MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa
Datum: 2004–10–23 kl. 14.00–18.00
Telefonvakt: Milena Anguelova, tel. 0739779268

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.
Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.
Betygsgränser: 24 - 35 p. ger betyget 3, 36 - 47 p. ger betyget 4 och 48 eller mer betyget 5.
Lösningar anslås på Matematiskt Centrum första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Rättningsprotokoll anslås på Matematiskt Centrum ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. För deluppgifterna a) - c) nedan skall *endast svar* anges.

   (a) Bestäm x_1 i lösningen till ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

   (b) Bestäm rötterna till andragradsekvationen (4p)

$$z^2 - (2+2i)z + 1 + 2i = 0$$

   (c) Bestäm en bas för nollrummet och dimensionen av kolonnrummet för matrisen (4p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ -4 & -10 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

2. En ljusstråle går genom punkten $(-1, 1, -2)$ i riktningen $(1, 0, 1)$ för att sedan reflekteras i planet $x + y - 2z = 3$. (7p)
   Bestäm ekvationen för den reflekterade strålen.

3. För vilka par av tal (a, b) har ekvationssystemet (7p)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 0 \\ ax + by - 3z &= 3 \\ 2x + 4y + (b+8)z &= a - 2 \end{cases}$$

   oändligt många lösningar?

4. Lös matrisekvationen $AXB = C$, där (7p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ och } C = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \\ 6 & 8 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$$

Var god vänd!

5. Anpassa med minsta kvadratmetoden ett andragradspolynom $y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ till datapunkterna (7p)

t_i	y_i
-1	2.25
0	-0.25
1	0.75
2	0.25

6. På en cirkel med centrum O, låt P, Q och R vara tre olika punkter sådana att sträckan PQ utgör en diameter (dvs passerar genom cirkelns centrum). Visa med hjälp av *skalärprodukten* att vinkeln mellan PR och QR är rät. (7p)

7. Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz olikhet i $\mathbb{R}^n$. (7p)

8. (a) Redogör kortfattat för begreppet *elementär matris.* (7p)

   (b) Bevisa att en kvadratisk $n \times n$ matris A är inverterbar om och endast om den är radekvivalent med identitetsmatrisen I_n.

Lycka till!
TG

Lösningar: Linjär Algebra och Geometri, F
TMA 660, 2004-10-23.

1. a) $X_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) $(z-(1+i))^2 = -1$, $z_{1,2} = 1+i \pm i = 1,\ 1+2i$

c) En bas för nollrummet är $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

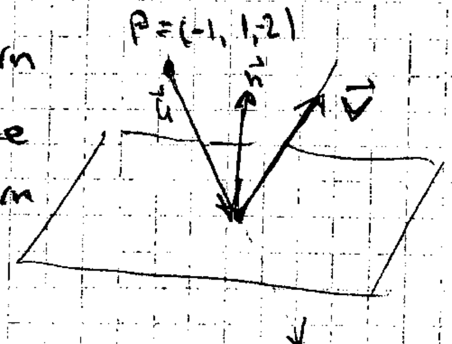
$\dim(\mathrm{Col}(A)) = 2$

2. Infallande ljusstråle ℓ: $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1 \\ z = -2+t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

skär planet π: $x+y-2z=3$ då

$-1+t+1-2(-2+t)=3$, $\underline{\underline{t=1}}$

Dvs skärningspunkten $P_0 = (0,1,-1)$.



$\vec{u} = (1,0,1)$ är riktn.vektorn för ℓ och den reflekterade strålen har riktningsvektorn

$\vec{v} = \vec{u} - 2\vec{u}_n$

där $\vec{u}_n = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$ är projektionen av $\vec{u}$ på normalen $\vec{n} = (1,1,-2)$.

Dvs $\vec{u}_n = \frac{(1,0,1)\cdot(1,1,-2)}{1+1+4}\vec{n} = -\frac{1}{6}\vec{n}$ och $\vec{v} = \vec{u} + \frac{1}{3}\vec{n}$

Dvs
$$\vec{v} = \frac{1}{3}\left((3,0,3) + (1,1,-2)\right) = \frac{1}{3}(4,1,1).$$

<u>Svar:</u> De reflekterade strålen har ekv.

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ ax + by - 3z = 3 \\ 2x + 4y + (b+8)z = a-2 \end{cases}$

Utökad matris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ a & b & -3 & 3 \\ 2 & 4 & b+8 & a-2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -a \\ -2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & b-2a & -3a-3 & 3 \\ 0 & 0 & b+2 & a-2 \end{bmatrix}$$

Vi har fria variabler bara då $b-2a=0$ eller $b+2=0$

1) $b = 2a$ ger $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3(1+a) & 3 \\ 0 & 0 & 2(1+a) & a-2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \frac{2}{3} \\ \end{matrix} \; -\frac{1}{3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

sista raden ger $\underline{\underline{0 = a}}$ (annars inga lösningar)

I detta fall $(a = b = 0)$ är

y en fri variabel och vi har ∞ många lösn.

2) $b = -2$ ger $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2-2a & -3(1+a) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$ sista raden ger $a - 2 = 0$; $\underline{\underline{a = 2}}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ och z är en fri variabel

<u>Svar:</u> Då $(a,b) = (0,0)$ eller $(2,-2)$ finns ∞ många lösn.

4. $AXB = C$, $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$$B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$AX = CB^{-1} =$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \\ 6 & 8 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

utökad matris

$$[A \; CB^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} (-1) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (1) \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1)\;(1) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Med $\vec{t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2.25 \\ -0.25 \\ 0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix}$ så är

designmatrisen

$$A = [\,\vec{t}^{\,2} \;\; \vec{t} \;\; 1\,] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi löser ekv. $A\vec{x} = \vec{y}$

enl. minsta kvadratmetoden!

Normalekvationen är $A^T A \vec{x} = A^T \vec{y}$,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

och

$$A^T \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.25 \\ -0.25 \\ 0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

utökad matris är

$$\begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} (-3)\,(-3) \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 & -5 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \\ 6 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} (-3)\,\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

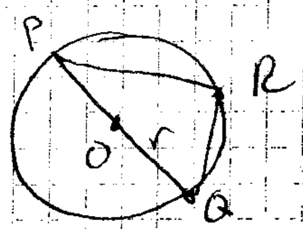
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & -10 & 10 & 15 \end{bmatrix} (5)\,(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -20 & -10 \end{bmatrix} -\tfrac{1}{20} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} (6)\,(-5) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> Det polynom som är bäst anpassat

är $p(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$.

6.



$\vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP}$

$\vec{QR} = \vec{OR} - \vec{OQ}$

OBS: $|\vec{OP}| = |\vec{OQ}| = |\vec{OR}| = r$ (radien)

& $\vec{OQ} = -\vec{OP}$

Dvs

$$\vec{PR} \cdot \vec{QR} = (\vec{OR} - \vec{OP}) \cdot (\vec{OR} - \vec{OQ}) =$$

$$= \vec{OR} \cdot \vec{OR} - \vec{OP} \cdot \vec{OR} - \vec{OR} \cdot \vec{OQ} + \vec{OP} \cdot \vec{OQ}$$

$$= r^2 - \vec{OR} \cdot (\underbrace{\vec{OP} + \vec{OQ}}_{= \vec{0}}) + r \cdot r \cos(\pi)$$

vinkeln mellan $\vec{OP}$ & $\vec{OQ}$

$$= r^2 - 0 - r^2 = 0$$

Alltså är $\vec{PR} \perp \vec{QR}$ dvs vinkeln mellan PR och QR är rät.