**MATEMATIK** | **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2004–08–18 kl. 14.15–18.15

Tentamen | Telefonvakt: Christoffer Cromvik, tel. 0740 459022

# Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

**1.** Bestäm ekvationen (på normalform) för planet som innehåller punkterna (6p)

$$P_1 = (0, 1, 3), \quad P_2 = (-1, 3, 1) \text{ och } P_3 = (2, -1, 3).$$

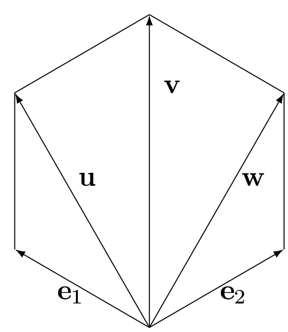
Beräkna sedan det avståndet från punkten $P = (2, 1, -3)$ till detta plan.

**2.** För deluppgifterna a) - d) nedan skall *endast svar* anges.

(a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 4x - 3y + 2z &= 1 \\ x + 6y + 5z &= 7 \end{cases}$$

(b) I den regelbundna sexhörningen i figuren nedan bildar vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ en bas i planet. Ange koordinaterna för vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i denna bas. (3p)




(c) Andragradspolynomet (3p)

$$p(z) = z^2 + (1 + 2i)z - 3 + 11i$$

har nollstället $\alpha = 2 - 3i$. Bestäm polynomets andra nollställe.

(d) Beräkna längden och argumentet för det komplexa talet $\dfrac{1+i}{-\sqrt{3}+i}$. (3p)

**3.** Bestäm $V(A)$ (värderummet) och $N(A)$ (nollrummet) för matrisen (7p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

**4.** Låt $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sådan att (7p)

$$\mathbf{e}_1 = T(\mathbf{e}_2) - T(\mathbf{e}_3), \; \mathbf{e}_2 = T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_3), \; \mathbf{e}_3 = T(\mathbf{e}_1) - T(\mathbf{e}_2).$$

Avgör också om $T$ är volymbevarande.

Var god vänd!

**5.** För vilka *symmetriska* $3 \times 3$ -matriser $X$ gäller att (7p)

$$AX = BX$$

om

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} ?$$

**6.** Visa att (7p)

$$-\sqrt{n} \leq x_1 + x_2 + \ \dots \ x_n \leq \sqrt{n}$$

om $x_1^2 + x_2^2 + \ \dots \ + x_n^2 = 1$.
För vilka $x_1, \ x_2, \ \dots \ x_n$ gäller likhet i den högra olikheten?
Ledning: För vektorer i $\mathbb{R}^n$ gäller Cauchy-Schwarz olikhet: $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$

**7.** Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer i rummet. (7p)

(a) Beskriv i en figur projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ och ange en formel för denna.

(b) I en högerorienterad ON-bas för rummet så gäller att $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$.

i. Skriv upp en formel (m.h.a. de givna koordinaterna) för skalärprodukten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

ii. För beräkning av kryssprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ finns en något mer komplicerad formel,

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2, \dots, \dots)$$

Härled den fullständiga formeln utgående från räknelagarna för vektorprodukt.

**8.** (a) Beskriv hur determinanten för en kvadratisk matris $A$ definieras om (7p)

i. $A$ är en $2 \times 2$-matris,

ii. $A$ är en $3 \times 3$-matris,

iii. $A$ är en $n \times n$-matris.

(b) Visa att en kvadratisk matris $A$ är inverterbar om och endast om $det A \neq 0$.

Lycka till!
TG

T.G. 040818 TMA660 1)

# Tentamen i Linjär Algebra & Geometri, F1.

1. $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-1,3,1) - (0,1,3) = (-1,2,-2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = (2,-1,3) - (0,1,3) = (2,-2,0) = 2(1,-1,0)$

En normal till planet är

$$\vec{n} = (-1,2,-2) \times (1,-1,0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

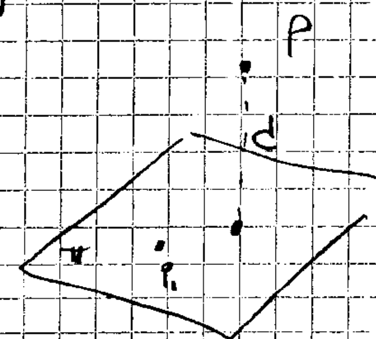
$$= (-2,-2,-1) = -(2,2,1)$$

Ekvationen för det sökta planet ges av

$$\vec{n} \cdot ((x,y,z) - (0,1,3)) = 0$$

$$2x + 2(y-1) + (z-3) = 0$$

$$\underline{\underline{2x + 2y + z = 5}}$$




$\overrightarrow{P_1P} = (2,1,-3) - (0,1,3)$

$= (2,0,-6)$

Avståndet

$$d = \left| \overrightarrow{P_1P} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{(2,0,-6)\cdot(-2,-2,-1)}{\sqrt{4+4+1}} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

