MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa
Datum: 2003–08–20 kl. 14.15–18.15
Telefonvakt: Hanna Martinsson, tel. 0740 459022

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv dessutom linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1. Bestäm ekvationen för den rätvinkliga projektionen av linjen (8p)

$$x-3=y-4=z-5$$

på planet

$$\pi : x-2y+2z=4$$

2. Lös för varje värde på parametern λ ekvationssystemet (8p)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \\ 15x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 = -4 \\ 6x_1 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -1 \\ (\lambda+3)x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 1-\lambda \\ 9x_1 - 5x_2 + 3x_3 + (5-\lambda)x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

Bestäm också dimensionen av nollrummet till koefficientmatrisen.

3. Den linjära avbildningen $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ har matrisen (6p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Parallellepipeden P har ett hörn i origo och de tre närmast angränsande hörnen är $A=(-1,2,5)$, $B=(4,-2,12)$ och $C=(3,7,2)$. Låt $Q=T(P)$ vara bilden av P under avbildningen T. Bestäm koordinaterna för fyra av hörnen i Q och volymerna av P och Q.

4 Lös matrisekvationen $\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$ där (8p)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 19 & -10 & 15 & 4 \\ 32 & -12 & 24 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Bestäm alla rötter till ekvationen (8p)

$$(z^2+(2+2i)z+4i)^3=8i.$$

Vår god vänd!

6. Punkterna $A = (1,5,-2)$, $B = (3,1,-6)$ och $R = (-1,3,-10)$ är givna. Låt l vara linjen genom R och mittpunkten på sträckan AB. Vilka punkter C på linjen l har egenskapen att arean av triangeln ABC är lika med 1? (7p)

(7p)

7. (a) Vad menas med att en matris A är inverterbar?

(b) Visa att om $n \times n$ matriserna A och B är inverterbara så är produkten AB också inverterbar.

(c) Visa att en matris A är inverterbar om och endast om $detA = 0$.

8. Definiera begreppet linjär avbildning. Visa att en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en-entydig om och endast om ekvationen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ endast har den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Visa också att om så är fallet så gäller att kolonnerna i standardmatrisen för T är linjärt oberoende. (8p)

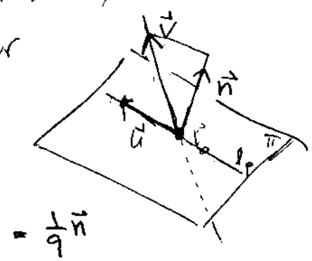
Lycka till!
TG

Lösningar till Linjär Algebra och Geometri FI

1. $\ell : x-3 = y-4 = z-5$, $(x,y,z) = (3,4,5) + t\cdot(1,1,1)$, $t\in\mathbb{R}$

$\pi : x-2y+2z = 4$, $\vec{n} = (1,-2,2)$ är en normal till planet

$\vec{v} = (1,1,1)$ är en riktn.vektor för linje ℓ



Låt $\vec{v}_n$ = proj. av $\vec{v}$ på $\vec{n}$

$$= \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{(1,1,1)\cdot(1,-2,2)}{1^2+(-2)^2+2^2}\vec{n} = \frac{1}{9}\vec{n}$$

Alltså är

$$\vec{u} = 9(\vec{v}-\vec{v}_n) = 9(1,1,1) - \tfrac{9}{9}(1,-2,2) = (9-1, 9+2, 9-2) = \underline{(8,11,7)}$$

en riktningsvektor för projektionen av linje ℓ på π.

Skärningspunkten P_0 mellan ℓ och π ges av

$$3+t-2\cdot(4+t)+2(5+t) = 4, \quad t+5=4, \quad \underline{\underline{t=-1}}$$

Dvs $P_0 = (3,4,5) - 1\cdot(1,1,1) = (2,3,4)$

<u>Svar:</u>

$\ell_p : (x,y,z) = (2,3,4) + t(8,11,7)$, $t\in\mathbb{R}$

eller

$$\frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{11} = \frac{z-4}{7}$$

2. Utökade koefficientmatrisen är

$$U = \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 5 & 6 & 7 & -4 \\ 6 & 0 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ \lambda+3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1-\lambda \\ 9 & -5 & 3 & 5-\lambda & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-5)(-2)(-1)(-3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ \lambda & 2 & 0 & -2 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2 & 0 & -1-\lambda & -1 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2)(-1)(1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -(3+\lambda) & 0 & 12 \end{array}\right]$$

Här ser vi att det finns 3 olika fall.

1) $\lambda=-3$, 2) $\lambda=0$ 3) $\lambda\neq -3$,

1) $\lambda = -3$: sista raden ovan ger att $0 = 12$

Dvs lösning saknas!

\# fria variabler är 2, dvs $\underline{\underline{\dim(N_A) = 2.}}$

2) $\lambda = 0$; I detta fall är

$$U \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-\tfrac{2}{3})(\tfrac{2}{3})(-\tfrac{1}{3}) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (\tfrac{1}{2}) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & \tfrac{3}{2} & \tfrac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_3 och x_5 är fria variable

Sätt $x_5 = 2t$, $x_3 = 3s$

$\dim(N_A) = 2$

Då är

$$\begin{cases} x_1 = \tfrac{7}{6} - s - t \\ x_2 = -\tfrac{5}{2} \quad\;\; - t \\ x_3 = \quad 3s \\ x_4 = -4 \end{cases}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 7/6 \\ -5/2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

or

3) $\lambda \neq 0, -3$; dela med λ i rad 4 :

$$\mathcal{U} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -(3+\lambda) & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -3 \\ -\frac{1}{3+\lambda} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-12}{3+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \; -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12/(3-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \cdot 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12/(3+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \\ -2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & (39+5\lambda)/(3+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12/(3+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & (-15+3\lambda)/(3+\lambda) \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & (39+5\lambda)/(3+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12/(3+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_5 är en fri variabel, $\dim(N_A) = 1$.

