①

(V)

~~VV11~~ ~~VV13~~

TMA660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri F

Datum: 2007-01-18, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. / eller Roger Andersson 0762-721861
Telefonvakt: Aron Lagerberg, tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

---

1. Lös för varje värde på λ och μ det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 7x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 5x_4 &= \lambda - 2 \\ 2x_1 - x_2 - \mu x_3 + x_4 &= -1 \end{cases}. \quad (8p)$$

2. Givet är den räta linjen

$$l : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

och punkten $A(2, -2, 1)$. Finn ekvationerna för de räta linjerna l_1 och l_2 om l_1 går genom A, $l_1 \perp l$ och l_1 skär l; l_2 är vinkelrät mot både l och l_1, l_2 skär l i $B(0, 1, 1)$. Beräkna (det kortaste) avståndet mellan l_1 och l_2. (7p)

3. Ekvationen

$$z^3 - (1 + 2i)z^2 - (1 - 5i)z + 6 + 2i = 0$$

har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (8p)

4. Givet punkterna $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 1)$, $C(1, 1, 2)$, $D(-3, 2, -1)$, visa att vektorerna $u = \overrightarrow{DA}$, $v = \overrightarrow{DB}$, $w = \overrightarrow{DC}$, bildar en bas i $\mathbb{R}^3$. (3p) Uttryck höjden DH i tetraedern $ABCD$ som linjärkombination av u, v, w. (4p)

5. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+n \end{vmatrix} = 0.$$

(7p: lösning för $n = 4$ ger max 4p)

6. Givet ett högerorienterat ortogonalt koordinatsystem i rummet, låt S vara avbildningen rotation $+\frac{\pi}{2}$ kring z-axeln och T vara avbildningen rotation $+\frac{\pi}{2}$ kring x-axeln.

(a) Förklara geometriskt varför S och T är linjära avbildningar. (2p)

(b) Finn matriserna för S och T i den givna basen. (4p)

(c) Visa att $ST \neq TS$. (3p)

7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektorprodukt (inkl. hjälpsats). (6p)

8. Formulera och bevisa satsen om att icke-reella nollställen till polynom med reella koefficienter förekommer i komplexkonjugerade par. (6p) Visa att polynom med reella koefficienter kan faktoriseras i reella första- och andragradsfaktorer, där andragradsfaktorerna saknar reella nollställen. (2p)

/JM

Linjär algebra och geometri F

TMA 660

18/1-07 – Lösningar

1.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & -10 & 5 & \lambda-2 \\ 2 & -1 & -\mu & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & 4 & -2 & \lambda-9 \\ 0 & -5 & 4-\mu & -1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-\mu & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{array}\right)$$

$\lambda \neq 3$: pivotelement i sista kolonnen $\Rightarrow$ inga lösningar

$\lambda = 3$, $\mu \neq 2$: en fri variabel

$x_4 = t$, $x_3 = 0$, $x_2 = \frac{1}{5}(3-t)$, $x_1 = \frac{-1}{5}(1+3t)$

$\underline{\lambda = 3, \mu = 2}$: två fria variabler ②

$$\begin{cases} x_3 = s, \quad x_4 = t \\ x_2 = \frac{1}{5}(3 + 2s - t) \\ x_1 = 1 - \frac{2}{5}(3 + 2s - t) + 2s - t = \\ \quad = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5}s - \frac{3}{5}t \end{cases}$$

---

② Låt $P \in l$, $P = l \cap l_1$, $P(t_0, 1, 1+t_0)$

$l_1 \perp l \Rightarrow AP \perp l$

$\Rightarrow (t_0 - 2, 3, t_0) \cdot (1, 0, 1) = 0$

$\Rightarrow 2t_0 - 2 = 0 \Rightarrow t_0 = 1$

$\Rightarrow P = l \cap l_1$ har koordinater $(1, 1, 2)$

$$\Rightarrow l_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

l_2 har riktningsvektor $\underline{v} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Tag } v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, 3)$$

$$\Rightarrow l_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$l \perp l_1, l_2$; skär båda

$\Rightarrow$ (det kortaste) avståndet mellan l_1 & l_2 är längden av sträckan mellan skärningspunkterna med l $= \sqrt{2}$.

