Övningsskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2007-09-22
kl. 8.30-10.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768–681630
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

===

1. Talföljden a_n definieras genom $a_1 = 1$ och $a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$ för $n \geq 2$.

Visa att $a_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$ för alla $n \in \mathbb{N}$ där F_n är Fibonaccitalen som ges av

$F_0 = 0, F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (4p)

2. Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ med $D_f = \mathbb{R}$ definieras genom

$f(0) = 0$ och $f(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{\sqrt{1+x^4}+x^2} - \sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right)$ för $x \neq 0$.

a) Är f kontinuerlig? Motivera väl! (3p)

b) Beräkna gränsvärdena $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ och $\lim_{x\to\infty} f(x)$. (4p)

3. Betrakta funktionen $f(x) = \sqrt{\left|x^2 - x^{-2}\right|}$ med $D_f =]0, \infty[$.

a) Är f deriverbar? Motivera väl! (5p)

b) Funktionen g definieras genom $D_g = [1, \infty[$ och $g(x) = f(x)$ för $x \in D_g$.

Visa (utan att använda derivata) att g är injektiv och bestäm g^{-1}. (6p)

4. **a)** Låt $M = [0, 2]$ och $N =]1, 3[$. Bestäm $M \cap N, M \cup N$ och $M \setminus N$ (1p var). (3p)

b) Vilket samband finns det mellan kontinuitet och deriverbarhet?
Bevisa dina påståenden, motivera väl! (5p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng, 14p – 20p: 2 bonuspoäng, 21p – 27p: 3 bonuspoäng, 28p – 30p: 4 bonuspoäng BB

LÖSNINGAR till övningsskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2007-09-22

Uppgift 1

Talföljden a_n definieras genom $a_1 = 1$ och $a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$ för $n \geq 2$. Visa att $a_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$ för alla $n \in \mathbb{N}$ där $F_0 = 0, F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (Fibonaccitalen).

Vi gör ett induktionsbevis:

I. $n = 1$: $a_1 = 1 = \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{1}$ är ok.

II. Föruts.: $a_p = \frac{F_p}{F_{p+1}}$ för $1 \leq p \leq m_0$ för något $m_0 \in \mathbb{N}$.

Påst.: $a_{m_0+1} = \frac{F_{m_0+1}}{F_{m_0+2}}$.

Bevis: $a_{m_0+1} = \dfrac{1}{1+a_{m_0}} \underset{\text{[föruts.]}}{=} \dfrac{1}{1+\frac{F_{m_0}}{F_{m_0+1}}} = \dfrac{F_{m_0+1}}{F_{m_0+1}+F_{m_0}} = \dfrac{F_{m_0+1}}{F_{m_0+2}}$. vsv

III. Induktionsaxiomet ger då att $a_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$ för <u>alla</u> $n \in \mathbb{N}$. vsv

---

Anmärkning: Följden $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ är ett berömt exempel på "kedjebråk" (med bara ettor!):

$$a_1 = 1;\ a_2 = \frac{1}{1+1};\ a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}};\ a_4 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}};\ a_5 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}} \quad \text{osv..}$$

Kolla gärna:

	$a_1 = 1 = \frac{F_1}{F_2}$
$a_2 = \frac{1}{1+a_1}$	$a_2 = \frac{1}{2} = \frac{F_2}{F_3}$
$a_3 = \frac{1}{1+a_2}$	$a_3 = \frac{2}{3} = \frac{F_3}{F_4}$
$a_4 = \frac{1}{1+a_3}$	$a_4 = \frac{3}{5} = \frac{F_4}{F_5}$
$a_5 = \frac{1}{1+a_4}$	$a_5 = \frac{5}{8} = \frac{F_5}{F_6}$ ...

Denna följd konvergerar mot det gyllene snittet φ:
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\Phi} = \varphi$ (se [Ö] fib 18)!

Uppgift 2

$f(0)=0$ och $f(x)=\frac{1}{x}\left(\sqrt{\sqrt{1+x^4}+x^2}-\sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right)$ för $x\neq 0$.

a) f är kontinuerlig i varje punkt $a\neq 0$ ty f är sammansatt av kontinuerliga funktioner, $D_f=\mathbb{R}$ ty $\sqrt{1+x^4}-x^2>0$. Vidare gäller

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2-\left(\sqrt{1+x^4}-x^2\right)}{x\left(\sqrt{\sqrt{1+x^4}+x^2}+\sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x\left(\sqrt{\sqrt{1+x^4}+x^2}+\sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{2}{\sqrt{\sqrt{1+x^4}+x^2}+\sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}}=0\cdot\frac{2}{2}=0,$$ alltså $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, dvs. f är kontinuerlig även i 0 och därmed på hela $\mathbb{R}$.

