MATEMATIK | Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2003–10–25 kl. 14.15–18.15
Tentamen | Telefonvakt: Alexander Herbertsson, tel. 0740 459022

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1. (a) Bestäm, på parameterform, skärningslinjen mellan planen $x - y + 2z = -2$ och $2x - y + z = 2$. (3p)

(b) Bestäm ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot båda planen i (a) och som innehåller punkten $P_0 = (1, 2, -1)$. (3p)

(c) Bestäm avståndet från punkten $P = (5, 3, 3)$ till planet i (b) ovan. Bestäm dessutom den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{P_0P}$ på samma plan. (3p)

2. Lös andragradsekvationen (6p)

$$(1 + 2i)z^2 + (2 - i)z - 5 + 15i = 0.$$

(Bra att veta: $\sqrt{841} = 29$)

3. Låt (8p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \\ a & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm för alla värden på a dimensionen av kolonnrummet för A.

(b) Bestäm nollrummet i fallet $a = 2$. (Lös ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.)

4. Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden den "bästa" anpassningen av en rät linje till följande punkter i planet, (1, 1.5), (2, 8) och (3, 5.5). Bestäm också medelfelet. (8p)

5. Låt T och F vara två linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ sådana att $T(\mathbf{u})$ är den rätvinkliga projektionen av $\mathbf{u}$ på planet $3x - y + z = 0$ och $F(\mathbf{u})$ den rätvinkliga projektionen av $\mathbf{u}$ på linjen $x = y = -z$. Bestäm standardmatrisen (avbildningsmatrisen) för den sammansatta avbildningen $F \circ T$. (8p)

6. Låt A vara en $m \times n$ matris. Visa att nollrummen för A^TA och A är lika, dvs. visa att, (7p)

$$A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

(7p)

7. (a) Definiera begreppet invers till en matris A.

(b) Visa att om A och B är inverterbara $n \times n$ matriser så är produkten AB också inverterbar.

(c) Visa att om A är inverterbar så är också A^T inverterbar.

8. Visa att om A och B är två $n \times n$ matriser så är (7p)

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Lycka till!
TG

MATEMATIK **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2003-10-25 kl. 14.15-18.15
Tentamen Telefonvakt: Alexander Herbertsson, tel. 0740 459022

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1. (a) Bestäm, på parameterform, skärningslinjen mellan planen $x - y + 2z = -2$ och $2x - y + z = 2$. (3p)

(b) Bestäm ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot båda planen i (a) och som innehåller punkten $P_0 = (1, 2, -1)$. (3p)

(c) Bestäm avståndet från punkten $P = (5, 3, 3)$ till planet i (b) ovan. Bestäm dessutom den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{P_0P}$ på samma plan. (3p)

2. Lös andragradsekvationen (6p)

$$(1 + 2i)z^2 + (2 - i)z - 5 + 15i = 0.$$

(Bra att veta: $\sqrt{841} = 29$)

3. Låt (8p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \\ a & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm för alla värden på a dimensionen av kolonnrummet för A.

(b) Bestäm nollrummet i fallet $a = 2$. (Lös ekvationen $A\mathbf{x} = 0$.)

4 Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden den "bästa" anpassningen av en rät linje till följande punkter i planet, (1, 1.5), (2, 8) och (3, 5.5). Bestäm också medelfelet. (8p)

5. Låt T och F vara två linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ sådana att $T(\mathbf{u})$ är den rätvinkliga projektionen av $\mathbf{u}$ på planet $3x - y + z = 0$ och $F(\mathbf{u})$ den rätvinkliga projektionen av $\mathbf{u}$ på linjen $x = y = -z$. Bestäm standardmatrisen (avbildningsmatrisen) för den sammansatta avbildningen $F \circ T$. (8p)

6. Låt A vara en $m \times n$ matris. Visa att nollrummen för A^TA och A är lika, dvs. visa att, (7p)

$$A^TA\mathbf{x} = 0 \iff A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

7. (a) Definiera begreppet invers till en matris A. (7p)

(b) Visa att om A och B är inverterbara $n \times n$ matriser så är produkten AB också inverterbar.

(c) Visa att om A är inverterbar så är också A^T inverterbar.

8. Visa att om A och B är två $n \times n$ matriser så är (7p)

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Lycka till!
TG

Lösningar till Linjär Algebra och Geometri för F1, tma660, 2003-10-25.

