TMA660
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri F

Datum: 2008-08-18, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Aron Lagerberg, tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

===

1. Lös för varje värde på parametern λ det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + (\lambda - 1)\, x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + (\lambda+5)x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 3 \end{cases} . \quad (8p)$$

2. En ljusstråle med riktningsvektorn $(-3, 0, 4)$ reflekteras i ett plan som innehåller origo. Den reflekterade strålen har riktningsvektorn $(1, -2, 2)$. Bestäm planets ekvation. (7p)

3. Lös ekvationen

$$z^4 + (1-2i)z^3 + (3+5i)z^2 + (2-4i)z + (2+10i) = 0,$$

givet att den har en rent imaginär rot. (8p)

4.(a) Visa att vektorerna $(1, 1, -1), (1, 0, 1)$ och $(1, -1, 0)$ bildar bas i $\mathbb{R}^3$. (3p)

(b) Vektorn u har koordinater $(2, 5, -1)$ i standardbasen. Finn u:s koordinater i basen från deluppgift (a). (3p)

(c) Finn en ortogonal bas i $\mathbb{R}^3$ som innehåller vektorn $(1, 1, -1)$. (3p)

5. Matrisen A är av typen $n \times n$ $(n > 1)$ och alla dess element är lika med 1. Visa att matrisen $E - A$ $(= I - A)$ har en invers av formen $E - pA$ $(= I - pA)$ och beräkna p. ($E = I$ är enhetsmatrisen av typen $n \times n$.) (7p)

6. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & z & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & z & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & z \end{vmatrix} = 0.$$

(Determinanten är av ordning n.) (8p)

V.G.V.

7. Det linjära ekvationssystemet $Ax = 0$ är kvadratiskt. Givet att systemet har icke-trivial lösning, visa att matrisen A inte är inverterbar. (6p)

8. Formulera och bevisa satsen om eventuella rationella rötter till en algebraisk ekvation med heltalskoefficienter. (6p)

/JM

TMA660 Linjär algebra o geometri F

18/8-08 Lösningar

1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & \lambda-1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & \lambda+5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & \lambda-1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & \lambda+5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1)\ (-2) \\ \\ + \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ + \\ + \\ + \\ \end{array} \sim$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\lambda = 0$: $\nexists$ lösning (pivotelement i sista kolonnen)

$\lambda = 1$: rad 3 nollrad

$\lambda = 1$: $x_4 = 2$, $x_3 = t$, ②

$$x_2 = \frac{3}{2} + 1 - \frac{t}{2} = \frac{5}{2} - \frac{t}{2}$$

$$x_1 = -4 + t - 5 + t = -9 + 2t \;, \; t \in \mathbb{R}$$

$\lambda \neq 0 ; 1$: $x_4 = \frac{2}{\lambda}$, $x_3 = 0$,

$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{\lambda} \;, \; x_1 = -3 - \frac{6}{\lambda}$$

(entydig lösning)

$\Rightarrow$ $\lambda = 0$: ingen lösning

$\lambda = 1$: oändligt många lösningar

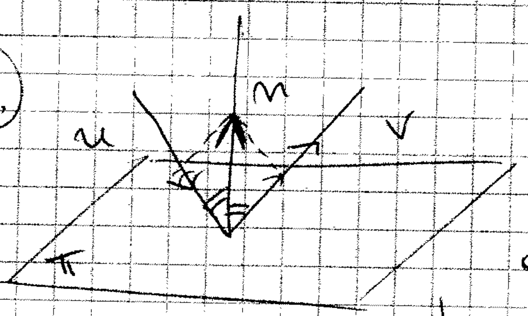
$x_1 = -9 + 2t$; $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{t}{2}$; $x_3 = t$; $x_4 = 2$

($t \in \mathbb{R}$)

$\lambda \neq 0 ; 1$: entydig lösning

$x_1 = -3 - \frac{6}{\lambda}$, $x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{\lambda}$; $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{2}{\lambda}$

---

② 

Om vi väljer vektorer $u_0 = -\frac{u}{\|u\|}$ och $v_0 = \frac{v}{\|v\|}$, så kommer $n = u_0 + v_0$ att vara en normalvektor till planet (additionsparallellogrammen blir då en romb och diagonalerna i en romb är bisektriser till vinklarna)

$$u_0 = -\frac{1}{\sqrt{9+16}}(-3, 0, 4) = \left(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)$$

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}}(1, -2, 2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$n = u_0 + v_0 = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3},\ 0 - \frac{2}{3},\ -\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right) =$ (3)

$= \left(\frac{14}{15},\ -\frac{10}{15},\ -\frac{2}{15}\right) \parallel (7, -5, -1)$