sätt $x_5 = -2t$, då är

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-15+3\lambda}{6+2\lambda} + t \\ x_3 = \frac{39+5\lambda}{6+2\lambda} + 3t \\ x_4 = -\frac{12}{3+\lambda} \\ x_5 = \quad - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har standardmatrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\det M = 4}$$

$$T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad T(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$T(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 28 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$T(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 24 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$T(A), T(B), T(C)$ och $T(\vec{0}) = \vec{0}$ är hörne i Q

Volyme av P är

$$V(P) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 5 & 12 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \; 5 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 13 \\ 0 & 32 & 17 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 32 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 2 & -48 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 1 & -24 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-144-13) = 2 \cdot 157 = 3$$

och volymen av Q är

$$V(Q) = \det M \cdot V(P) = 4 \cdot 314 = \underline{\underline{1256}}.$$

4. $AXB = C$; $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -10 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 19 & -10 & 15 & 4 \\ 32 & -12 & 24 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vi finner att

$$XB = A^{-1}C = \begin{bmatrix} -10 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 & -10 & 15 & 4 \\ 32 & -12 & 24 & 6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 34 & 16 & 18 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{=D}.$$

Transponera!

$B^T X^T = D^T$, Lös ekv. $B^T Y = D^T$, $(X = Y^T)$

Utökad matris är,

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 34 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 16 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 18 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \left(\tfrac{1}{2}\right) \left(\tfrac{1}{2}\right) \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 33 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 15 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 18 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (-2)(-3)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -27 & -15 \end{bmatrix} (1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -24 & -20 \end{bmatrix} \left(-\tfrac{1}{4}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} (1)(-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 5 \end{array}\right]$$

X^T

Svar: $X = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

5. $(\underbrace{z^2 + (2+2i)z + 4i}_{=w_k})^3 = 8i = 2^3 e^{i(\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi)}$

Dvs

$w_k = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2\pi}{3})}$, $k = 0,1,2$

1) $w_0 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i$

2) $w_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i$

3) $w_2 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -2i$

Fall 1): $z^2 + (2+2i)z + 4i = \sqrt{3} + i$

$(\underbrace{z + (1+i)}_{=x+iy})^2 = \sqrt{3} + i - 4i + (1+i)^2 = \sqrt{3} - i$

Dvs $\begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{3} \\ 2xy = -1 \end{cases}$, $x^2 + y^2 = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{3+1} = 2$

$2x^2 = 2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2}(4 + 2\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2$; $x^2 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})^2$

$2y^2 = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})^2$; $y^2 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})^2$

$\therefore\ x = \pm\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $y = \mp\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Dvs $z_1 = -1 - i + \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}i = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{3-\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = -1 - i - \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i = -\frac{3+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

Fall 2): $z^2 + (2+2i)z + 4i = -\sqrt{3} + i$

$(\underbrace{z + (1+i)}_{=u+iv})^2 = -\sqrt{3} + i - 4i + (1+i)^2 = -\sqrt{3} - i = i^2(\sqrt{3} + i)$

$u + iv = i(x + iy) = \pm\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right)$

$z_3 = -1 - i + \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i = -\frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$

$z_4 = -1 - i - \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{3+\sqrt{3}}{2}i$

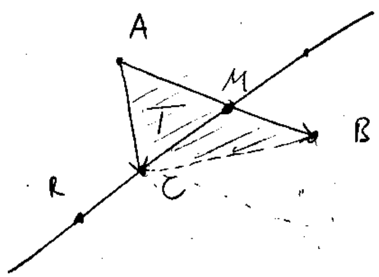
Fall 3: $z^2 + (2+2i)z + 4i = -2i$, $(z + (1+i))^2 = -4i = 2(1-i)^2$

$z_{5,6} = -1 - i \pm \sqrt{2}(1-i)$; $z_5 = \sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2}+1)i$, $z_6 = -(\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}$

6. $A = (1, 5, -2)$

$B = (3, 1, -6)$

$R = (-1, 3, -10)$



Area av triangeln är

$$T = \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{AB}| \quad !$$

Mittpunkten på sträckan AB ges av

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{2}(1+3, 5+1, -2-6) = (2, 3, -4)$$

$$\vec{RM} = (2,3,-4) - (-1,3,-10) = (3, 0, 6) = 3\underbrace{(1,0,2)}_{=\vec{v}}$$

Punkten C har koordinaterna

$$\vec{OC} = \vec{OM} + t\vec{v}$$

Alltså är

$$\vec{AC} = (2,3,-4) - (1,5,-2) + t(1,0,2) = (1+t, -2, -2+2t)$$

och

$$\vec{AB} = (3,1,-6) - (1,5,-2) = (2,-4,-4) = 2(1,-2,-2)$$

Dvs

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = 2 \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1+t & -2 & -2+2t \end{vmatrix} = 2\left(\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2+2t \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1+t & -2+2t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1+t & -2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 2(-4t, 4t, 2t) = -4t(2, -2, -1)$$

Dvs

$$\text{Area } T = \frac{1}{2} \cdot 4|t|\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 6|t| = 7; \; t = \pm\frac{7}{6}$$