MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen i Linjär algebra och geometri, TMA660, 10/01/2010, 8.30-12.30
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Magnus Goffeng, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 30 poäng på del 1.

Del 1

1. (a) Vilka av följande matriser är trappstegsmatriser? Vilka är reducerade trappstegsmatriser (1p)

$$
\text{i)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\quad
\text{ii)}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}
\quad
\text{iii)}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}
$$

$$
\text{iv)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\quad
\text{v)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -6 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}
\quad
\text{vi)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\text{vii)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\quad
\text{viii)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\quad
\text{ix)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

(b) Betrakta matriserna i a) som utvidgade matriser för ekvationssystem. För dem som är trappstegsmatriserna ange antal av lösningar utan att göra beräkningar. Ge kort motivation för dina svar. (4p)

(c) För ekvationssystem i b) som har mera än en lösning, ange lösningar på vektorparametrisk form. (3p)

2. (a) Hitta inversmatris till (6p)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Med hjälp av inversmatrisen som du har hittat i a) lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -2 \\ -x_1 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

3. Planet π_1 är givet av ekvationen $x + 2y + 3z = 0$. Planet π_2 är givet av ekvationen $x - 2y + 3z = 0$.

   (a) Hitta linjen ℓ som är snittet mellan π_1 och π_2. (2p)

   (b) Hitta linjerna ℓ_1 och ℓ_2, där ℓ_1 ligger i π_1, ℓ_2 ligger i π_2 och båda är vinkelrätta mot ℓ. (3p)

   (c) Hitta vinkel mellan ℓ_1 och ℓ_2. (2p)

   (d) Hur kan man hitta vinkel mellan π_1 och π_2? (Minst två sätt.) (1p)

4. Polynomet $p(x) = 2x^3 + (1 + 2i)x^2 + (3 + 3i)x - (2 + 2i)$ har minst en reel och minst en rent imaginär rot. Hitta rötterna av polynomet. (8p)

5. $$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Hitta en bas av $span(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$: (3p)

   (b) Ange koordinater av v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 i basen som du har hittat i (a) (5p)

Del 2

6. Vilka komplexa tal z uppfyller

$$z = \frac{1}{\overline{z} + \frac{1}{z + \frac{1}{\overline{z}}}}?$$

   Ange alla möjliga lösningarna i polär form. (8p)

7. En ingenjör använder minstakvadratmetoden för att lösa ett linjärt ekvationsystem av 5 ekvationer med 3 variabler. Får ingenjören alltid entydlig lösning? (Om ja - bevisa svaret, om nej - visa en exempel där lösningen är ej entydlig.) (10p)

8. A och B är två kvadratiska ikke-noll[1] matriser sådana att $AB = 0$.

   (a) Definiera rank, noll-rum, värderum. Vad kan du säga om dessa för A? (6p)

   (b) Vad kan du säga om determinanten av A? (Motivera ditt svar.) (2p)

   (c) Måste alltid $BA = 0$? (Om ja - motivera, om nej - visa ett motexempel för 2x2 eller 3x3 matriser.) (6p)

   (d) Visa att det finns alltid en ikke-noll matris C sådan att $CA = 0 = AC$. (8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! Maria

[1] Noll-matris, som här betecknas med 0, är en matris som betår av bara nollar

Facit till Del 1 10/01/2011

1. a) trappsteg: ii) iii) vi) vii) viii) ix)

b) ii) 1

iii) ∞

vi) 0

vii) 0

viii) 1

ix) ∞

c) iii) $\begin{pmatrix} -17/2 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$

ix) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} r$

2) a) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) a) ~~[illegible]~~ $\frac{x}{3} = -z, \quad y = 0$

b) $l_1: \frac{x}{-2} = \frac{y}{-10} = \frac{z}{6}$

$l_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}$

c) $\arccos \frac{3}{7}$

4) $x_1 = -2i, \quad x_2 = -1+i, \quad x_3 = \frac{1}{2}$

5) a) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; b) $\overset{v_1}{(1,0,0,0)}, \overset{v_2}{(0,1,0,0)}, \overset{v_3}{(0,0,1,0)} \overset{v_4}{(0,0,0,1)}, \overset{v_5}{(1,2,1,1)}$