2. a) **Svar:** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

b) **Svar:** $\vec{u} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (2,1)_{\underline{e}}$

$\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = (2,2)_{\underline{e}}$

$\vec{w} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = (1,2)_{\underline{e}}$

där $\underline{e}$ är base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

c) **Svar:**

Det andra nollstället är

$\beta = -3 + i$

(polynomdivision ger $p(z) = (z - 2 + 3i)(z + 3 - i)$)

d) **Svar:**

$$\left|\frac{1+i}{-\sqrt{3}+i}\right| = \frac{|1+i|}{|-\sqrt{3}+i|} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$\arg\left(\frac{1+i}{-\sqrt{3}+i}\right) = \arg(1+i) - \arg(-\sqrt{3}+i)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{-7\pi}{12}}}$$

3.
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 & \vec{a}_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -4 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

pivotkolonnerna i $A$ är nr 1, 2 och 4 som alltså är linjärt oberoende!

$V(A) = \{ A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4 + x_5\vec{a}_5 : \vec{x} \in \mathbb{R}$

$= \mathbb{R}^3$ eftersom $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

$N(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^5 : A\vec{x} = \vec{0} \}$

$$A\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{cases} x_1 + 6x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = -s$ och $x_5 = 3t$ är fria variabler.

$x_4 = 5t$, $x_2 = s + 5t - 6t = s - t$, $x_1 = -18t$

Dvs:

$$N(A): \vec{x} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -18 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

4. Eftersom $T$ är linjär så är

$$\vec{e}_1 = T(\vec{e}_2) - T(\vec{e}_3) = T(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = T\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}_e$$

$$\vec{e}_2 = T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_3) = T(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_e$$

$$\vec{e}_3 = T(\vec{e}_1) - T(\vec{e}_2) = T(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}_e$$

Om $A$ är matrisen för $T$ så finner vi

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3\end{array} = A\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{=B} \qquad \text{Dvs } \underline{\underline{A = B^{-1}}}$$

$$\left[\,B \mid E\,\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0\\0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1\\0 & 2 & 0 & 3 & -1 & -1\\0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1\end{array}\right]$$

Dvs $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 3 & 1\\3 & -1 & -1\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$$\det A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\\3 & -1 & -1\\-1 & 1 & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\\0 & 8 & 2\\0 & -2 & 0\end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}8 & 2\\-2 & 0\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot 4 = -2.$$ $\therefore$ $T$ är ej volymbevarande.

5. $AX = BX$ , $X = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ 3x3 matr.

$(A-B)X = 0$

$$A-B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \quad -1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

För varje kolumn i $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$

gäller att $\begin{cases} x_{1i} + 2x_{3i} = 0 \\ x_{2i} + 2x_{3i} = 0 \end{cases}$

$x_{3i} = -t_i$ är en fri variabel ! $i = 1,2,3$

$x_{2i} = 2t_i$

$x_{1i} = 2t_i$

Dvs $X = \begin{bmatrix} 2t_1 & 2t_2 & 2t_3 \\ 2t_1 & 2t_2 & 2t_3 \\ -t_1 & -t_2 & -t_3 \end{bmatrix}$

Eftersom $X^t = X$ så är

$2t_1 = 2t_2$ , $-t_1 = 2t_3$ , $-t_2 = 2t_3$

Dvs $t_1 = t_2 = -2t_3$ med $t_3 = -t$ så är

$$X = \begin{bmatrix} 4t & 4t & -2t \\ 4t & 4t & -2t \\ -2t & -2t & t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

6. Sätt $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\vec{u} = (1, 1, \ldots, 1)$ (n st. ettor)

Då är $\vec{x} \cdot \vec{u} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

och enligt C-S olikhet är

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = |\vec{x} \cdot \vec{u}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{u}\| =$$

$$= \underbrace{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}}_{=1} \cdot \underbrace{(1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2)^{1/2}}_{=\sqrt{n}}$$

Dvs

$$-\sqrt{n} \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \sqrt{n}$$

om $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$

Likhet i C-S olikhet till höger gälle

om.m. $\vec{x}$ och $\vec{u}$ är lika riktade

dvs om.m. $\vec{x} = t \cdot \vec{u} = (t, \ldots, t)$, $t > 0$

Eftersom $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ så är $n \cdot t^2 = 1$

dvs $t = 1/\sqrt{n}$ och $\vec{X} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)$