqrt{x}$ på $[0, \infty)$

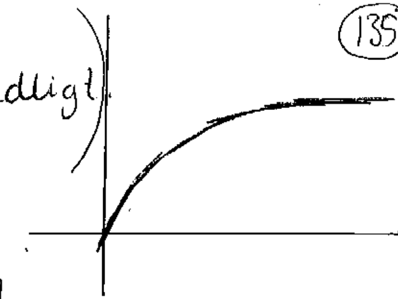
oändligt intervall, tangenten i 0 är vertikal

$\Rightarrow$ f likformigt kontinuerlig på $[0, \infty)$

$f'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$



(Dela upp mängden i 2 mängder. (1) Ett ändligt kompakt, (2) och ett oändligt (Här kan vi tillämpa vår sats))



1, $[0,2]$ kompakt intervall

$\Rightarrow f$ likf. kontinuerlig på $[0,2]$

2. $[1,\infty)$

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Sats}}}{=} |\underbrace{f'(\xi)}_{\text{ligger mellan } x' \text{ och } x''}||x'-x''|. \qquad \xi \text{ mellan } x' \text{ och } x''$$

Lagranges (Medelvärdessatsen)

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}| = \frac{1}{2\sqrt{\xi'}}|x'-x''| \leq \frac{1}{2\sqrt{1}}|x'-x''|$$

Vill visa: Kan ei bli för stor.

(Största värdet: då vi ersätter ξ med 1)

$$\text{Tag } \varepsilon>0. \text{ Välj } \delta_\varepsilon = 2\varepsilon : |\sqrt{x'}-\sqrt{x''}| < \tfrac{1}{2}\underbrace{|x'-x''|}_{\delta_\varepsilon = 2\varepsilon} < \tfrac{1}{2}\cdot 2\varepsilon = \varepsilon$$

(Går ei att använda på hela intervallet, dy nära 0 blir $f'(x)$ oändlig.)

f deriverbar ~~(följer då att kont.)~~ på I $|f'| \leq A$ (begr) på I

$\Rightarrow f$ likformigt kontinuerlig på I

[M-V.satsen]: $|f(x')-f(x'')| = |f'(\xi)||x'-x''| \leq A|x'-x''|$

Givet $\varepsilon>0$, välj $\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{A}$

Sats f kont på $[a,b]$

$\Rightarrow f$ Riem. integrerbar på $[a,b]$

(Kan approximeras m. trappfunkt. uppifrån och nerifrån)

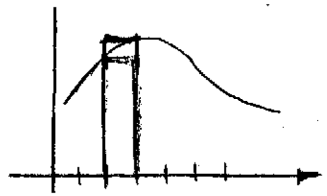
Bevis: ? $\forall \varepsilon>0 \ \exists$ trappfunktioner $\phi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon$ så att:

underfunkt.

$\phi_\varepsilon \leq f \leq \Psi_\varepsilon$ på $[a,b]$ och

$$\int_a^b \Psi_\varepsilon(x)\,dx - \int_a^b \phi_\varepsilon(x)\,dx < \varepsilon$$

Tag $\varepsilon>0$ (godtyckligt) Dela in intervallet



Låt $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ vara en indelning av $[a,b]$

intervallängd

där $\max_{k=1,\dots,n}(x_k - x_{k-1})$ bestäms senare.

f kont $\Rightarrow \exists\, M_k, m_k : M_k = \max_{[x_{k-1},x_k]} f = f(\xi_k)$

$m_k = \min_{[x_{k-1},x_k]} f = f(\eta_k)$

$\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad k=1,\dots,n$

Välj $\phi(x) = m_k$ på (x_{k-1}, x_k) ← öppet intervall, dy f kan ej ha två värden.

