TMA660
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri F/Pi

Datum: 2008-10-20, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jonatan Vasilis, tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.

==

1. Lös för varje värde på λ och μ det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \quad + 5x_3 \quad - 2x_4 &= \lambda \\ \quad 2x_2 \quad - x_3 \quad + \mu x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 \quad + 2x_3 \quad - x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + (\mu+4)x_3 + (2\mu-2)x_4 &= \lambda + 5 \end{cases} . \quad \text{(8p)}$$

2. Givet är punkten $P_0\,(3,-4,-2)$ och planet π som innehåller de två räta linjerna

$$l_1 : \frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}; \qquad l_2 : \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}.$$

(a) Finn P_0:s ortogonalprojektion i planet π. (5p)

(b) Finn en punkt P som har samma ortogonalprojektion i π som P_0 och är sådan att P_0 och P ligger på olika sidor om π. (2p)

3. Lös ekvationen

$$3z^5 - z^4 + 6z^3 - 2z^2 + 6z - 2 = 0. \qquad \text{(8p)}$$

4. Låt A vara matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildningen ortogonalprojektion på planet $x+y+z=0$.

(a) Förklara geometriskt varför likheterna nedan gäller

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}; \quad A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}; \quad A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}. \qquad \text{(3p)}$$

(b) Finn matrisen A (du får använda likheterna i **(a)** även om du inte har förklarat dem). (6p)

5. Givet att ekvationen $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = c$ har en reell lösning, visa att $|c| = 1$. (5p)

6.(a) Låt O vara den omskrivna cirkelns medelpunkt för $\triangle ABC$, d.v.s. den punkt i triangelns plan som ligger på lika avstånd från triangelns tre hörn (du kan ta för givet att en sådan punkt alltid finns). Visa att triangelns tre höjder skär varandra i en punkt H som uppfyller $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. (5p)

(b) Använd resultatet i **(a)** för att visa att höjdernas skärningspunkt, tyngdpunkten och den omskrivna cirkelns medelpunkt ligger i linje. (Linjen kallas Eulers linje för triangeln.) (3p)

(c) Använd resultatet i **(a)** för att visa att de tre triangelsidornas mittpunkter och de tre mittpunkterna på sträckorna som sammanbinder hörnen med höjdernas skärningspunkt ligger på en cirkel med medelpunkt mittpunkten på sträckan mellan höjdernas skärningspunkt och omskrivna cirkelns medelpunkt. (Cirkeln kallas Eulers cirkel, alt. Feuerbachs cirkel, alt. niopunktscirkeln för triangeln; förutom de ovannämnda sex punkterna innehåller den även de tre höjdernas fotpunkter.) (3p)

OBS! I deluppgifter **(b)** och **(c)** får du använda resultatet i **(a)** även om du inte har bevisat det.

7. Formulera och bevisa transponeringsregeln för matrisprodukt. (4p)

8. Formulera och bevisa satsen om att icke-reella nollställen till polynom med reella koefficienter förekommer i komplexkonjugerade par. (6p) Visa att polynom med reella koefficienter kan faktoriseras i reella första- och andragradsfaktorer, där andragradsfaktorerna saknar reella nollställen. (2p)

/JM

TMA660 Linjär algebra och geometri

Lösningar 20/10-2008

1.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 5 & -2 & \lambda \\ 0 & 2 & -1 & \mu & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & \mu+4 & 2\mu-2 & \lambda+5 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ (-2) \\ + \end{array}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & \lambda-10 \\ 0 & 2 & -1 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu & 2\mu & \lambda-5 \end{array}\right) +$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & \lambda-10 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & \lambda-9 \\ 0 & 0 & \mu & 2\mu & \lambda-5 \end{array}\right)$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & \lambda-10 \\ 0 & 0 & \mu & 2\mu & \lambda-5 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & \lambda-9 \end{array}\right)$$

① $\mu \neq 0$: pivotelement i de fyra förste kolonnerne $\Rightarrow$ entydig lösning (se nästa sida)

② $\mu = 0$: de siste radene blir $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-9 \end{array}\right)$

Eftersom λ inte kan vara 5 o 9 samtidigt följer att det inte finns någon lösning för $\mu = 0$. (2)

Tillbaka till (1) : $\mu \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$x_4 = \frac{\lambda - 9}{\mu} \; ; \; x_3 = (\lambda - 5 - 2(\lambda - 9))/\mu = \frac{-\lambda + 13}{\mu}$$

$$x_2 = \left(\lambda - 10 - \frac{-\lambda + 13}{\mu}\right) / (-2)$$

$$x_1 = 5 + \frac{\lambda - 9}{\mu} - 2 \cdot \frac{-\lambda + 13}{\mu} + \frac{3}{2}\left(\lambda - 10 + \frac{\lambda - 13}{\mu}\right) =$$

$$= -10 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{9}{2} \cdot \frac{\lambda}{\mu} - \frac{109}{2} \cdot \frac{1}{\mu}$$

(2.) (a) $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow$ vi behöver skapa en vektor till i π (förutom $u = (13, 1, -4)$)

Pkter i planet är bl. a. de två man kan utläsa ur l_1 och l_2:s ekvationer: $P_1(5, 6, -3)$ och $P_2(2, 3, -3)$

Tag $v_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -3, 0) \parallel (1, 1, 0) = v$

Normalvektor till planet:

$$\vec{n}_1 = u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 13 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= +4e_1 - 4e_2 + 12e_3 = (4, -4, 12)$$