(3) Ansätt $z = ai$ (3)

$$-a^3 i + a^2 + 2a^2 i - ai - 5a + 6 + 2i = 0$$

Re : $a^2 - 5a + 6 = \underline{(a-2)}(a-3) = 0$

Im : $-a^3 + 2a^2 - a + 2 =$

$= -\underline{(a-2)}(a^2+1) = 0$

$\Rightarrow$ den rent imaginära roten är $z_1 = 2i$

Polynomdivision ger

$$P(z) = (z-2i)(z^2 - z - 1 + 3i)$$

$$z^2 - z - 1 + 3i = 0$$

$\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} + 3i = 0$; sätt $w = z - \frac{1}{2}$

$w^2 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} - 3i$; $w = a + bi$

$$\pm \left| \begin{array}{l} a^2 - b^2 = \frac{5}{4} \\ 2ab = -3 \quad \text{(a, b har olika tecken)} \\ a^2 + b^2 = \sqrt{\frac{25}{16} + 9} = \frac{13}{4} \end{array} \right.$$

$2a^2 = \frac{18}{4}$ $\qquad a^2 = \frac{9}{4}$

$2b^2 = \frac{8}{4}$ $\qquad b^2 = 1$

$\Rightarrow a = \pm \frac{3}{2}$, $b = \mp 1$

$\Rightarrow z - \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2} \mp 1 \cdot i \Rightarrow z_2 = 2 - i$

$z_3 = -1 + i$

(4.) $u = (+4, -3, +3)$

$v = (+5, -1, +2)$

$w = (+4, -1, +3)$

$$[u,v,w] = \begin{vmatrix} +4 & -3 & +3 \\ +5 & -1 & +2 \\ +4 & -1 & +3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\cancel{12} + 24 + 15 - \cancel{12} - 8 - 45) = +14 \neq 0$$

$\Rightarrow$ u, v, w ej komplana

$DH \perp$ planet Π som bestäms av A, B, C

$\vec{AB} = (1, 2, -1)$

$\vec{AC} = (0, +2, 0) \parallel (0, 1, 0)$

$$\Pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

H fås för s_0, t_0

$\vec{DH} = (4+s, -3+2s+t, 3-s) \perp \vec{AB}, \vec{AC}$

$4+s-6+4s+2t-3+s=0$

$-3+2s+t=0$

$$\left| \begin{array}{l} 2s+t=3 \\ 6s+2t=5 \end{array} \right. \qquad 2s=-1 \qquad s=-\frac{1}{2}$$

$$t=4$$

$\Rightarrow \vec{DH} = \left(\frac{7}{2}, 0, \frac{7}{2}\right) = \alpha u + \beta v + \gamma w$

$$\left| \begin{array}{l} +4\alpha + 5\beta + 4\gamma = \frac{7}{2} \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ +3\alpha + 2\beta + 3\gamma = \frac{7}{2} \end{array} \right.$$

återstår att lösa det LES.

5.
$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+2 & 3 & \dots & n \\ & & \dots & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+n \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \vdots \\ \leftarrow + \\ (\cdot(-1)) \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & -x \\ 0 & x & 0 & \dots & -x \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & x+\frac{n(n+1)}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= x^{n-1}\left(x + \frac{n(n+1)}{2}\right) = 0$$

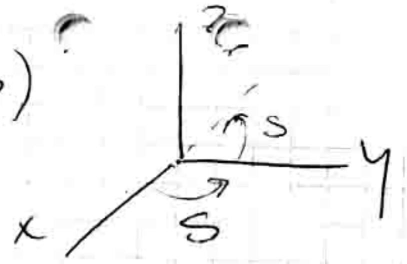
lösningar: $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$

$x_n = -\frac{n(n+1)}{2}$

---

6. (a) Avbildningen är en kongruens (parallellogram avbildas på parallellogram, $\lambda \cdot$ vektor avbildas på $\lambda \cdot$ vektorns bild)

(b)



$(1,0,0) \xrightarrow{S} (0,1,0)$

$(0,1,0) \to (-1,0,0)$

$(0,0,1) \to (0,0,1)$

$\Rightarrow$ matrisen för S är $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

analogt för T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) ST har matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

TS —"— $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ de kommuterar inte.