TMA660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri F

Datum: 2008-01-14, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Aron Lagerberg, tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Lös för varje värde på λ och μ det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + \lambda x_4 &= -1 \\ 7x_1 + 8x_2 + x_3 + 10x_4 &= -1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 10x_4 &= \mu \end{cases} . \quad (9p)$$

2. De två räta linjerna l och m ges av

$$l : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \qquad m : \begin{cases} x = -2 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Finn alla par punkter A, B, A på l och B på m, och sådana att triangeln med hörn i A, B och origo är liksidig. (6p)

3. Ekvationen

$$z^6 + 4z^5 + 5z^4 + 11z^3 + 12z^2 - 3z + 18 = 0$$

har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (8p)

4. Givet är att $|z| = 1$. Visa att $|z - 2i| = |1 + 2iz|$. (5p)

5. En kvadratisk matris kallas uppåt triangulär om den endast har nollor under huvuddiagonalen. Låt A vara en uppåt triangulär matris sådan att produkten av dess element på huvuddiagonalen är skild från 0. Visa att A har en invers och att den också är uppåt triangulär. (6p)

6. Matrisen A är av typ $n \times n$ ($n \geq 3$) och sådan att varje element i A är lika med sin kofaktor.

(a) Visa att antingen är A nollmatrisen eller också är A inverterbar. (4p)

(b) Visa att raderna i A är sinsemellan ortogonala. (4p)

7.(a) Visa satsen om en linjär avbildnings standardmatris (inkl. entydighet). (6p)

(b) Härled matrisen för avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, där $T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2$ för alla $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. (Vi antar att $\mathbb{R}^n$ är utrustat med standardbasen.) (2p)

8.(a) Visa att längden av en vektors ortogonalprojektion på ett underrum alltid är mindre än eller lika med vektorns egen längd. (4p)

(b) Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz olikhet. (6p)

/JM

TMA660 Linjär algebra och geometri F

Lösningar 14/11-08

1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \lambda & -1 \\ 7 & 8 & 1 & 10 & -1 \\ 5 & 7 & 4 & 10 & \mu \end{array}\right) \quad \cdot(-2) \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-7) \quad \cdot(-5) \quad + \quad + \quad + \quad +$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & 1 & -13 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & \mu-5 \end{array}\right) \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-2) \quad + \quad + \quad +$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & +\cancel{10}_5 & +\cancel{4}_2 & +\cancel{6}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-1 \end{array}\right)$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-1 \end{array}\right)$$

(2)

(1) $\mu \neq 1$: pivotelement i sista kolonnen $\Rightarrow$ lösning saknas

(2) $\mu = 1$: (i) $\lambda \neq 2 \Rightarrow x_4 = 0$

$x_3 = 3/5 \qquad x_2 = -2 + 9/5 = -1/5$

$x_1 = 1 - 6/5 + 1/5 = 0$

(ii) $\lambda = 2 \Rightarrow$ nollrad $x_4 = t$ fri variabel

$x_3 = 3/5 - 2t/5 = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}t$

$x_2 = -2 + 9/5 - 6t/5 = -\frac{1}{5} - \frac{6}{5}t$

$x_1 = \cancel{1} - 2t - \cancel{\frac{6}{5}} + \frac{4}{5}t + \cancel{\frac{1}{5}} + \frac{6}{5}t = 0$

$\mu \neq 1$: ingen lösning

$\mu = 1, \lambda \neq 2$:
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -\frac{1}{5}$$
$$x_3 = \frac{3}{5}$$
$$x_4 = 0$$

$\mu = 1, \lambda = 2$:
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -\frac{1}{5} - \frac{6}{5}t$$
$$x_3 = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}t$$
$$x_4 = t$$

---

2. $A \in l \Rightarrow A(1, 0, t)$

$B \in m \Rightarrow B(-2, s, 3)$

origo : $O(0, 0, 0)$

$\underset{0 \leq}{|\vec{OA}|} = \underset{0 \leq}{|\vec{OB}|} \iff |\vec{OA}|^2 = |\vec{OB}|^2$

$\iff 1 + t^2 = 4 + s^2 + 9 = 13 + s^2$

$\measuredangle AOB = \frac{\pi}{3} \iff \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|} = \frac{-2 + 0 + 3t}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|}$