$\Rightarrow \pi : 7x - 5y - z = d$

π innehåller origo $\Rightarrow d = 0$

$\Rightarrow \pi : 7x - 5y - z = 0$

---

(3) $z_1 = ai,\ a \in \mathbb{R}$

Re : $a^4 - 2a^3 - 3a^2 + 4a + 2 = 0$

Im : $-a^3 - 5a^2 + 2a + 10 = 0 \quad \Big|\cdot(-2)$

$a^4 + 7a^2 - 18 = 0$

$(a^2 - 2)(a^2 + 9) = 0$

$a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ möjliga värden $a = \pm\sqrt{2}$

insättning visar att båda ger rötter

$\Rightarrow z_1 = i\sqrt{2}$, $z_2 = -i\sqrt{2}$

Polynomdivision ger att v.l. =

$= (z^2 + 2)(z^2 + (1-2i)z + (1+5i))$

Återstår att lösa $z^2 + (1-2i)z + (1+5i) = 0$

Kvadratkomplettering:

$\left(z + \frac{1-2i}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-2i}{2}\right)^2 + (1+5i) = 0$

Sätt $w = z + \frac{1-2i}{2} = u + iv$.

$w^2 = \frac{-7-24i}{4} = (u^2 - v^2) + 2uvi$

$\Rightarrow u^2 - v^2 = -\frac{7}{4}$, u o v har olika tecken

4

$$u^2+v^2 = |w|^2 = |w^2| = \frac{1}{4}\sqrt{49+576} = \frac{25}{4}$$

$$\left|\begin{array}{l} -u^2+v^2 = +\frac{7}{4} \\ u^2+v^2 = \frac{25}{4} \end{array}\right. \quad +$$

$$2v^2 = \frac{32}{4} = 8 \Rightarrow v^2 = 4 \Rightarrow v = \pm 2$$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{9}{4}, \quad uv<0 \Rightarrow u = \mp \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow z_3 = \frac{3}{2} - 2i - \frac{1}{2} + i = 1 - i$$

$$z_4 = -\frac{3}{2} + 2i - \frac{1}{2} + i = -2+3i$$

---

4. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1+1+1 = 3 \neq 0 \Rightarrow LO$

3 st. LO vektorer i $\mathbb{R}^3$ bilder bas

(b) $(2,5,-1) = \lambda(1,1,-1) + \mu(1,0,1) + \nu(1,-1,0)$

LES: $\left|\begin{array}{l} \lambda+\mu+\nu = 2 \\ \lambda \quad\quad -\nu = 5 \\ -\lambda+\mu \quad\quad = -1 \end{array}\right.$

lösning: $\lambda = \frac{8}{3}, \mu = \frac{5}{3}, \nu = -\frac{7}{3}$

bas $\mathcal{F} = \{(1,1,-1), (1,0,1), (1,-1,0)\}$

(OBS! I den ordningen!)

$$(2,5,-1) = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{3}\right)_{\mathcal{F}}$$

(c) $(1,0,1) \perp (1,1,-1)$ /5

Tredje vektorn kan väljas som vektorprodukten

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -1)$$

---

5 $\quad E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ & & & \vdots & & \\ -1 & -1 & \cdots & & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(E-A)(E-pA) =$ (enl. reglerna för matrismultiplikation)

$= E^2 - pA - A + pA^2 =$

$= E - (p+1)A + pA^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \cdots & n \\ & & \cdots & \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix} = nA$$

$\Rightarrow (E-A)(E-pA) = E + (np - p - 1)A$

Matriserna är varandras inverser omm

$np - p - 1 = 0$, d.v.s. $p = \dfrac{1}{n-1}$

Alt:
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & \cdots & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & & & & \\ -1 & -1 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -(n-1) & -(n-1) & \cdots & -(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & & & \\ -1 & -1 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \ddots & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n-1} & 1-\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & 1-\frac{1}{n-1} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ (-1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{c|cccc} E & 1-\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ & -\frac{1}{n-1} & 1-\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & 1-\frac{1}{n-1} \end{array}\right)$$

$$= E - \frac{1}{n-1} A$$

---

6. Utveckla längs första kolonnen:

$$D_n = 1 \cdot \begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & z & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & z & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & z \end{vmatrix}}_{D_{n-1}} =$$

$$= z^{n-1} + D_{n-1} = \ldots = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1$$

$$= \frac{z^n - 1}{z - 1} \quad \text{för } z \neq 1 \quad (z = 1 \text{ ej lösning})$$

$z^n = 1 \qquad z_k = e^{(0+k\cdot 2\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$ 7

Alla utom $z_0 = 1$ kommer att vara lösningar till den ursprungliga ekvationen

$$z_k = e^{k\cdot 2\pi/n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$