**MATEMATIK**
**Chalmers Tekniska Högskola**

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

**Tentamensskrivning i**
**Linjär Algebra och Geometri för F1, (TMA 660)**
Datum: 2002-08-21, 14.15 - 18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Erik Broman tel. 0740 459022

---

1. Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Enbart svar skall ges, alltså ett rakt ja eller nej. Rätt svar ger 1 poäng, fel svar ger -1 poäng och inget svar 0 poäng. Man kan dock inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften. (6p)

   a) Varje homogent ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar.

   b) Matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ är inverterbar.

   c) Låt $A$, $B$ och $C$ vara kvadratiska matriser av samma storlek. Om $AB = AC$ och om $C$ är inverterbar så följer alltid att $B = C$.

   d) Om $A$ är inverterbar så är $A^{-1}$ inverterbar.

   e) Om $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ så är elementet i andra raden och första kolonnen till inversen för $A$ lika med $\frac{-7}{18}$.

   f) Linjen $l$: $(x, y, z) = (-1, 0, 4) + t(2, 1, -4)$ skär planet $\pi$: $(x, y, z) = (2, -1, 1) + s(1, 1, 3) + t(0, 1, -4)$ i punkten $(3, 2, -4)$.

2. Visa att linjen $l_1$ genom punkterna $P_1 = (1, -1, -2)$ och $P_2 = (2, -1, 2)$ ligger i planet $\pi: (x, y, z) = s(1, -1, -2) + t(1, 0, 4)$. En andra linje $l_2$ ligger också i planet $\pi$ och skär $l_1$ under rät vinkel i punkten $P_2$. Bestäm en ekvation för $l_2$. (7p)

3. Den algebraiska ekvationen $z^5 - 3z^4 + 8z^3 - 15z^2 + 15z - 18 = 0$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (7p)

4. Lös matrisekvationen $AXB = C$, där (8p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 19 & -10 & 15 & 4 \\ 32 & -12 & 24 & 6 \end{bmatrix}.$$

5. Lös följande ekvationssystem för alla reella värden på $p$. (8p)

$$\begin{cases} x + py + z = 1 \\ px + y + p^2 z = 1 \\ -x + y + 2pz = 3 \end{cases}.$$

6. $A$ är en $n \times n$ matris ($n \geq 2$) vars samtliga element är ettor. Bestäm inversen till $E - A$. (8p)

7. a) Formulera och bevisa multiplikationssatsen för determinanter (6p)

   b) Visa att om matrisen $A$ är inverterbar så är $detA \neq 0$. (2p)

8. Formulera och bevisa distributiva lagen för vektoriell produkt. (8p)

/TG

**MATEMATIK**
**Chalmers Tekniska Högskola**

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

**Tentamensskrivning i**
**Linjär Algebra och Geometri för [illegible] (TMA 660)**
Datum: 2002-08-21, 14.15 - 18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Erik Broman tel. 0740 459022

1. Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Enbart svar skall ges, alltså ett rakt ja eller nej. Rätt svar ger 1 poäng, fel svar ger -1 poäng och inget svar 0 poäng. Man kan dock inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften. (6p)
   a) Varje homogent ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar.
   b) Matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ är inverterbar.
   c) Låt $A$, $B$ och $C$ vara kvadratiska matriser av samma storlek. Om $AB = AC$ och om $C$ är inverterbar så följer alltid att $B = C$.
   d) Om $A$ är inverterbar så är $A^{-1}$ inverterbar.
   e) Om $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ så är elementet i andra raden och första kolonnen till inversen för $A$ lika med $\frac{-7}{18}$.
   f) Linjen $l$: $(x, y, z) = (-1, 0, 4) + t(2, 1, -4)$ skär planet $\pi$: $(x, y, z) = (2, -1, 1) + s(1, 1, 3) + t(0, 1, -4)$ i punkten $(3, 2, -4)$.