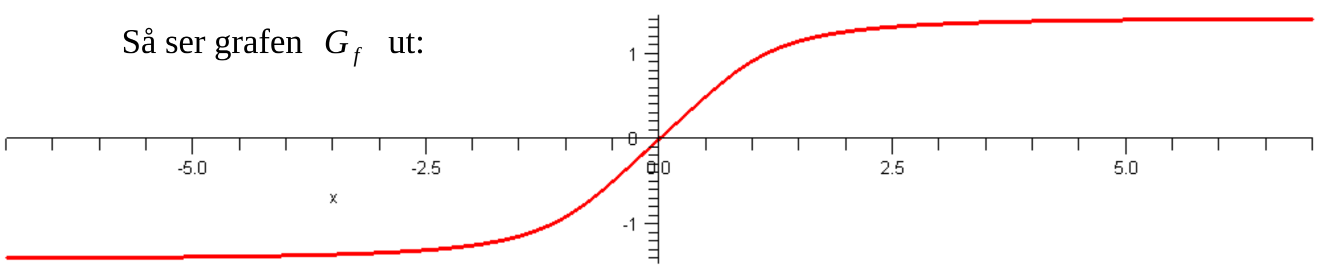
b) Då $x\to\pm\infty$ har vi (observera $\sqrt{x^2}=|x|$!)

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}+1}-\sqrt{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}-1} & \text{då } x>0\\ -\sqrt{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}+1}+\sqrt{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}-1} & \text{då } x<0\end{cases},$$ alltså är

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\sqrt{\sqrt{0+1}+1}+\sqrt{\sqrt{0+1}-1}=-\sqrt{2}+0$, ty $\sqrt{}$ är en kontinuerlig funktion, och p.s.s. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\sqrt{2}-0$.

svar: **a)** ja **b)** $-\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{2}$

Så ser grafen G_f ut:



Uppgift 4a)

$M=[0,2]$ och $N=]1,3[$; då är (RITA!!)

$M\cap N=\{x: x\in M\wedge x\in N\}=\{x: 1<x\le 2\}=]1,2]$,

$M\cup N=\{x: x\in M\vee x\in N\}=\{x: 0\le x<3\}=[0,3[$ och

$M\setminus N=\{x: x\in M\wedge x\notin N\}=\{x: 0\le x\le 1\}=[0,1]$.

Uppgift 3

a) Alla punkter i D_f är inre punkter i D_f, f är deriverbar i alla punkter $1 \neq a \in D_f$ ty f är sammansatt av funktioner som är deriverbara i sådana punkter. Vi skall nu kolla om $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ har ett gränsvärde då x går mot 1: vi börjar med högergränsvärdet, dvs. vi betraktar $x > 1$:

$f(x) = \sqrt{x^2 - x^{-2}} = \dfrac{\sqrt{x^4 - 1}}{x} = \dfrac{\sqrt{(x^2+1)(x+1)(x-1)}}{x}$, alltså gäller

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{x(x-1)} = \frac{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x+1}}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} \xrightarrow[x\to 1+]{} \infty \quad \text{ty} \quad \sqrt{x-1} \xrightarrow[x\to 1+]{} 0+$$

($\sqrt{\ }$ är kontinuerlig), alltså $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \xrightarrow[x\to 1+]{} \infty$ och $\dfrac{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x+1}}{x} \xrightarrow[x\to 1+]{} 2$.

Det visar att $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ saknar gränsvärde då $x \to 1$, dvs. f är ej deriverbar i 1.

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - x^{-2}}$ är strängt växande och därmed injektiv på $[1, \infty[$, ty x^2 är str. växande, x^{-2} str. avtagande, alltså $-x^{-2}$ str. växande och då är summan $x^2 - x^{-2}$ och därmed $\sqrt{x^2 - x^{-2}}$ str. växande. För att beräkna inversen till g måste vi först bestämma $D_{g^{-1}} = V_g$:

För $x \geq 1$ är $g(x) \geq g(1) = 0$ (ty g är växande), vidare ser vi att $g(x) = \sqrt{x^2 - x^{-2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ ($x^{-2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$), s.o.m.v. ger då att g antar alla värden ≥ 0 (g är kontinuerlig), dvs. $V_g = [0, \infty[$; nu löser vi ekvationen $y = g(x)$ för $y \in D_{f^{-1}}$, dvs. $y \geq 0$:

$$y = \sqrt{x^2 - x^{-2}} \underset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} y^2 = x^2 - x^{-2} \Leftrightarrow x^4 - x^2y^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x^2 - \tfrac{1}{2}y^2\right) = \tfrac{y^4+4}{4} \Leftrightarrow x^2 = \tfrac{y^2+\sqrt{y^4+4}}{2}$$

$\left(\frac{y^2-\sqrt{y^4+1}}{2}\right.$ går ej ty $\left. x^2 \geq 1 \geq 0\right)$ $\underset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x = g^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{y^4+4} + y^2\right)}$.

svar: **a)** nej (ej deriverbar i 1) **b)** $g^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{y^4+4} + y^2\right)}$

Så ser graferna ut: