MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Linjär algebra och geometri för F1, (TMA 660)
Datum: 2001-10-27, 14.15 - 18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Henrik Seppänen tel. 0740 459022

---

1. a) Bestäm avståndet från punkten $P = (-1, 3, 3)$ till det plan π som innehåller punkterna $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (0, -1, 1)$ och $P_3 = (1, 2, 4)$. (6p)

   b) En ljuskälla är placerad i punkten P. Den genererar en smal ljusstråle som reflekteras i punkten P_3 i det speglande planet π ovan. (4p)
   Bestäm ekvationerna för linjerna som beskriver ljusstrålens bana.
   (Koordinater är angivna i ett ON-system.)

2. Betrakta ekvationssystemet (7p)

$$\begin{cases} x + y + z + 2u = 1 \\ ax \qquad + z + u = 2 \\ 2x + 2y + 3z + 5u = 3 \\ \qquad y + z + au = b \end{cases}$$

   a) Bestäm determinanten för koefficientmatrisen och avgör för vilka a som ekvationssystemet har en entydig lösning.
   b) Avgör för vilka värden på a och b som systemet har mer än en lösning och bestäm lösningarna i dessa fall

3. En kvadrat med sidan två är placerad i den övre halvan av det komplexa talplanet. Ett hörn ligger i punkten $z_1 = 1 + i$ och ena sidan, med start i z_1, bildar vinkeln $\pi/3$ (radianer) med positiva realaxeln. Bestäm övriga hörnpunkter i kvadraten. Rita figur och ange svaret på formen $a + bi$. (6p)

4. Lös matrisekvationen $AXB = C - 2XB$, där (7p)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Ekvationen $z^4 + 5iz^3 + (-7 + 3i)z^2 - 12z - 4 - 12i = 0$ har en rent imaginär dubbelrot. Lös ekvationen. (7p)

6. Man säger att ett tal λ är ett egenvärde till en matris A om det finns en icketrivial lösning till ekvationen $Ax = \lambda x$. (Man säger då också att lösningen x är en egenvektor). (7p)
   Låt P vara en matris sådan att $P^{-1} = P^T$ (dvs P är en ortogonalmatris).
   Visa att om $\det P = 1$ och P har ett udda antal rader så är $\lambda = 1$ ett egenvärde till P.

7. a) Formulera och bevisa multiplikationssatsen för determinanter (6p)

   b) Visa att om matrisen A är inverterbar så är $\det A \neq 0$. (2p)

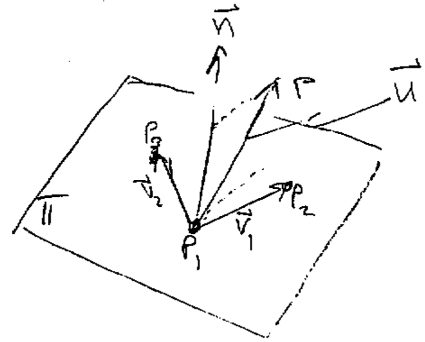
8. a) Definiera begreppet invers matris och visa att en matris har högst en invers. (2p)

   b) Visa att om en matris har en vänsterinvers så är den inverterbar. (6p)

Lösningar till Linjär Algebra och Geometri, TMA660, 20011027.

1

1.a Vi bestämmer först en normal till planet π: Vektorerna



$\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (0,-1,1)-(1,0,1) = (-1,-1,0)$

$\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3} = (1,2,4)-(1,0,1) = (0,2,3)$

är två riktningsvektorer för π

En normalvektor till planet är

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-3, 3, -2) = -(3,-3,2)$$

Planets ekv: $3x - 3y + 2z + D = 0$; $P_1 \in \pi \Rightarrow 3 - 0 + 2 + D = 0$, $D =$

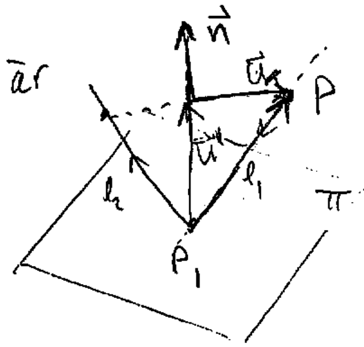
Sätt $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P} = (-1,3,3)-(1,0,1) = (-2,3,2)$