1. a) $\begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{array}\right]$$

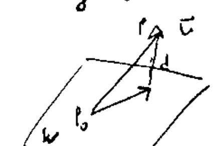
Dvs $\begin{cases} x - z = 4 \\ y - 3z = 6 \end{cases}$ Sätt $z = t$, $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 6 + 3t \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

b) $\vec{n}_1 = (1,-1,2)$ och $\vec{n}_2 = (2,-1,1)$ är normalerna till plan ovan.
$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ är en normal till det sökta planet.

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1,3,1)$$

Ekvationen för planet är $x + 3y + z = d$.
Eftersom $P_0 = (1,2,-1)$ ligger i planet så är
$d = 1 + 3 \cdot 2 - 1 = 6$ <u>Svar</u> $x + 3y + z = 6$

c) $\vec{u} = \overrightarrow{P_0P} = (5,3,3) - (1,2,-1) = (4,1,4)$



Projektionen av $\vec{u}$ på $\vec{n}$ är

$$\vec{u}_n = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \frac{(4,1,4)\cdot(1,3,1)}{1+9+1} \vec{n} = \frac{4+3+4}{11} \vec{n} = \vec{n}$$

Alltså är
$$d = |\vec{n}| = \underline{\sqrt{11}}$$
och projektionen av $\vec{u}$ på planet är
$$\vec{u}_w = \vec{u} - \vec{u}_n = (4,1,4) - (1,3,1) = \underline{(3,-2,3)}$$

2) $(1+2i)z^2 + (2-i)z - 5 + 15i = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2-i}{1+2i} = \frac{(2-i)(1-2i)}{1+4} = \frac{2-2-i-4i}{5} = -i \\ \frac{-5+15i}{1+2i} = \frac{5(-1+3i)(1-2i)}{1+4} = -1+6+3i+2i = 5+5i \end{array}\right]$$

$$z^2 - iz + 5 + 5i = 0$$

$$(z - \tfrac{i}{2})^2 = -\tfrac{1}{4} - 5 - 5i = -\tfrac{21}{4} - 5i$$

sätt $z - \frac{i}{2} = x + iy$, då är $(z-\frac{i}{2})^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

Dvs $\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{21}{4} \\ 2xy = -5 \end{cases}$, $x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{441}{16} + 5} = \sqrt{\frac{841}{16}} = \frac{29}{4}$.

Dvs $2x^2 = 2$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$ obs $x \cdot y < 0$

$2y^2 = \frac{25}{2}$, $y^2 = \frac{25}{4}$, $y = \pm\frac{5}{2}$

Dvs

$z = \frac{i}{2} \pm (1 - \frac{5}{2}i)$, Svar $z_1 = 1 - 4i$, $z_2 = 1 + 3i$

---

3) a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \\ a & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ Dimensione av kolonnrummet $=$ # pivotkolonner i A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \\ a & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 2-a & 2-a \\ 0 & 2a-4 & 4-a^2 \\ 0 & -2 & 2+a \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ 1/(2-a) \\ 1/(a-2) \\ \\ \end{array} \overset{a \neq 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2+a \\ 0 & -2 & 2+a \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4+a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dvs 1) $a \neq 2$, $a \neq -4 \Rightarrow \dim \text{Col} A = 3$ eftersom # pivotkolonner är 3 i detta fall

2) $a = -4$; $\Rightarrow \dim \text{Col} A = 2$ eftersom endast de två 1:a kolonnerna i detta fall är pivotkolonner.

3) $a = 2$:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} (-\tfrac{1}{2}) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ dvs $\dim \text{Col} A = 2$

3b) För $a = 2$ så har ekv. $A\bar{x} = \bar{0}$ koef.matris

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ x_3 är en fri var. sätt $x_3 = t$,

Vi får $x_1 - 2x_3 = 0$, $x_2 - 2x_3 = 0$ Dvs $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

Dvs $\text{Nul} A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ($\dim \text{Nul} A = 1$)

---

4. Vi söker en rät linje $y = kx + m$ s.a.

$\begin{cases} k \cdot 1 + m = 1.5 = 3/2 \\ k \cdot 2 + m = 8 \\ k \cdot 3 + m = 5.5 = 11/2 \end{cases}$, $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3/2 \\ 8 \\ 11/2 \end{bmatrix}}_{=\vec{b}}$ (*)

Vi finner minsta kvadrat-lösningen genom att multipl. (*) med A^T från vänster: $A^T A \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = A^T \vec{b}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 8 \\ 11/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Vi får utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 34 \\ 6 & 3 & 15 \end{array}\right] (-2) \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (\frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{3}) \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} (-2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ Dvs $\begin{cases} k = 2 \\ m = 1 \end{cases}$ ∴ $y = 2x + 1$ är den "bäst" anpassade linje

Medelfelet är $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{3}(\|\vec{b}\|^2 - \|A[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}]\|^2)}$,

$\|\vec{b}\|^2 = (3/2)^2 + 8^2 + (11/2)^2 = 9/4 + 64 + 121/4 = 65/2 + 64$

$A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$; $\|A[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}]\|^2 = 9 + 25 + 49 = 19 + 64$.

