TMA660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri F

Datum: 2006-10-28, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Mikael Persson, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Lös för varje värde på λ och μ det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= \lambda \\ 3x_1 + 2x_2 + \mu x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 &= -2 \end{cases} . \quad (8p)$$

2. Givet är de två räta linjerna

$$l_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad l_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm ekvationen för ett plan π sådant att l_1 och l_2 är varandras spegelbilder m.a.p. π. (7p)

(b) Givet två godtyckliga räta linjer, när finns ett plan sådant att de är varandras spegelbilder m.a.p. planet? (2p)

3. Ekvationen

$$z^5 - 2z^4 + 2z^3 - 12z^2 - 3z - 18 = 0$$

har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (8p)

4. Givet är de tre matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna produkten $A^{103}B^{77}C^{68}$. (4p)

(b) Ge en tolkning av resultatet i termer av elementära matriser. (3p)

5. En kvadratisk matris kallas uppåt (nedåt) triangulär om alla dess element under (över) huvuddiagonalen är lika med 0. Visa att om A och B båda är uppåt triangulära, så gäller att AB också är uppåt triangulär. (7p)

6. Låt $\alpha \in \mathbb{C}$. Visa att funktionen

$$f(z) = \begin{vmatrix} e^{\alpha\overline{\alpha}} & e^{\alpha\overline{z}} \\ -e^{\overline{\alpha}z} & e^{z\overline{z}} \end{vmatrix}$$

antar reella värden för alla $z \in \mathbb{C}$ samt att

$$f(z) \geq e^{2\,\mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}z)} + 1. \qquad \text{(7p)}$$

7. Formulera och bevisa satsen om rationella nollställen till polynom med heltalskoefficienter. (6p)

8. Formulera och bevisa satsen om minsta kvadratlösning. (8p)

/JM

TMA660 Linjär algebra och geometri F

Lösningar 28/10-06

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & \lambda \\ 3 & 2 & \mu & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & \mu & 0 \\ 5 & 1 & 2 & \lambda \end{array}\right)$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & +7 & +4 & +12 \\ 0 & -7 & \mu-6 & -15 \\ 0 & -14 & -8 & \lambda-25 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & \mu-2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{array}\right)$$

$\lambda \neq 1$: pivotelement i sista kolonnen $\Rightarrow$ ingen lösning

$\lambda = 1,\ \mu = 2$: ———— " ————

$\lambda = 1,\ \mu \neq 2$: lika många pivotelement som obekanta $\Rightarrow$ entydig lösning (ej i sista kolonnen)

$$x_3 = -\frac{3}{\mu-2}, \quad x_2 = \left(12 + \frac{12}{\mu-2}\right)/7,$$

$$x_1 = 5 + \frac{6}{\mu-2} - \frac{36}{7}\left(1 + \frac{1}{\mu-2}\right)$$

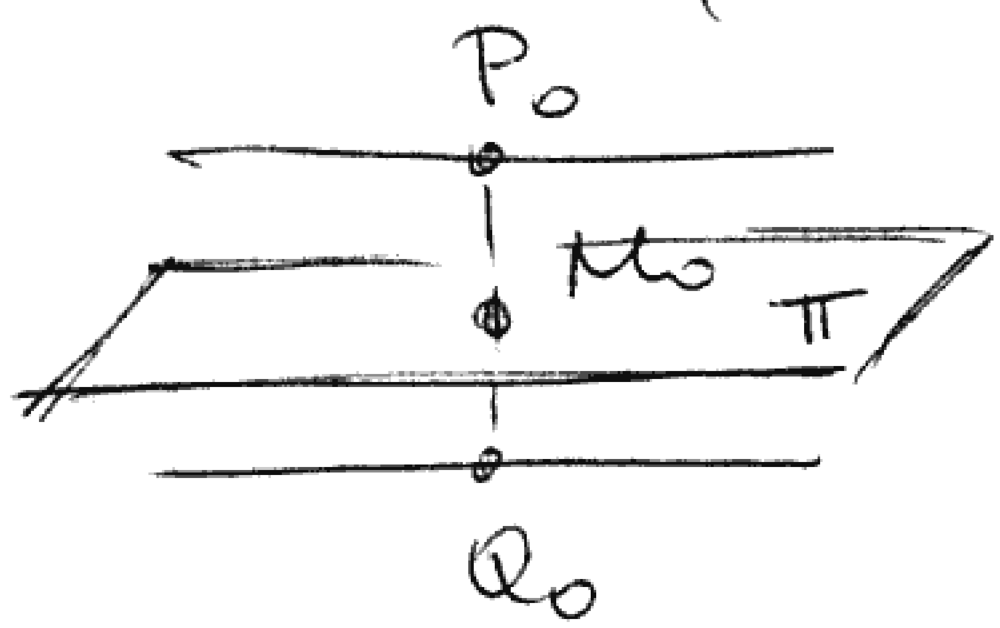
$\lambda = 1,\ \mu \neq 2$:

$$x_1 = -\frac{1}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{\mu-2}$$

$$x_2 = \frac{12}{7} + \frac{12}{7} \cdot \frac{1}{\mu-2}$$

$$x_3 = -\frac{3}{\mu-2}$$

2\. (a) $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow l_1 \parallel l_2$ 2



Tag en pkt P_0 på l_1, projicera ortogonalt på l_2 Q_0, finn mittpkten på sträckan som bildas; M_0
π går genom den mittpkten och är vinkelrätt mot sträckan P_0Q_0

$P_0\,(4,2,1)$ (ur ekvationen)

