MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa
Datum: 2004–01–15 kl. 08.45–12.45
Telefonvakt: Niclas Andréasson, tel. 0740 459022

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1. (a) Är de tre vektorerna $(1, 2, -1)$, $(-1, 1, 0)$ och $(1, -3, 1)$ linjärt beroende? (3p)

(b) Vad är vinkeln mellan vektorerna $(2, -1, 1)$ och $(2, 0, 2)$? (3p)

(c) Lös följande ekvationssystem approximativt med minsta kvadratmetoden (4p)

$$\begin{cases} x - y &= 1 \\ x &= 1 \\ y &= 1 \end{cases}$$

2. (a) Lös ekvationen $z^2 - (1 + i)z + 5i = 0$. (4p)

(b) Beräkna $\left(\dfrac{-\sqrt{3} + i}{1 - i}\right)^9$ på formen $a + bi$. (4p)

3. En rät linje går genom punkten $(-1, 3, 4)$ och har riktningsvektorn $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$. Bestäm linjens projektion på planet $3x - y + 2z = -8$. Ange den projicerade linjens ekvation på parameterform. (7p)

4. Lös matrisekvationen $XA = B + 2X$ där (8p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 12 & -2 \\ 6 & 3 & 15 & -4 \end{bmatrix}.$$

5. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av (7p)

$$F(1, 1, -1) = (-1, -2, 1),\ F(1, -1, 1) = (3, 6, -3) \text{ och } F(-1, 1, 0) = (7, 0, 3).$$

Bestäm värderummet för F.
Finns det någon vektor (x, y, z) sådan att $F(x, y, z) = (1, 1, 1)$?

6. Låt A vara en kvadratisk matris vars nollrum är $N(A)$ och kolonnrum $V(A)$. Visa att (6p)

$$V(A) \subseteq N(A) \Leftrightarrow A^2 = 0.$$

7. Formulera och bevisa distributiva lagen för vektorprodukt (inklusive hjälpsatsen). (7p)

8. Definiera begreppen *linjär avbildning* och *standardmatris* till en linjär avbildning. Hur bestämmer man standardmatrisen? Bevisa ditt påstående. (7p)

Lycka till!
TG

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA660), 2004-01-1

1. a)
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \textcircled{\scriptsize -2} & \textcircled{\scriptsize 1} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6-5 = 1 \neq 0$$

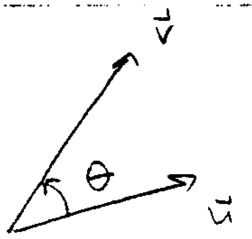
Alltså är kolonnerna $\vec{u} = (1,2,-1)$, $\vec{v} = (-1,1,0)$ och $\vec{w} = (1,-3,1)$ linjärt oberoende.

---

b) sätt $\vec{u} = (2,-1,1)$, $\vec{v} = (2,0,2)$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2,-1,1)\cdot(2,0,2) = 4-0+2 = 6$.

& $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta = \sqrt{6}\sqrt{8} \cdot \cos\theta$



vs $\cos\theta = \dfrac{6}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = \sqrt{3}/2$ och $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ (30°)

---

c) Lös m.h.a. minsta kvadratmetoden

$$(*) \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{= A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

multiplicera (*) med A^T från vänster!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \textcircled{\scriptsize 2}\ \textcircled{\scriptsize -1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \textcircled{\scriptsize 2/3}\ \textcircled{\scriptsize 1/3} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right]$$

Svar: $\begin{cases} x = 4/3 \\ y = 2/3 \end{cases}$

2.a) $z^2-(1+i)z+5i=0$

(*) $(z-\frac{1}{2}(1+i))^2 = (\frac{1}{2}(1+i))^2-5i = \frac{i}{2}-5i = -\frac{9}{4}\cdot 2i$

$= \frac{9}{4}(1-i)^2 \qquad ((1-i)^2=-2i)$

Dvs $z-\frac{1}{2}(1+i) = \pm\frac{3}{2}(1-i)$, $\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(1+i)+\frac{3}{2}(1-i) = \underline{\underline{2-i}} \\ z_2 = \frac{1}{2}(1+i)-\frac{3}{2}(1-i) = \underline{\underline{-1+2i}} \end{cases}$