$\Psi(x) = M_k$ på (x_{k-1}, x_k)

$$\leq \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx = \int_a^b \left(\psi(x) - \phi(x)\right) dx \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\text{(intervallängd)}} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left|\left(f(\xi_k) - f(\eta_k)\right)\right|}_{\geq 0} (x_k - x_{k-1})$$

(Avst. mellan ξ_k och η_k mindre än intervallängden.
För små int. längder blir $\xi_k - \eta_k$ också mkt liten)

f kont på $[a,b] \Rightarrow$ f likf. kont. på $[a,b]$

och därmed gäller att:

$\exists\, \delta_\varepsilon : \forall x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta_\varepsilon$ (avst. mellan pkter)

avst. mellan funktvärden $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Välj nu (ovan) indelningen så att $\max(x_k - x_{k-1}) < \delta_\varepsilon$

Då kommer $|\xi_k - \eta_k| \leq x_k - x_{k-1} < \delta_\varepsilon \quad k = 1, \dots n$

x_{k-1}

$$\Rightarrow |f(\xi_k) - f(\eta_k)| < \varepsilon \quad k = 1, \dots n$$

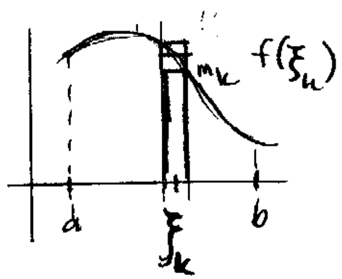
$$\Rightarrow 0 \leq \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|f(\xi_k) - f(\eta_k)|}_{<\varepsilon}(x_k - x_{k-1})$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(x_k - x_{k-1}) = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= (\cancel{x_1} - \underbrace{x_0}_{=a} - \cancel{x_1} + \cancel{x_2} - x_1 + x_3 - \cancel{x_2} + \dots + \underbrace{x_n}_{=b} - \cancel{x_{n-1}}) = \varepsilon(b-a)$$

(hur litet som helst)

$\Rightarrow$ f integrerbar



(M_k och m_k tar ut varandra)
($f(\xi_k)$ mitt emellan)

Riemann summa:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

$\max_{k=1,\dots n}$ intervallängderna $(x_k - x_{k-1}) \to 0$

oberoende av ξ_k

Sats: Om f begränsad funktion på $[a,b]$

f integrerbar på intervallet $[a,b] \Leftrightarrow$
(def. med under- och översummor)

$\Leftrightarrow \exists$ gränsvärde för Riemannsummorna
(i den förklarade meningen)

Vi kommer att bevisa: att om f är kontinuerlig, så konvergerar Riemann summorna mot $\int_a^b f(x)\,dx$ i den förklarade meningen.

(Detta svagare bevis: Vi har gjort avkall på $\Leftrightarrow$. Bevisar bara $\Rightarrow$.
Dessutom lagt till kontinuitet.)

Bevis: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

m_k, M_k, ϕ, ψ vara som i förra beviset

$\Rightarrow m_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f \leq f(\xi_k) \leq M_k$ (Multiplicera m. intervallängden. olikheten bevaras)

$$m_k \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\geq 0} \leq f(\xi_k) \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\geq 0} \leq M_k \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\geq 0}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \int_a^b \psi(x)\,dx$$

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \psi(x)\,dx$$ (per definition av $\int_a^b f(x)\,dx$)

$$\sup \int_a^b \phi = \inf \int_a^b \psi.$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx < \varepsilon$$

kan göras $< \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ genom att välja lämplig indelning.

integral — Riemannsumma

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right|$$ kan också göras hur liten som helst, genom att välja lämplig indelning och oberoende av valet av ξ_k.

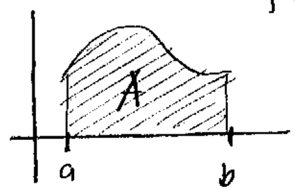
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

i den ovan förklarade meningen

TILLÄMPNINGAR AV INTEGRALER

Beräkning av areor

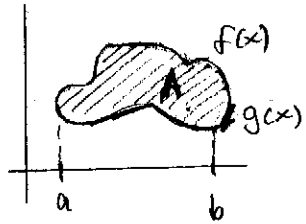
$f \geq 0$.



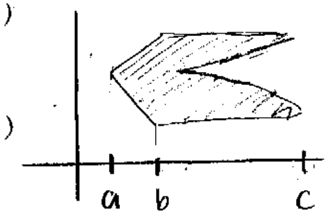
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

per definition av area.

