MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Linjär algebra och geometri för F1, (TMA 660)
Datum: 2002-10-26, 14.15 - 18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Hanna Martinsson tel. 0740 459022

---

1. En tetraeder har hörnen $P_1 = (1, 1, 2)$, $P_2 = (3, -1, -1)$, $P_3 = (0, 3, 2)$ och $P_4 = (6, 3, -1)$ (ON-system). (8p)

   a) Bestäm en ekvation för planet som innehåller triangeln $P_1P_2P_3$.

   b) Beräkna arean av triangeln $P_1P_2P_3$.

   c) Beräkna tetraederns volym.

   d) Beräkna avståndet från P_4 till planet genom $P_1P_2P_3$.

2. a) Bestäm nollrummet och en bas för kolonnrummet till matrisen (8p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 8 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

   b) För vilka värden på λ ligger vektorn $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & \lambda \end{bmatrix}^T$ i kolonnrummet för $\boldsymbol{A}$?

   För dessa värden på λ, bestäm koordinaterna för $\boldsymbol{b}$ i den bas du erhöll för kolonnrummet.

3. a) Bestäm alla lösningar till den binomiska ekvationen $z^6 = -1$ och beskriv lösningarna i en figur i komplexa talplanet. (7p)

   b) Faktorisera polynomet $p(z) = z^6 + 1$ i reella faktorer av så låg grad som möjligt.

4. a) Bestäm inversen till matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. (8p)

   b) Lös matrisekvationssystemet $\begin{cases} \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{YB} + \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{C} \end{cases}$

   där $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{A}$ som ovan.

5. Den linjära avbildningen $F: \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$ har följande egenskaper: (7p)

$$F(1, 1) = k(3, 5), \quad F(1, -1) = k(1, 3)$$

   där k är en positiv konstant. Dessutom gäller att avbildningens areaskala är 1, dvs två vektorer spänner upp samma parallellogramarea som deras bildvektorer. Bestäm standardmatrisen för F. Avgör också om avbildningen bevarar orientering.

6. Bestäm alla lösningar till matrisekvationen $\boldsymbol{X}^2 + 2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$ där $\boldsymbol{X}$ är en reell symmetrisk matris och $\boldsymbol{I}$ en enhetsmatris. (7p)

Var god vänd!

7. a) Definiera skalärprodukten av två geometriska vektorer. (8p)

   b) Beskriv ortogonalprojektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$. Rita och förklara!

   c) Definiera kryssprodukten mellan två geometriska vektorer.

   d) Bevisa distributiva lagen för kryssprodukt

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$$

8. Låt $\boldsymbol{A}$ vara en kvadratisk $n \times n$ matris. Visa att följande påståenden är ekvivalenta. (7p)

   (1) $\boldsymbol{A}$ är inverterbar.

   (2) $\boldsymbol{A}$ har en kvadratisk vänsterinvers (av typ $n \times n$).

   (3) Ekvationen $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$.

Lycka Till !/ **TG**

Linjär Algebra och Geometri, F1

Svar: 2004-08-18

1. Planets ekvation är: $2x+2y+z=5$. Avståndet från P till planet är $2/3$.

2. a)
$$\begin{cases} x &= 1+3t \\ y &= 1+2t \\ z &= -3t \end{cases}$$
b)
$$\begin{cases} \mathbf{u} &= (2,1)_{\underline{e}} \\ \mathbf{v} &= (2,2)_{\underline{e}} \\ \mathbf{w} &= (1,2)_{\underline{e}} \end{cases}$$

c) $-3+i$. d) $|\dfrac{1+i}{-\sqrt{3}+i}| = \sqrt{2}/2$ och $arg(\dfrac{1+i}{-\sqrt{3}+i}) = -7\pi/12$.

3. $V(A)=\mathbb{R}^3$ och $N(A) = span\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -18 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

4. Standardmatrisen för T är $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ och T är ej volymbevarande.

5. $X = t\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Svar: 2004-01-15

1. a) Nej b) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ c) $\begin{cases} x &= 4/3 \\ y &= 2/3 \end{cases}$

2. a) Rötterna är $z_1 = 2-i$ och $z_2 = -1+2i$ b) $16-16i$

3. $\begin{cases} x &= -2+8t \\ y &= 4+2t \\ z &= 1-11t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$

4. $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

5. $V(F) = span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

Dvs $V(F)$ är ett plan i rummet och dess ekvation på normalform är: $3x-5y-7z=0$.
Detta visar också att ekvationen $F(x,y,z)=(1,1,1)$ saknar lösning.

Svar: 2003-10-25

1. a) $\begin{cases} x &= & 4+t \\ y &= & 6+3t \\ z &= & t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ b) $x+3y+z=6$ c) $d=\sqrt{11}$, $\mathbf{u}_\pi = (3,-2,3)$

2. Rötterna är $z_1 = 1-2i$ och $z_2 = -1+3i$

3. $dimCol(A) = 2,\ Nul(A) = span\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

4. $y = 2x+1$, medelfelet är $\epsilon = 3/\sqrt{2}$

5. Standardmatrisen för $F \circ T$ är

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & -1 & 10 \end{bmatrix} = \frac{2}{33}\begin{bmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 2 & 7 & -6 \\ -2 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Svar: 2002-10-26

1. a) $6x+3y+2z=13$ b) $7/2$ c) 5 d) $30/7$

2. a) $Nul(A) = span\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\mathbf{b} \in Col(A)$ om och endast om $\lambda = 11$.

Koordinaterna för $\mathbf{b}$ i basen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ är $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Rötterna är $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\ -i,\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

$P(z) = z^6 + 1 = (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)$

4. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -12 & 4 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

b) $Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 6 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}$, $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

6. $X = -I$ är *enda* lösningen.