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n} = (1, -1, 3)$$

$\Rightarrow \pi : x - y + 3z = d$

$P_1 \in \pi : 5 - 6 - 9 = d \Rightarrow d = -10$

Låt Q vara P_0:s ortogonalprojektion i π.

l: linjen genom P_0, $l \perp \pi$

$\Rightarrow l \parallel \vec{n} = (1,-1,3)$

$$l: \begin{cases} x = 3+t \\ y = -4-t \\ z = -2+3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Q fås för något t_0; sätt in i π:s ekvation för att bestämma t_0:

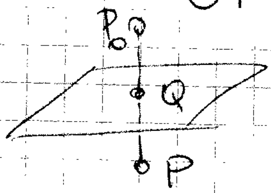
$$(3+t_0) - (-4-t_0) + 3(-2+3t_0) = -10$$

ger $t_0 = -1$

$\Rightarrow$ Q har koordinater $(2,-3,-5)$

(b) Vi kan exempelvis välja P_0:s spegelbild i π; då gäller

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + 2\vec{PQ} =$$



$$= (3,-4,-2) + 2(-1,1,-3) =$$
$$= (1,-2,-8)$$

$\Rightarrow P(1,-2,-8)$ duger

3. Vi letar efter eventuella rationella rötter

$p \mid (-2) \Rightarrow$ möjligheterna är $\pm 1, \pm 2$

$q \mid 3 \Rightarrow$ — " — $1, 3$

Teckenkombinationen medför att polynomet antar negativa värden $\forall$ negativa reella tal $\Rightarrow$ eventuella rationella rötter kan finnas endast bland $1; 2; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}$

Prövning ger att $z_1 = \frac{1}{3}$ är en lösning.

Polynomdivision ger

$$3z^5 - z^4 + 6z^3 - 2z^2 + 6z - 2 =$$

$$= 3\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z^4 + 2z^2 + 2\right) =$$

$$= (3z-1)\left(z^4 + 2z^2 + 2\right)$$

Återstår att lösa $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

$$(z^2+1)^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = -1 \pm i$$

(1) $z^2 = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) =$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_{2,3} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)/2} \qquad k = 0, 1$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{3\pi}{8}} \qquad z_3 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{11\pi}{8}}$$

(2) $z^2 = -1 - i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$$z_4 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{5\pi}{8}}, \quad z_5 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{13\pi}{8}}$$

Alt.: (1) $z = a + bi$, $z^2 = -1 + i$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

$2ab = 1 \Rightarrow$ a, b har samma tecken

$$\Rightarrow a^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \quad b^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

samma tecken $\Rightarrow$ $z_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$

$$z_3 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

4. (a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \perp$ planet

$\Rightarrow$ projiceras på nollvektorn

$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \in$ planet

$\Rightarrow$ projiceras på sig själva

(b)

$$A \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}}_{=B} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} B^{-1} \quad (\text{om } \exists B^{-1})$$

$$(B \mid E) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}(-1)\\+\\+\end{matrix} \sim$$

$$\overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0\\0 & +1 & +2 & +1 & 0 & -1\end{pmatrix} \begin{matrix}\\+\\\cdot 2\end{matrix}$$

$$\overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -2\\0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix} \begin{matrix}+\\\cdot(-1)\\\cdot \frac{1}{3}\end{matrix}$$

$$\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ \cdot(-2)\ + \end{array}$$

$$\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \exists B^{-1} =$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

---

5. $\exists\, x_0 \in \mathbb{R} \;:\; \left(\frac{x_0+i}{x_0-i}\right)^n = c$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\overline{\left(\frac{x_0+i}{x_0-i}\right)}\right)^n}_{} = \overline{c}$$

$$= \left(\frac{x_0-i}{x_0+i}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{x_0+i}{x_0-i}\right)^n} = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \overline{c} = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow c\overline{c} = |c|^2 = 1 \Rightarrow |c| = 1$$

---

6. (a) Låt $H: \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) =$$

$$= \|\overrightarrow{OA}\|^2 - \|\overrightarrow{OB}\|^2 = 0$$

$\Rightarrow H \in$ höjden från C
analogt (eller av symmetriskäl)
$H \in$ de två andra höjdena
$\Rightarrow$ de tre höjdena skär varandra i H

(b) T tyngdpunkten
$$\vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{3}\vec{OH}$$
$\Rightarrow O, T, H$ ligger i linje

(c) Kalla mittpunkten på OH för M, mittpkterna på AB, BC, CA för C_1, A_1, B_1 (resp.)
$$\rho = \|\vec{MC_1}\| = \|\vec{OC_1} - \vec{OM}\| = \left\| \frac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2} - \frac{\vec{OH}}{2} \right\| =$$
$$= \left\| -\frac{\vec{OC}}{2} \right\| = \frac{1}{2}\|\vec{OC}\| = \underbrace{\frac{1}{2}\|\vec{OA}\|}_{=\|\vec{MA_1}\|} = \underbrace{\frac{1}{2}\|\vec{OB}\|}_{=\|\vec{MB_1}\|}$$

Mittpkten på CH kallas C_2:
$$\|\vec{MC_2}\| = \left\| \frac{\vec{OC}+\vec{OH}}{2} - \frac{\vec{OH}}{2} \right\| = \left\| \frac{\vec{OC}}{2} \right\| = \rho$$
$\Rightarrow$ de sex punktena ligger på en cirkel med medelpunkt i M och radie ρ = halva omskrivna cirkelns radie