Alt. forts från (*):

$(z-\frac{1}{2}(1+i))^2 = -\frac{9}{2}i$

sätt $x+iy = z-\frac{1}{2}(1+i)$, då är

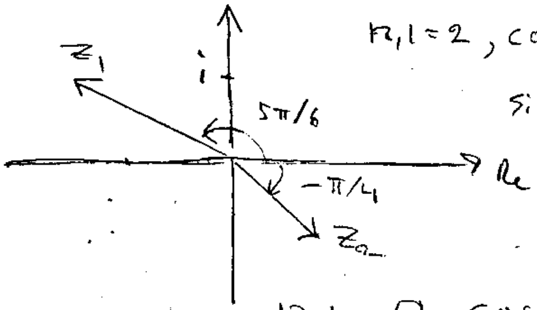
$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=-\frac{9}{2} \end{cases}$, $x^2+y^2=\frac{9}{2}$, dvs $2x^2=\frac{9}{2}$, $x=\pm\frac{3}{2}$

vilket ger $y=\mp\frac{3}{2}$.

Dvs $z-\frac{1}{2}(1+i) = \pm\frac{3}{2}(1-i)$, $\underline{\underline{z_1=2-i}}$ och $z_2=\underline{\underline{-1+2i}}$

2b) $z_1 = -\sqrt{3}+i = 2e^{i5\pi/6}$

$z_2 = 1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$



$|z_1|=2$, $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$|z_2|=\sqrt{2}$ $\cos(-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin(-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Alltså är

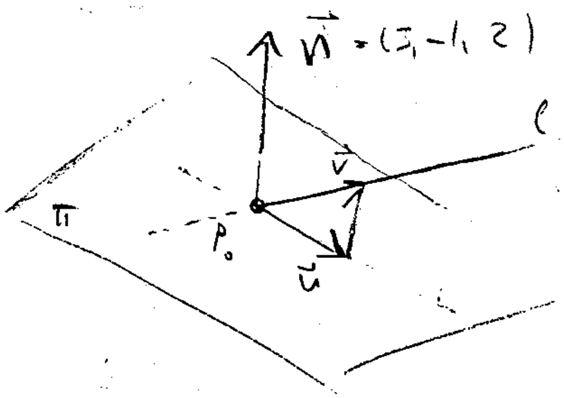
$$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^9 = \left(\frac{2e^{i5\pi/6}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^9 =$$

$$=(\sqrt{2})^9\left(e^{i(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4})}\right)^9 = 2^4\cdot\sqrt{2}\,e^{i9\cdot\frac{13\pi}{12}} = 16\sqrt{2}\,e^{i\frac{39\pi}{4}} = \left(\frac{39\pi}{4}=10\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=16\cdot\sqrt{2}\,e^{i(10\pi-\frac{\pi}{4})} = 16\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4} = 16\sqrt{2}\,(1-i)/\sqrt{2} = \underline{\underline{16-16i}}$$

3. $P = (-1,3,4)$, $\vec{v} = (1,-1,3)$.

$$l: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, \quad \pi: 3x - y + 2z = -8 .$$



l skär π då

$$3(-1+t) - (3-t) + 2(4+3t) = -8$$

$$10t + 2 = -8, \quad \underline{\underline{t = -1}}$$

dvs l skär π i $P_0 = (-1-1, 3-(-1), 4-3) = (-2,4,1)$

Projektionen av $\vec{v}$ på planet π ger den sökta linjens riktningsvektor $\vec{u} = \vec{v}_\pi = \vec{v} - \vec{v}_n$, där

$\vec{v}_n =$ "projektionen av $\vec{v}$ på normalen $\vec{n}$" $=$

$$= \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{(1,-1,3)\cdot(3,-1,2)}{9+1+4}\vec{n} = \frac{5}{7}(3,-1,2).$$

Dvs $\vec{u} = (1,-1,3) - \frac{5}{7}(3,-1,2) = \frac{1}{7}(-8,-2,11) = -\frac{1}{7}\underline{\underline{(8,2,-11)}}$