(ty area är ett tal instängt av rektanglar fr. alla håll)

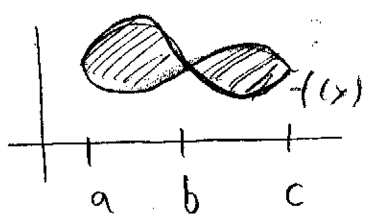


$$A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$



Dela upp i intervall.
På varje delintervall, gör förfarandet ovan.

(OBS! Se upp med vilken av graferna som är störst!)



$$A = \int_a^b f - g + \int_b^c g - f$$

Beräkning av längd av kurva

Vad är kurva?

Funktionsgrafer: $y = f(x)$, $x \in [a,b]$

krav: f kontinuerlig


← ej funktion, men dock kurva.

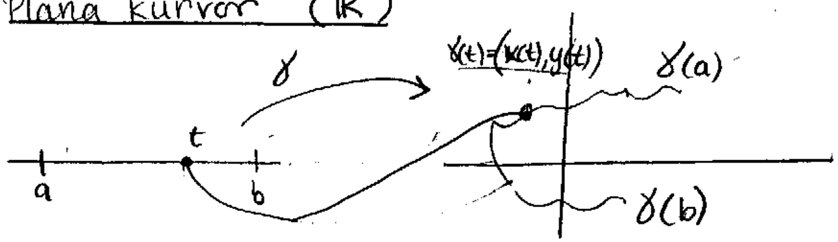
def Kurva är en kontinuerlig funktion.

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{plan kurva} \\ \mathbb{R}^3 & \text{(rymd) kurva} \\ \mathbb{R}^n & \text{kurva} \end{cases}$$

Vi tar ngt rakt och böjer till, drar ut, men får ej riva = kant.

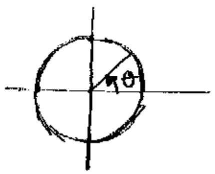
Övning: Vad är bristen m. def. ovan?

Plana kurvor ($\mathbb{R}^2$)



Om $\gamma(a) = \gamma(b)$: sluten kurva

Ex



Enhetscirkeln

$$\left.\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}\right\} \text{Parameterisering av kurvan}$$

$\theta \in [0, 2\pi[$

(har att göra m. bristen i def ovan)

längd

$\exists$ lim (sekantlängden)

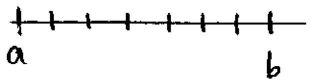
= kurvans längd

Kurvor som har längd, kallas rektifierbara. (uträtningsbara)

$$\text{Sekantlängden} = \sqrt{(x(t+h)-x(t))^2 + (y(t+h)-y(t))^2} = \begin{bmatrix}\text{MV-} \\ \text{satsen}\end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{(x'(t_1))^2(t+h-t)^2 + (y'(t_2))^2 h^2} =$$

$$= \sqrt{(x'(t_1))^2 + (y'(t_2))^2}\ |h|$$



$h > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(t_k))^2 + (y'(\tilde{t}_k))^2} \cdot h \xrightarrow{\text{förfinar indelningen}}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt}_{= l \text{ (kurvan)}} \quad \text{om } x(t), y(t) \text{ deriverbara}$$

ÖVNINGSTENTAN

1b. $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \text{"}\infty - \infty\text{"} \,?$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x} = 0$$

"$\infty + \infty$"

Typiska fel:

1.a. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

- $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$
- $\sin(\pi x) \neq -\sin x$

  $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

- $\cancel{\frac{\sin(\pi x)}{t}}$
- $-\frac{\sin(\pi t)}{t\pi}\pi \longrightarrow -1\cdot\pi$

1.b. $\text{"}\infty - \infty\text{"} \cancel{= 0}$ $\qquad \sqrt{x^2} = |x| = -x$, $\quad x \to -\infty$, $x < 0$

$\text{"}\infty \cdot 0\text{"} \cancel{= 0}$

$\sqrt{x^2+1} \underset{\text{stora } x}{\sim} \sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt{x^2+1} + x \sim |x| + x = 0$, $\quad x < 0$

tycks det men vi ... ty går mot $-\frac{1}{2}$.