$|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$

$\Rightarrow$ vi får ekvationen $\frac{3t-2}{1+t^2} = \frac{1}{2}$

$6t - 4 = 1 + t^2$

$t^2 - 6t + 5 = 0 \quad < \begin{matrix} t_1 = 1 \\ t_2 = 5 \end{matrix}$

$t_1 = 1 \;:\; 1 + 1 = 13 + s^2$ omöjligt ty $s^2 \geq 0$

$t_2 = 5 \;:\; 1 + 25 = 13 + s^2$

$s^2 = 13 \qquad s = \pm\sqrt{13}$

$\Rightarrow$ det finns två par punkter med den önskade egenskapen

$\left| \begin{matrix} A(1, 0, 5) \\ B_1(-2, \sqrt{13}, 3) \end{matrix} \right.$ och $\left| \begin{matrix} A(1, 0, 5) \\ B_2(-2, -\sqrt{13}, 3) \end{matrix} \right.$

(3.) Ansats $z = ai \quad , \; a \in \mathbb{R}$

$-a^6 + 4a^5 i + 5a^4 - 11a^3 i - 12a^2 - 3ai + 18 = 0$

Re: $-a^6 + 5a^4 - 12a^2 + 18 = 0 \quad (1)$

Im: $a(4a^4 - 11a^2 - 3) = 0 \quad (2)$

$a = 0$ satisfierar ej (1)

$a \neq 0 \Rightarrow 4a^4 - 11a^2 - 3 = 0$

$$a^2 = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{8} = \frac{11 \pm 13}{8}$$

$a^2 \geq 0 \Rightarrow$ endast + -varianten möjlig

$a^2 = 3$

Insättning visar att $a^2 = 3$ satisfierar även (1)

$\Rightarrow z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$ är lösningar

Polynomdivision ger 4

$z^6 + 4z^5 + 5z^4 + 11z^3 + 12z^2 - 3z + 18 =$

$= (z^2+3)(z^4 + 4z^3 + 2z^2 - z + 6)$

Återstår att lösa $z^4 + 4z^3 + 2z^2 - z + 6 = 0$

Om $\exists$ rationell rot $\frac{p}{q}$, $(p,q)=1$

gäller att $p \mid 6$

$q \mid 1$

$\Rightarrow$ eventuella rationella rötter måste vara heltal och möjliga sådana är

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Insättning visar att $z_3 = -2$ och $z_4 = -3$ är rötter. Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(z^4 + 4z^3 + 2z^2 - z + 6) / (z^2 + 5z + 6) = z^2 - z + 1 \\
-\underline{z^4 + 5z^3 + 6z^2} \\
\quad -z^3 - 4z^2 - z + 6 \\
\quad -\underline{-z^3 - 5z^2 - 6z} \\
\qquad z^2 + 5z + 6 \\
\qquad -\underline{z^2 + 5z + 6} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Återstående rötter: $z_{5,6} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$, $z_3 = -2$, $z_4 = -3$, $z_{5,6} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$

---

4. $\underbrace{|z - 2i|}_{0 \le} = \underbrace{|1 + 2iz|}_{0\le} \Leftrightarrow |z-2i|^2 = |1+2iz|^2$

$|z - 2i|^2 = (z-2i)(\bar{z} + 2i) = z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} + 4 =$

$= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(iz) + 4 = 5 - 2\mathrm{Im}\, z$

5

$$|1+2iz|^2 = (1+2iz)(1-2i\bar{z}) =$$
$$= 1 + 2iz - 2i\bar{z} + 4z\bar{z} = 5 - 2\,\mathrm{Im}\,z$$
$$\Rightarrow \quad |z-2i| = |1+2iz|$$

5

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad \det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad \exists A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \circledast & - & - & - & 1 & & & \\ & \circledast & - & - & & 1 & & 0 \\ & & \ddots & & & & E\ \ddots & \\ 0 & & & \circledast & 0 & & & 1 \end{array} \right)$$
$$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxx}}_{A}$$

Elementen, betecknade med $\circledast$ är $\neq 0$; de kan användas för att eliminera uppåt. Elimination nedåt behövs inte $\Rightarrow$ nollorna under diagonalen i E bevaras $\Rightarrow$ A^{-1} uppåt triangulär

---

6 (a)
$$\det A = a_{k1}A_{k1} + \cdots + a_{kn}A_{kn} =$$
$$= a_{k1}^2 + \cdots + a_{kn}^2 \quad , \quad k = 1 \ldots n$$
$$\underbrace{\det A = 0}_{\Leftrightarrow\ \nexists A^{-1}} \Rightarrow a_{ki} = 0 \quad \forall\, k, i = 1 \ldots n$$
$$\Rightarrow \quad A = \text{nollmatrisen}$$

(b) rad k $\cdot$ rad m =
$$= a_{k1}a_{m1} + \cdots + a_{kn}a_{mn} =$$
$$= a_{k1}A_{m1} + \cdots + a_{kn}A_{mn} = 0 \quad \text{för } k \neq m$$