α : plan genom P_0, $\perp l_1, l_2$

normalvektor till α : $(-1,2,1) \parallel l_{1,2}$

α : $-x+2y+z = d$

sätt in P_0 : $\cancel{-4}+\cancel{4}+1 = d \Rightarrow d=1$

$\Rightarrow \alpha : -x+2y+z = 1$; $\alpha \cap l_2 = Q_0$

$-(1+2t_0)+2(-1-4t_0)+(0-2t_0) = 1$

$-12t_0 = 4$

$t_0 = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow Q_0 : \left(1-\frac{2}{3}, -1+\frac{4}{3}, 0+\frac{2}{3}\right)$

$Q_0\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow M_0\left(\frac{1}{2}\left(4+\frac{1}{3}\right), \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{3}\right), \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{3}\right)\right)$

$M_0\left(\frac{13}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{6}\right)$

$\overrightarrow{P_0Q_0} = \left(-\frac{11}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right) \parallel (11,5,1)$

$\Rightarrow \boxed{\pi : 11x+5y+z = d}$ $d = ?$

3

$$M_0 \in \pi \Rightarrow \underbrace{\frac{143}{6} + \frac{35}{6} + \frac{5}{6}} = d$$

$$= \frac{183}{6} = \frac{61}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : 11x + 5y + z = \frac{61}{2}}$$

(b) $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists$ tråst π_1
$l_1 \parallel l_2$
$\Rightarrow \exists! \ \pi$
annars: $\nexists$

---

3. Lösning 1: Ansätt $z = ai$, $a \in \mathbb{R}$

$$a^5 i - 2a^4 - 2a^3 i + 12a^2 - 3ai - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \mathrm{Re}\,(- " -) = 0 \\ \mathrm{Im}\,(- " -) = 0 \end{array} \right.$$

$$a^5 - 2a^3 - 3a = 0 < \begin{array}{c} a = 0 \\ \text{eller} \\ a^4 - 2a^2 - 3 = 0 \end{array}$$

$$-\cancel{2}a^4 + \underset{6}{\cancel{12}}a^2 - \underset{9}{\cancel{18}} = 0$$

$a = 0$ satisfierar inte den andra ekvationen

$\Rightarrow$ återstår $a^4 - 2a^2 - 3 = (a^2 - 3)(a^2 + 1) = 0$
$a^4 - 6a^2 + 9 = (a^2 - 3)^2 = 0$

$$\Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ polynomet i v.l. delbart med $(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) = z^2 + 3$

Polynomdivision ger

$$P(z) = (z^5 - 2z^4 + 2z^3 - 12z^2 - 3z - 18 =)$$
$$= (z^2 + 3)(z^3 - 2z^2 - z - 6)$$

Möjliga rationella nollställen till $z^3 - 2z^2 - z - 6$: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Insättning visar att $z_3 = 3$ är ett nollställe. Polynomdivision

$$\Rightarrow P(z) = (z^2+3)(z-3)(z^2+z+2)$$

$$(z^2+z+2) = \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 =$$

$$= \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} z_{1,2} &= \pm i\sqrt{3} \\ z_3 &= 3 \\ z_{4,5} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \end{aligned}}$$

Lösning 2 : reella koefficienter
$\Rightarrow$ både ai och $-ai$ lösningar
($a \in \mathbb{R}$)
$\Rightarrow P(z)$ delbart med z^2+a^2
Polynomdivision ger rest
$$(a^4-2a^2-3)z - 2a^4+12a^2-18$$
som måste vara $\equiv 0$
(fortsätter som lösning 1)

---

4. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \Rightarrow A^{103} = A \cdot (A^2)^{51} = A$$

$$B^2 = I \Rightarrow B^{77} = B$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\Rightarrow C^{68} = (C^3)^{22} \cdot C^2 = C^2$$

$$\Rightarrow A^{103} B^{77} C^{68} = ABC^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) A fås av I medelst byte på rad 1 och rad 2

$$\Rightarrow A^2 = I \Rightarrow A^{103} = A$$

B : byte (rad 1 och rad 4) samt (rad 2 och rad 3)

$$\Rightarrow B^2 = I \Rightarrow B^{77} = B$$

Multiplikation med A från vänster byter plats på rader 1 & 2 i matrisen till höger

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplikation med C från vänster lämnar rad 4 på plats; skriver rad 2 först, rad 3 på andra plats och rad 1 på tredje

$\Rightarrow C^3 = I$ etc.

---

5. Låt A och B $^{n \times n}$ vara uppåt triangulära $\Rightarrow a_{ij} = b_{ij} = 0$ för $i > j$

$AB = C$, där

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \; ; \quad a_{ik} = 0 \text{ för } i > k$$

$$\Rightarrow c_{ij} = 0 + \sum_{k \geq i} a_{ik} b_{kj} \; ; \quad b_{kj} = 0 \text{ för } k > j$$

$$\Rightarrow c_{ij} = 0 + \underbrace{\sum_{\substack{k \geq i \\ k \leq j}} a_{ik} b_{kj}}$$

innehåller inga termer för $i > j$

$$\Rightarrow c_{ij} = 0 \text{ för } i > j$$

6. $f(z) = e^{\alpha\bar{\alpha}} \cdot e^{z\bar{z}} + e^{\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z} =$

$= e^{|\alpha|^2} \cdot e^{|z|^2} + e^{\bar{\alpha}z + \overline{\bar{\alpha}z}} =$

$= \underbrace{e^{|\alpha|^2 + |z|^2}}_{= e^{\text{tal} \geq 0}} + e^{2\mathrm{Re}(\bar{\alpha}z)} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad f(z) \geq 1 + e^{2\mathrm{Re}(\bar{\alpha}z)}$