MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen i Linjär algebra och geometri, TMA660, 17/8/2011, 8.30-12.30
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Magnus Önnheim, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 30 poäng på del 1.

Del 1

1. (a) Vilka av följande matriser är trappstegsmatriser? Vilka är reducerade trappstegsmatriser **(1p)**

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iii)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{v)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{vi)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{vii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{viii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ix)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Betrakta matriserna i a) som utvidgade matriser för ekvationssystem. För dem trappstegsreducerade matriser ange antal av lösningar utan att göra beräkningar. Ge kort motivation för dina svar. **(4p)**

(c) För ekvationssystem i b) som har mera än en lösning, ange lösningar på vektorparametrisk form. **(3p)**

2. (a) Beräkna determinant (1p)

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

(b) Beräkna determinant (2p)

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(c) Beräkna determinant (3p)

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

(d) Är matrisen (2p)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

inverterbar? Motivera ditt svar.

3. Hitta skärningslinje och vinkel mellan planen: $\pi_1 : x + y + z = 2$ och $2x + y - z = -1$ (8p)

4. Hitta rötterna av polynomet $p(x) = x^4 + x^2 + 1$. (8p)

5. (a) Man har ett antal av metaliska kuber som bär elektrisk laddning. Vi vet att kuber av samma färg har samma laddning. Fyra labassistenter gör var sin mätning av de sammanlagda laddningar hos tre kuber, se tabellen nedan. Bestäm, med hjälp av minstakvadrat metoden, laddning på de olika kuberna. (6p)

Labassistent	kombination av kuber	mättning
Ada	1 röd, 1, blå, 1 gul	-3
Berta	1 röd, 2 blå	0
Carl	1 blå, 2 gula	2
David	2 röda, 1 blå	-2

(b) Vad och på vilket sätt minimerar minstakvadratmetoden? (2p)

Del 2

6. En student har reduserat (korrekt) en matris A till enhetsmatris. Han har använt 25 elementära radoperationer. Hur många elementära radoperationer behövs för att redusera matrisen A^{-1} till enhetsmatris? Motivera ditt svar. (10p)

7. Vilka av följande påstående är sanna för alla matriser? Visa motexempel vid negativa svar, och motivera positiva svar:

   (a) Om matrisprodukt $A \cdot B$ är definierat, så $A \cdot B = B \cdot A$. (3p)

   (b) Om matrisprodukt $A \cdot B$ är definierat och inverterbar, så är båda A och B inverterbara. (3p)

   (c) Om matrisprodukt $A \cdot B$ är definierat och ikke-inverterbar, så är båda A och B ikke-inverterbara. (3p)

   (d) Om matrisprodukt $A \cdot B$ är definierat, så är $rank(A \cdot B) = rank(A) \cdot rank(B)$. (3p)

   (e) Om summan $A + B$ är definierat, så är $rank(A + B) = rank(A) + rank(B)$. (3p)

8. $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 2, 0), \overrightarrow{v_2} = (0, -1, 1, -1), \overrightarrow{v_3} = (1, -2, 4, -2)$ är vektorer i $\mathbb{R}^4$. (Observera att $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2}$.)

   (a) Hitta i $span(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ vektor närmaste till $(1, 1, 1, 1)$. Motivera ditt svar. (5p)

   (b) Hitta koordinater av vektorn som du har hittat i i) i bas $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ och i bas $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})$. Motivera ditt svar. (5p)

   (c) Vilka vektorer i $span(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ har samma första koordinat i bas $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ och i bas $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})$? Motivera ditt svar. (5p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! Maria

Multiplicationstabeln

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361