$\sqrt{x^2+x} + x \sim 0$, $\quad x \to \infty$

$$\sqrt{x^2+x} + x = \frac{x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)} \longrightarrow -\frac{1}{2}, \quad x\to\infty$$

---

2. $D_{\arcsin} = \cancel{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$

$= [-1, 1]$

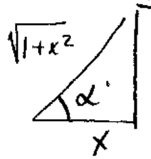
$V_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$VL = HL$

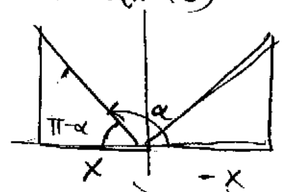
$\sin(VL) = \sin(HL) \;\not\Rightarrow\; VL = HL \qquad VL = \begin{cases} (HL)_1 \\ (HL)_2 \end{cases}$

(Intervallresonemang måste vara med, där sin ej upprepar sina värden.)

Fall ($x>0$) $\qquad$ Fall ($x<0$)



$(x>0)$



ej tvärtom, ty $x<0$

LOGIK

$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$

$\alpha = \beta \Rightarrow \sin(\alpha) = \sin(\beta) \Rightarrow \sin^2\alpha = \sin^2(\beta)$ OK $\qquad$ Fel på vägen!

intervall ? samma värden $\qquad$ glöm ej

Att D är sant implicerar ej att ursprungsläget är sant.

Om $f = g$, så $f' = g'$.

visar att $f' = g'$

implicerås ej av varandra. . . :

3. $\forall n \geq 6 \quad \left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$

1. $n = 6$ sant
2. Antag sant för $n = k$?
3. ? Gäller det då för $n = k+1$?

Använda 2) !!!

$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < 3 \qquad \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \to e < 3$.

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{k}\right)^k < 3$ för stora k (men ej för alla

växande

$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < 3$

Tel i induktion.

Antag $n = k$ .... Vi har visat ~~att~~ ~~$n = k+1$~~

4. Definera deriverbarhet,

a. x_0 behöver vara en inre punkt i D_f

$\left(x_0 \in D_f\right.$ tillsammans med en omgivning$\left.\right)$

$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Sats ta med förutsättningar!

$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$

f deriverbar $\quad f'(x) \neq 0$

f inverterbar

f^{-1} kontinuerlig

$y = f(x)$

$\Rightarrow f^{-1}$ deriverbar

för i beviset används dessa egenskaper

Vissa har definerat deriverbarhet som kontinuitet.

Vasilios Agapios 1999 Lösn.

OK:

"$\frac{\infty}{0}$" $\quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \to \infty}{g(x) \to \pm 0}$

EJ OK

"0^0" $\quad \lim_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)}$, $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ $\quad$ "0^0"

$\lim_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)}$, $f(x) \to 1$, $g(x) \to \infty$ $\quad$ "1^∞"

FARLIGA GRÄNSVÄRDEN

"$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$0 \cdot \infty$", "$\infty - \infty$", "0^0", "1^∞", "∞^0"

$$(f(x))^{g(x)} = [\text{def}] = e^{g(x)\ln(f(x))}$$

* "0^∞" $= e^{\overset{\infty}{g(x)} \overset{-\infty}{\ln f(x)}} \to 0$

* $\underset{\to 0}{f(x)} \cdot \underset{\to\infty}{g(x)} = \dfrac{\overset{\to 0}{f(x)}}{\underset{\to 0}{1/g(x)}}$

* $\infty - \infty$ förläng m. konjugat, få en kvot.

* De flesta standardgränsvärden av typen "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\tan(x)) - \sin(\sin(x))}{\tan(\tan(x)) - \tan(\sin(x))} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

Lagranges Medelvärdessats

kan göra omskrivningar

$f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x - x_0)$ $\quad \xi$ mellan x_0 och x

samma funktion, uträknad i två punkter

$$\frac{\sin(\tan(x)) - \sin(\sin(x))}{\tan(\tan(x)) - \tan(\sin(x))} = \frac{\cos(\xi)(\cancel{\tan x - \sin x})}{\frac{1}{\cos^2(\eta)}(\cancel{\tan x - \sin x})} =$$

$= \cos\xi \cos^2\eta$ eller: $\cos^3\xi$ om vi sätter ξ

ξ, η mellan $\underset{t \to 0}{\sin(t)}$ och $\underset{t \to 0}{\tan(x)}$

$\Rightarrow \xi, \eta \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Går äv. att lösa med trig. formler. Men Mkt krånglig.