Dvs $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{3}(\frac{65}{2} - \frac{38}{2})} = \sqrt{\frac{27}{3 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

5. Vi bestämmer standardmatriserna för T och F.

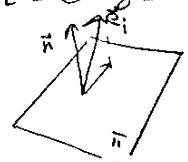
$A = [T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2)\ T(\vec{e}_3)]$ standardmatris för T

$B = [F(\vec{e}_1)\ F(\vec{e}_2)\ F(\vec{e}_3)]$ — " — F

där $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ är standardbase för $\mathbb{R}^3$.

Projektionen av $\vec{e}_i$ på planet $\pi: 3x - y + z = 0$ ges av

$T(\vec{e}_i) = \vec{e}_i - \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$, där $\vec{n} = [3\ {-1}\ 1]^T$ är normalen till π.



$|\vec{n}|^2 = 9+1+1 = 11$.

$T(\vec{e}_1) = [1, 0, 0]^T - \frac{3}{11}[3\ {-1}\ 1]^T = \frac{1}{11}[11-9\ \ 1\ \ {-1}]^T = \frac{1}{11}[2\ 1\ {-1}]^T$

$T(\vec{e}_2) = [0\ 1\ 0]^T - \frac{-1}{11}[3\ {-1}\ 1]^T = \frac{1}{11}[3\ \ 11-1\ \ {-1}]^T = \frac{1}{11}[3\ 10\ {-1}]^T$

$T(\vec{e}_3) = [0\ 0\ 1]^T - \frac{1}{11}[3\ {-1}\ 1]^T = \frac{1}{11}[-3\ \ 1\ \ 11-1] = \frac{1}{11}[-3\ 1\ 10]^T$

Dvs $A = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$.

Projektionen av $\vec{e}_i$ på linje $\ell: x = y = -z$ ges av

$F(\vec{e}_i) = \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$, där $\vec{v} = [1\ 1\ {-1}]^T$ är en riktningsvektor för ℓ.

$|\vec{v}|^2 = 1+1+1 = 3$.

Dvs

$F(\vec{e}_1) = \frac{1}{3}\vec{v}$, $F(\vec{e}_2) = \frac{1}{3}\vec{v}$, $F(\vec{e}_3) = \frac{-1}{3}\vec{v}$

och $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Standardmatrisen för den sammansatta avbildningen $F \circ T$ ges av

$$BA = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & -1 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 8 & 12 & -12 \\ 8 & 12 & -12 \\ -8 & -12 & 12 \end{bmatrix} = \frac{4}{33}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Om $\vec{x} \in Nul(A)$, dvs om $A\vec{x} = \vec{0}$ så är därmed $A^T A\vec{x} = \vec{0}$ och $\vec{x} \in Nul(A^T)$.

Om $\vec{x} \in Nul(A^TA)$, dvs $A^TA\vec{x} = \vec{0}$ så gäller att $\vec{y} = A\vec{x} \in Col\,A$, men dessutom att $\vec{0} = A^T\vec{y} = [\vec{a}_1\cdot\vec{y}\ \ \vec{a}_2\cdot\vec{y} \cdots \vec{a}_n\cdot\vec{y}]^T$, dvs $\vec{a}_i \cdot \vec{y} = 0$

där $\vec{a}_i$ är i:e kolonnen i A.

Alltså är $(\vec{y} = A\vec{x})$

$\|\vec{y}\|^2 = \vec{y}\cdot\vec{y} = (x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n)\cdot\vec{y}$

$= x_1\vec{a}_1\cdot\vec{y} + x_2\vec{a}_2\cdot\vec{y} + \ldots + x_n\vec{a}_n\cdot\vec{y} = 0$!

Vilket visar att $A\vec{x} = \vec{y} \stackrel{!}{=} 0$

dvs $\vec{x} \in Nul(A)$!

Vi har alltså visat att

1) $\vec{x} \in Nul(A) \Rightarrow \vec{x} \in Nul(A^TA)$

2) $\vec{x} \in Nul(A^TA) \Rightarrow \vec{x} \in Nul(A)$

M.a.o. $Nul(A) = Nul(A^TA)$