2. Visa att linjen $l_1$ genom punkterna $P_1 = (1, -1, -2)$ och $P_2 = (2, -1, 2)$ ligger i planet $\pi: (x, y, z) = s(1, -1, -2) + t(1, 0, 4)$. En andra linje $l_2$ ligger också i planet $\pi$ och skär $l_1$ under rät vinkel i punkten $P_2$. Bestäm en ekvation för $l_2$. (7p)

3. Den algebraiska ekvationen $z^5 - 3z^4 + 8z^3 - 15z^2 + 15z - 18 = 0$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (7p)

4. Lös matrisekvationen $AXB = C$, där (8p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 19 & -10 & 15 & 4 \\ 32 & -12 & 24 & 6 \end{bmatrix}.$$

5. Lös följande ekvationssystem för alla reella värden på $p$. (8p)

$$\begin{cases} x + py + z = 1 \\ px + y + p^2 z = 1 \\ -x + y + 2pz = 3 \end{cases}$$

6. $A$ är en $n \times n$ matris ($n \geq 2$) vars samtliga element är ettor. Bestäm inversen till $E - A$. (8p)

7. a) Formulera och bevisa multiplikationssatsen för determinanter (6p)
   b) Visa att om matrisen $A$ är inverterbar så är $detA \neq 0$. (2p)

8. Formulera och bevisa distributiva lagen för vektoriell produkt. (8p)

---

Lösningar till "Linjär Algebra & Geometri", F1, TMA660. 1)
2002-08-21.

1a Ja

1b) Nej ("rad1 = 2·rad2 + rad3")

1c) Nej (Inte ens om vi antar att $A \neq 0$ är påståendet sant. Tag t.ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $C = E$.)

1d) Ja

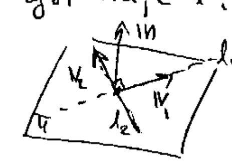
1e) Nej, ($\hat{a}_{21} = (-1)^3 \frac{A_{21}}{\det A} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{1}{18}$)

1f) Ja.

---

2. $P_1 = (1,-1,2) \in \pi$ ty tag $s=1$ och $t=0$
$P_2 = (2,-1,2) \in \pi$ ty tag $s=t=1$.

Eftersom $P_1$ och $P_2$ båda ligger i planet $\pi$ så går linje $l_1$ genom $P_1$ och $P_2$ också det.




En riktningsvektor för $l_1$ är
$v_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (2,-1,2) - (1,-1,-2) = (1,0,4)$

En normal till planet ges av $n = u \times v$, där $u = (1,0,4)$, $v = (1,-1,$

Dvs $n = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (4, 6, -1)$.

En riktningsvektor för $l_2$ ges av
$v_2 = n \times v_1 = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 4 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (24, -17, -6)$

Svar: $l_2: (x,y,z) = (2,-1,2) + t(24,-17,-6)$, $t \in \mathbb{R}$

Sätt $p(z) = z^5 - 3z^4 + 8z^3 - 15z^2 + 15z - 18$.

Ansätter $z = ia$ som en rot till ekv. $p(z) = 0$

för $(ia)^5 - 3(ia)^4 + 8(ia)^3 - 15(ia)^2 + 15(ia) - 18 = 0$

$i(a^5 - 8a^3 + 15a) - 3(a^4 - 5a^2 + 6) = 0 \quad (= 0 + i\cdot 0)$

Real och imaginärdel är båda $0$;

dvs (1) $a^4 - 5a^2 + 6 = 0$

(2) $a^5 - 8a^3 + 15a = 0 \quad a \neq 0$ enl (1), dvs $a^4 - 8a^2 + 15 = 0$

(1) $\Rightarrow a^2 = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5 \pm 1}{2} = 2, 3$

(2) $\Rightarrow a^2 = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1 = 3, 5$

$\therefore \quad a^2 = 3$ och $a = \pm\sqrt{3}$.

Dvs $z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$ är två rötter till $p(z) = 0$.

$(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) = z^2 + 3$ delar $p(z)$ !

$$p(z) = (z^2 + 3)\underbrace{(z^3 - 3z^2 + 5z - 6)}_{= q(z)}$$

Efter prövning finner vi att $q(2) = 0$ dvs $z_3 = 2$ är också en rot. Vi finner att $q(z) = (z-2)(z^2 - z + 3)$. Övriga rötter ges av

$$z^2 - z + 3 = 0$$

$$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{4} - 3}_{-\frac{11}{4}}} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

Svar: Rötterna är $z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$, $z_3 = 2$, $z_{4,5} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$



4. $\underset{2\times 2}{A} \underset{2\times 4}{X} \underset{4\times 4}{B} = \underset{2\times 4}{C}$ ; $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{pmatrix}$

Om $A$ och $B$ är inverterbara så är $X = A^{-1} C B^{-1}$.

