MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa
Datum: 2005-08-17 kl. 14.00-18.00
Telefonvakt: Marcus Warfheimer , tel. 0762-721860

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.
Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.
Betygsgränser: 24 - 35 p. ger betyget 3, 36 - 47 p. ger betyget 4 och 48 eller mer betyget 5.
Lösningar anslås på Matematiskt Centrum första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Rättningsprotokoll anslås på Matematiskt Centrum ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Bestäm skärningslinjen mellan planen $x+2y+2z=5$ och $x-y+z=2$. (4p)
(b) Lös matrisekvationen $AXB=C$ där (5p)

$$A=\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\quad \text{och}\quad C=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$$

2. Bestäm (på formen $a+bi$) rötterna till ekvationen (7p)

$$(1+i)z^2-(4+8i)z+1+21i=0.$$

3. För vilka reella tal x är matrisen A inte inverterbar om (8p)

$$A=\begin{bmatrix}x&0&1&2\\3&4&5&6\\6&5&4&3\\2&1&0&x\end{bmatrix}$$

Bestäm i dessa/detta fall en bas för nollrummet till A.

4. Låt $A=[a_{ik}]$ vara en $n\times n$-matris sådan att (8p)

$$a_{ik}=k \text{ för } i\le k \text{ och } a_{ik}=0 \text{ för } i>k.$$

(a) Bestäm inversen till A för $n=5$.
(b) Ange inversen till A för allmänt $n\ge 2$ (endast svar).

5. Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden det plan $z=ax+by+c$ som är bäst anpassat till punkterna $(1,2,3)$, $(-1,0,1)$, $(1,1,1)$ och $(1,0,2)$. (7p)

6. Härled en formel för (kortaste) avståndet i $\mathbf{R}^3$ mellan (de ickeparallella) linjerna (7p)

$$l_1:\ \mathbf{r}=\mathbf{a}+s\mathbf{v}\quad \text{och}\quad l_2:\ \mathbf{r}=\mathbf{b}+t\mathbf{u}$$

($\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ej parallella).

7. Antag att $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning. (7p)

(a) Definiera begreppet linjär avbildning.
(b) Visa att det finns en $m\times n$ matris A sådan att $T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$.
(c) Ange standardmatrisen för $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $F(x_1,x_2)=(x_1+x_2,-x_1,2x_1-3x_2)$.

8. Definiera begreppet matrisprodukt AB samt formulera och bevisa en sats om transponering av matrisprodukt $(AB)^t$. (7p)

Lycka till!
TG

Lösningar till "Linjär algebra och geometri", F1, TMA 660
17/8, 2005

1. a) En riktningsvektor för skärningslinjen är $\vec{v}=(1,2,2)\times(1,-1,1)=$

$$=\begin{vmatrix}\bar{e}_x&1&1\\ \bar{e}_y&2&-1\\ \bar{e}_z&2&1\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}2&-1\\2&1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}\right)=$$

$$=(4,1,-3).$$

En gemensam punkt på planen (och därmed en punkt på linjen) är t. ex. $\vec{a}=(3,1,0)$!

Svar

$$l:\ \vec{r}=(3,1,0)+t(4,1,-3)\qquad t\in\mathbb{R}.$$

eller

$$\begin{cases}x=3+4t\\ y=1+t\\ z=-3t\end{cases}$$

b) $X=A^{-1}CB^{-1}$ (om A och B är inverterbara!)

$\det A=6-4=2$, $\det B=-1$ så

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-4\\-1&3\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}\quad \text{och}$$

$$X=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-4\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&-6\\-3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}12&6\\-8&3\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}-6&3\\4&-3/2\end{bmatrix}}}$$

(svar)

$(1+i)z^2 - (4+8i)z + 1+21i = 0$

$\frac{4+8i}{1+i} = 6+2i$ och $\frac{1+21i}{1+i} = 11+10i$

Dvs $z^2 - (6+2i)z + 11+10i = 0$

$(z-(3+i))^2 = (3+i)^2 - 11 - 10i = -3-4i$

Sätt $x+iy = z-(3+i)$,

$x^2 - y^2 + i\cdot 2xy = -3-4i$, $|x+iy|^2 = |-3-4i|$

Dvs
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2x^2 = 2, \; x^2 = 1, \; x = \pm 1 \\ 2y^2 = 8, \; y^2 = 4, \; y = \pm 2 \\ \& \; x\cdot y < 0. \end{matrix}$$

Dvs $x+iy = 1-2i$ eller $-1+2i$

Svar: $z_1 = 3+i+1-2i = \underline{4-i}$, $z_2 = 3+i-1+2i = \underline{2+3i}$

3. A är inte inverterbar precis då $\det A = 0$

Vi har
$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 9(x+1) \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9(x+1)(-x-1) = -9(x+1)^2$$

$= 0$ om.m. $\underline{x = -1}$

I detta fall är
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alltså ges nollrummet (lösningarna till $A\vec{x} = \vec{0}$) av
$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}, \quad \text{sätt } x_3 = s, \; x_4 = t.$$

Dvs
$$\begin{cases} x_1 = s + 2t \\ x_2 = -2s - 3t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}, \; s,t \in \mathbb{R}.$$

Svar: En bas för nollrummet är $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4 a)
$$[A \mid E] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \quad \text{o.s.v.}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{dividera rad } i \text{ med } i$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right] = [E \mid A^{-1}]$$

b) $A^{-1} = [\quad]$ har element $b_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{om } i > k \\ 1/k & \text{om } i = k \\ -1/k & \text{om } i = k-1 \\ 0 & \text{om } i < k-1 \end{cases}$

... söker en bästa lösning till

$$\begin{cases} a + 2b + c = 3 \\ -a + c = 1 \\ a + b + c = 1 \\ a + c = 2 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Vi finner minsta kvadrat-lösningen genom att lösa normalekvationen $A^tA\vec{x} = A^t\vec{b}$.

$$A^tA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^t\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$$[A^tA \mid A^t\vec{b}] = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} (-4)\,(-2) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & 7 \end{bmatrix} (-5)\,(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & -24 & -30 \end{bmatrix} -\tfrac{1}{6} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 4 \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -24 & -28 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} (6)\,(1) \sim \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} (-2) \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Dvs $\vec{x} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Svar: Det "bäst" anpassade planet är

$$z = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{5}{4} \quad \text{eller}$$

$$x + 2y - 4z + 5 = 0.$$

6. Vi bildar $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{u}$ som är vinkelrät mot båda linjerna.

Lägg två parallella plan genom linjerna med ~~gem~~ samma normalvektor $\vec{n}$.

Kortaste avståndet mellan linjerna är då lika med avståndet mellan (de parallella) planen, som kan fås som avståndet från punkt $\vec{b}$ på linje l_2 till planet genom $\vec{a}$ (i l_1).

Detta avstånd ges av

$$d = \left| \frac{\vec{n} \cdot (\vec{b} - \vec{a})}{|\vec{n}|} \right|$$

Svar: $d = \left| \dfrac{(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{v} \times \vec{u})}{|\vec{v} \times \vec{u}|} \right|$