<u>Svar:</u> $$l_\pi: \begin{cases} x = -2 + 8t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 - 11t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. $XA = B + 2X$, $X(A-2E) = B$

$(*)$ $(A-2E)^T X^T = B^T$, vi bestämmer X^T !

$$A-2E = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Den utökade koefficientmatrisen till $(*)$ är

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 12 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right] \textcircled{-1}\,\textcircled{1}\,\textcircled{-1} \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 12 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \textcircled{-1} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -12 & -13 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{-1} \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 & 10 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 & -10 \end{array}\right] \textcircled{-\tfrac{1}{2}} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 & 10 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \textcircled{1}\,\textcircled{-3}\,\textcircled{-2} \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \textcircled{\tfrac{1}{2}}\,\textcircled{\tfrac{1}{2}} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \underbrace{4 \quad 5}_{X^T} \end{array}\right]$$

<u>Svar</u> $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$

Alt. $\boxed{X = B(A-2E)^{-1}}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 5 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$= 4(A-2E)^{-1}$

och

$$X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 12 & -2 \\ 6 & 3 & 15 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 8 & -4 & -4 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 4 & 4 & 20 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}}}$$

5. Låt A vara standardmatrisen för F. Då gäller att

$$\underbrace{A\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 3 & 7\\ -2 & 6 & 0\\ 1 & -3 & 3\end{bmatrix}}_{=C}, \quad \text{dvs} \quad \underline{\underline{A = CB^{-1}}}$$

$$[B \,\vdots\, E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2\end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{matrix}}_{=2B^{-1}}.$$

Dvs

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 3 & 7\\ -2 & 6 & 0\\ 1 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 8 & 10\\ 2 & 2 & 6\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}.$$

ärderummet för F är A's kolonnrum!.

Men

$$A = \begin{bmatrix}1 & 8 & 10\\ 2 & 2 & 6\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix} \begin{matrix}(-2) & (1)\end{matrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 8 & 10\\ 0 & -14 & -14\\ 0 & 10 & 10\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 8 & 10\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$$\begin{matrix}\uparrow & \uparrow\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}\uparrow & \uparrow\end{matrix}$$

pivotkolonnerna!

Alltså spänns värderummet upp av kolonnerna

$(1,2,-1)$ och $(4,1,1)$, $((4,1,1) = \frac{1}{2}(8,2,2))$.

Dvs värderummet är planet:

$$\boxed{(x,y,z) = s(1,2,-1) + t(4,1,1), \quad s,t \in \mathbb{R}}$$

En normal ges av

$$\vec{n} = (1,2,-1) \times (4,1,1) = \begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 1 & 2 & -1\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}\right)$$

$$= (3,-5,-7).$$

Dvs planets ekvation på normalform är

$$\boxed{3x - 5y - 7z = 0}$$

(1,1,1) tillhör inte värderummet eftersom den inte ligger i detta plan: $3\cdot1 - 5\cdot1 - 7\cdot1 = -9 \neq 0$.

6. Antag att $A^2 = O$

Tag ett $\vec{y} \in V(A)$. Då finns $\vec{x}$ så att $\vec{y} = A\vec{x}$

och därmed finner vi att

$$A\vec{y} = A(A\vec{x}) = A^2\vec{x} = O\vec{x} = \vec{0},$$

dvs $\vec{y} \in N(A)$!

(Dvs om $A^2 = O$ så gäller att $V(A) \subseteq N(A)$).

Omvänt, antag att $V(A) \subseteq N(A)$.

Om $A = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n]$ så är förstås $\vec{a}_i \in V(A)$

Men eftersom $V(A) \subseteq N(A)$ så är då $A\vec{a}_i = \vec{0}$.

Vi finner därmed att

$$A^2 = A[\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n] = [A\vec{a}_1\ A\vec{a}_2 \dots A\vec{a}_n]$$

$$= [\vec{0}\ \vec{0} \dots \vec{0}] = O.$$

(Dvs om $V(A) \subseteq N(A)$ så följer att $A^2 = O$).