$P(x)$ polynom, $\deg(P) = n > 1$

alla P's nollställen är reella.

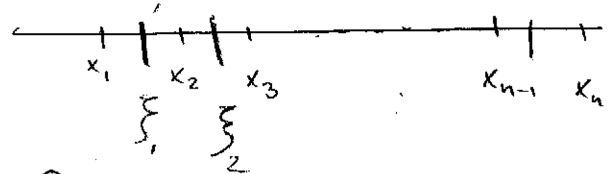
$\Rightarrow$ Visa att alla P''s nollställen är reella.

Bevis:

1) Antag först att alla nollställen till P är enklar = (har multiplicitet 1)

$\therefore P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$

$x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_n$



Ett intervall:

$P(x_k) = P(x_{k-1}) = 0$

$\Rightarrow \xi_k \in (x_{k-1}, x_k) : P'(\xi_k) = 0$ $\quad$ finns $(n-1)$ st

$\deg(P') = n - 1$

$\Rightarrow P'$ har $n-1$ nollställen (reella)

$\xi \in (x_{\cdot}, x_{\cdot})$. $k = 1, 2, \ldots n-1$

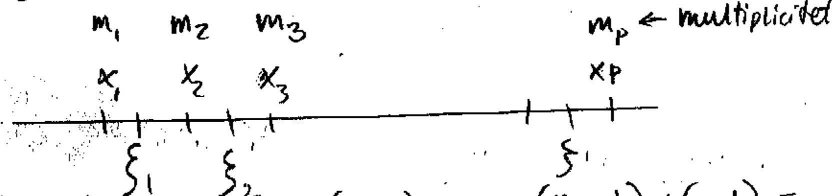
2. (Om vi antar att även multipla nollställen (149)
får förekomma:

$P(x) = a_n (x-x_0)^m Q(x)$, $m>1$

$P'(x) = a_n m (x-x_0)^{(m-1) > 0} Q(x) + a_n (x-x_0)^m Q'(x)$

$\Rightarrow$ Om x_0 nollställe till P

x_0 nollställe till P' av mult. $m-1$



P's nollställen: $(m_1-1) + (m_2-1) + \dots + (m_p-1) + (p-1) =$

$= \underbrace{(m_1 + m_2 + \dots + m_p)}_{n} \cancel{-p} \cancel{+p} - 1 = \underline{\underline{n-1}}$

Svar på övning - fundering

Finns det en funktion som är deriverbar, och vars derivata är diskontinuerlig?

Svart, ty:

(Funktioner sammansatta av el. funktioner alltid deriverbara, och deras derivator deriverbara där de fun

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(150)

$x \neq 0$: $f'(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$= \underbrace{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0 \text{ ty sin begränsad}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ⟶ saknar gränsvärde när $x \to 0$

$0 \leq \left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$, $|x| \to 0$, $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$

$x_n = \frac{1}{n\pi}$ $\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos n\pi = \begin{cases} +1 & \text{om } n \text{ jämnt} \\ -1 & \text{om } n \text{ udda} \end{cases}$

Deriverbarhet i noll. Vi har ingen formel.
Använd def för derivata.

$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^{\cancel{2}} \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{\cancel{h}} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$\Rightarrow \exists f'(0) = 0$

f' disskontinuerlig i 0

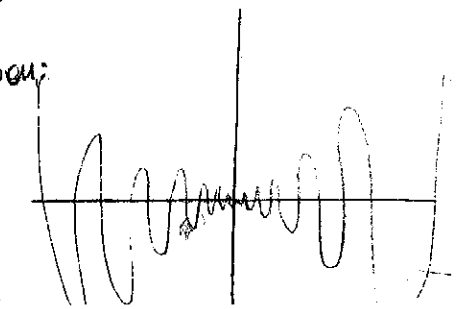
* För att bevisa att gr.värde saknas: räcker att hitta 1 motexempel

* (ngt som går mot noll) · (ngt som saknar gränsvärde) ⟶ 0

* När vi ej har ~~ej~~ formel, använd def för derivata (differenskvot,

Övning: titta ~~på~~ funktioner av typen:

$$f(x) \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



Bestäm α så att f kontinuerlig,