TMA660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri F

Datum: 2006-08-23, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: , tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

1.(a) Lös för varje värde på parametern λ det linjära ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ (2-\lambda)x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & -\lambda \end{array}\right. . \qquad (7p)$$

(b) För $\lambda = 0$, skriv upp det ekvationssystem som ger en lösning till systemet ovan i minsta kvadratmening. (3p)

2.(a) Finn skärningslinjen l mellan planen $x - 2y - z = 7$ och $x - 2y = 3$. (2p)

(b) Bestäm ekvationen för den linje i planet $x + 2y - z = 2$, som skär l under rät vinkel. (6p)

3. Lös ekvationen

$$z^4 + z^2 + 1 = 0. \qquad (7p)$$

4. Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definieras genom

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Bestäm matrisen för T och beräkna dess determinant. (7p) (Korrekt löst uppgift för $n = 4$ ger 4p.)

5. De tre punkterna O, A_1, A_2 i planet är olika och motsvaras av de komplexa talen $0,\ z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$.

(a) Beräkna φ, där φ är den geometriska vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{OA_1}$ och $\overrightarrow{OA_2}$, i termer av x_1, x_2, y_1, y_2. (2p)

(b) Om B_1, B_2 är punkterna som motsvaras av $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$, och ψ är den geometriska vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{OB_1}$ och $\overrightarrow{OB_2}$, visa att $\varphi = \psi$. (5p)

6. Använd Cauchy-Schwarz olikhet för att bevisa olikheten mellan det aritmetiska och det kvadratiska medelvärdet: givet n positiva tal, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gäller att

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

När uppnås likhet? (7p)

7. Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz olikhet. (6p)

8. Formulera och bevisa satsen om att icke-reella nollställen till polynom med reella koefficienter förekommer i komplexkonjugerade par. (6p) Visa att polynom med reella koefficienter kan faktoriseras i reella första- och andragradsfaktorer, där andragradsfaktorerna saknar reella nollställen. (2p)

/JM