Projektionen av $\vec{u}$ på $\vec{n}$ ges av

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{(-2,3,2)\cdot(-3,3,-2)}{9+9+4}\vec{n} = \frac{6+9-4}{22}\vec{n} = \frac{1}{2}$$

Avståndet från P till planet är $d = |\vec{u}'| = \frac{1}{2}\sqrt{22}$.

b) En riktningsvektor för l_1 och l_2 är



$\vec{u} = \overrightarrow{P_1P} = (-2,3,0)$

respektive

$\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{u}_{\parallel}$, där $\vec{u}_{\parallel} = \vec{u} - \vec{u}'$

Dvs
$\vec{w} = 2\vec{u}' - \vec{u} = \vec{n} - \vec{u} = (-3,3,-2) - (-2,3,0) = (-1,0,-2)$

Svar: Ekvationerna för linjerna ges av

$$l_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad l_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; s \in \mathbb{R}$$

$\in \mathbb{R}$

Med $a=2$ och $b=0$ så får vi ekv. systemet med utökad koefficientmatris

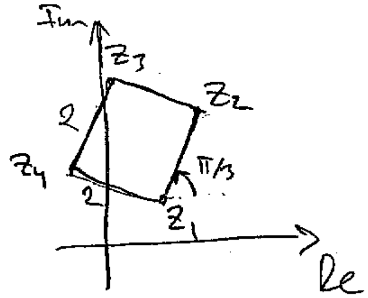
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dvs $\begin{cases} x = 1 \\ y + u = -1 \\ z + u = 1 \end{cases}$, sätt $u = -t \Rightarrow \begin{matrix} z = 1+t \\ y = -1+t \end{matrix}$.

<u>Svar:</u> $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

---

3. Vi finner att



$$z_2 = z_1 + 2e^{i\pi/3}$$

$$z_4 = z_1 + i(z_2 - z_1) = z_1 + 2i\,e^{i\pi/3}$$

$$z_3 = z_2 + (z_4 - z_1) = z_2 + 2i\,e^{i\pi/3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2e^{i\pi/3} &= 2\left(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}\right) = \\ &= 1 + i\sqrt{3} \\ 2i\,e^{i\frac{\pi}{3}} &= -\sqrt{3} + i \end{aligned}}$$

<u>Dvs</u> Hörnpunkterna är

$z_2 = 1 + i + (1 + i\sqrt{3}) = \underline{2 + (1+\sqrt{3})i}$

$z_3 = 2 + (1+\sqrt{3})i - \sqrt{3} + i = \underline{2 - \sqrt{3} + (2+\sqrt{3})i}$

$z_4 = 1 + i - \sqrt{3} + i = \underline{1 - \sqrt{3} + 2i}$

4

$$AXB = C - 2XB$$

$$AXB + 2IXB = C$$

$$(A+2I)XB = C \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A+2I)X = CB^{-1} \qquad \text{dvs } B^{-1} = B.$$

Men $CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \; A+2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Den utökade koefficientmatrisen är

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] (-2)\;(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -10 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right] (-1)\;(-1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right] \left(\tfrac{1}{3}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] (-5)\;(-3) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}}_{X}$$

<u>Svar:</u> $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$

5. $z = ai$ är en rot $\Rightarrow$ $p(ai) = 0$, dvs

$$a^4 + 5a^3 + 7a^2 - 3a^2 i - 12ai - 4 - 12i = 0$$

$$\underbrace{a^4 + 5a^3 + 7a^2 - 4}_{=0} - \underbrace{(3a^2 + 12a + 12)}_{=0}\, i = 0$$

$$3a^2 + 12a + 12 = 0$$

$$a^2 + 4a + 4 = 0, \quad a = -2 \pm \sqrt{4-4} = \underline{\underline{-2}}$$

$\underline{z = -2i}$ är enl. utsaga en dubbelrot, dvs

$$(z + 2i)^2 = z^2 + 4iz - 4 \text{ delar } p(z).$$

[Alt. $(z - ai)^2 = z^2 - 2aiz - a^2$ delar $p(z)$].