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} = -20 + 21 = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existerar

$\det B =$ "utveckla längs kolonn 4" $= -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2(0 - 1 + 3 - 0 + 2 + 0) = -8$

$\neq 0 \Rightarrow B^{-1}$ existerar.

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} -10 & -(-7) \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

$A^{-1}C = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 & -10 & 15 & 4 \\ 32 & -12 & 24 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 16 & 18 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Vi bestämmer nu $B^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 1 & 3 & -9 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & 18 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -8 & 0 & -8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 1 & 3 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 1 & 3 & -9 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & -9 \end{pmatrix}}_{= 8 \cdot B^{-1}}$$

Svar: $X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 34 & 16 & 18 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 37 & 39 & 19 \\ 0 & 4 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

: De utökade koefficientmatrisen för ekv.systemet är

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & 1 & 1 \\ p & 1 & p^2 & 1 \\ -1 & 1 & 2p & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & 1 & 1 \\ 0 & 1-p^2 & p^2-p & 1-p \\ 0 & 1+p & 1+2p & 4 \end{array}\right) \cdot (1-p)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & 1 & 1 \\ 0 & 1+p & 1+2p & 4 \\ 0 & 0 & 3p^2-2p-1 & -3(1-p) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & 1 & 1 \\ 0 & 1+p & 1+2p & 4 \\ 0 & 0 & (1-p)(1+3p) & 3(1-p) \end{array}\right) \quad (A)$$

Vi erhåller en entydig lösning om $1 \cdot (1+p)(1-p)(1+3p) \neq 0$

Dvs om $p \neq 1$, $p \neq -\frac{1}{3}$ och $p \neq -1$.

I sådana fall så får vi efter division med $(1-p)(1+3p)$: rad 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & 1 & 1 \\ 0 & 1+p & 1+2p & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{1+3p} \end{array}\right) -(1+2p) \ (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & 0 & (3p-2)/(3p+1) \\ 0 & 1+p & 0 & (6p+1)/(3p+1) \\ 0 & 0 & 1 & 3/(3p+1) \end{array}\right)$$

$$\left[ 1 - \frac{3}{1+3p} = \frac{3p-2}{3p+1}, \quad 4 - 3\frac{1+2p}{1+3p} = \frac{4+12p-3-6p}{3p+1} = \frac{6p+1}{3p+1} \right]$$

Dvs $z = \dfrac{3}{3p+1}$, $y = \dfrac{6p-5}{(3p+1)(p+1)}$, $x + py = \dfrac{3p-2}{3p+1}$

$$x = \frac{3p-2}{3p+1} - p\frac{6p+1}{(3p+1)(p+1)} = \frac{3p^2+3p-2p-2-6p^2-p}{(3p+1)(p+1)} = \frac{-3p^2-2}{(3p+1)(p+1)}$$

Alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{(3p+1)(p+1)} \begin{pmatrix} -3p^2-2 \\ 6p+1 \\ 3(p+1) \end{pmatrix}.$$

För $p = -\frac{1}{3}$ så ger sista raden att $0 = 4$ !

För $p = -1$ så ger rad 2 och 3 att $\begin{cases} -z = 4 \\ -4z = 6 \end{cases}$ !

D.v.s. i dessa fall saknas lösningar.



För $p = 1$ så får systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sätt $z = 2t$ (fri variabel)

Då erhålls $2y + 3 \cdot 2t = 4$, $y = 2 - 3t$

och $x + y + z = 1$, $x = 1 - y - z = -1 + t$.

Dvs $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

---

6. Vi noterar att $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & & \\ \vdots & & \ddots & \\ n & & & n \end{bmatrix}$

$= nA$.

Om $r$ är ett reellt tal så är

$$(E-A)(E-rA) = E - rA - A + r\underbrace{A^2}_{=nA} = E + (rn - r - 1)A$$

Högerledet är lika med $E$ om vi väljer $r$ s.a.

$$rn - r - 1 = 0$$

Dvs $r = \dfrac{1}{n-1}$

Svar: $(E-A)^{-1} = E - \frac{1}{n-1}A$, $n = 2, 3, \ldots$