TMA660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri F

Datum: 2005-10-22, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Milena Anguelova, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Lös för varje värde på parametern λ det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 15x_4 = 31 \\ x_1 + 2x_2 + (\lambda+3)x_4 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + (9-\lambda)x_3 + 9x_4 = 13-\lambda \end{cases} . \quad (7p)$$

2. Givet är de räta linjerna

$$l_1 : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad l_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

samt punkten $P(2, -2, 1)$. Bestäm ekvationen för den räta linje l som är vinkelrät mot både l_1 och l_2 och går genom P:s spegelbild i l_1. (7p)

3. Ekvationen

$$2z^3 + (2-i)z^2 + (-2+5i)z + (3+i) = 0$$

har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (7p)

4. Givet är vektorerna $e_1 = (1, 2, -1, -2)$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)$, $e_4 = (1, 3, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$.

(a) Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} . \quad (4p)$$

(b) Visa att e_1, e_2, e_3, e_4 är linjärt oberoende (och därmed bildar bas i $\mathbb{R}^4$). (2p)

(c) Visa att vektorn $u = (7, 14, -1, 1)$ har koordinaterna $(-2, 3, 0, 3)_e$ i basen e_1, e_2, e_3, e_4. (2p)

5. Givet är matrisen A och vektorn b, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Visa att b inte tillhör A:s kolonnrum $V(A) = \mathrm{Col}\, A$. (2p)
(b) Finn en approximativ lösning till ekvationssystemet $Ax = b$ med hjälp av minsta kvadratmetoden. (3p)
(c) Använd den lösningen för att bestämma b:s ortogonalprojektion på A:s kolonnrum. (3p)

6. Låt

$$V(t_1, t_2, \ldots, t_n, t) = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{n-1} & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^{n-1} & t_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^{n-1} & t_n^n \\ 1 & t & t^2 & \ldots & t^{n-1} & t^n \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t_i \neq t_j \text{ för } i \neq j.$$

(a) Visa att $V(t_1, t_2, \ldots, t_n, t)$ är ett polynom av t, $P = P(t)$. (2p)
(b) Bestäm P:s nollställen. (3p)
(c) Beräkna $V(t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1})$. (4p)

7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektorprodukt (kryssprodukt), inkl. hjälpsats. (6p)

8. Visa att en kvadratisk matris är inverterbar om och endast om dess determinant är skild från noll. (8p)

/JM