$$
\begin{array}{r l}
 & z^2 + iz + 1 + 3i \\
z^2 + 4iz - 4 \,\big) & z^4 + 5iz^3 + (-7+3i)z^2 - 12z - 4 - 12i \\
 & -(z^4 + 4iz^3 - 4z^2) \\
 & iz^3 + (-3+3i)z^2 - 12z - 4 - 12i \\
 & -(iz^3 - 4z^2 - 4iz) \\
 & (1+3i)z^2 + (-12+4i)z - 4 - 12i \\
 & -((1+3i)z^2 + (-12+4i)z - 4 - 12i) \\
 & 0
\end{array}
$$

$z = -2i$ är e dubbelrot

Vi erhåller övriga rötter ur 2:a grads ekvationen

$$z^2 + iz + 1 + 3i = 0$$

$$\left(z + \frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} - 1 - 3i = \frac{1}{4}(-5 - 12i) \; ; \quad \text{sätt } z + \frac{i}{2} = \frac{1}{2}(x + iy)$$

Vi söker $w = x + iy$ s.a. $\underbrace{(x+iy)^2}_{= x^2 - y^2 + 2xyi} = -5 - 12i$.

Dvs

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases}, \quad x^2 + y^2 = |w|^2 = |-5 - 12i| = \sqrt{25 + 144} = 13$$

$$2x^2 = 8, \; x^2 = 4, \; x = \pm 2$$

$$2xy = -12 \Rightarrow y = \mp 3$$

$\therefore$ Rötterna är

$$z_3 = -\frac{i}{2} + \frac{1}{2}(2 - 3i) = \underline{\underline{1 - 2i}}$$

$$z_4 = -\frac{i}{2} + \frac{1}{2}(-2 + 3i) = \underline{\underline{-1 + i}}$$

i) Koefficientmatrisen för systemet är

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet har en entydig lösning precis då $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -a & 1-a & 1-2a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a^2-2a+1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-2a \end{vmatrix} = -(a^2-2a). \quad \left(\begin{matrix}\text{produkten av} \\ \text{diagonalelementen}\end{matrix}\right)$$

$\therefore$ $\det A \neq 0$ omm. $a \neq 0$ och $a \neq 2$.

Dvs vi har en entydig lösn. precis då $a \neq 0, 2$.

2) Vi kan ha mer än en lösning om $a = 0$ eller $a = 2$.
Vi utför nu samma radoperationer på den utökade koefficientmatrisen som på determinanten ovan.
Detta ger

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & a & b \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-2a & ab-a+2 \end{array}\right]$$

i) $a = 0$: sista raden $\Rightarrow$ $0 = 0 + 2$ ej möjligt!
lösning saknas

ii) $a = 2$: sista rad $\Rightarrow$ $0 = 2b$, $\therefore$ $b = 0$

Detta ger också att u blir en fri variabel och vi har oändligt många lösningar

$\longrightarrow$

6 Vi har

$$1 = \det(P^{-1}P) = (\det P^{-1})\cdot(\det P) = [P^{-1} = P^T] = \det P^T \cdot \det$$

eftersom $\det P = 1$ så följer att $\underline{\det P^T = 1}$

Vi undersöker ekvationen

$$PX = X \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Vi vill ta reda på om}\\ \lambda = 1 \text{ är ett egenvärde}\end{array}\right)$$

$$(P - I)X = 0$$

Denna har en icketrivial lösning omm $\det(P-I) = 0$

Men

$$\det(P-I) = \det P^T \cdot \det(P-I) = \det(\underbrace{P^TP}_{=I} - P^T) =$$

$$= \det(I - P^T) \overset{1)}{=} \det((I-P)^T) \overset{2)}{=} \det(I-P) =$$

$$= \det(-(P-I)) \overset{3)}{=} (-1)^n \det(P-I) \qquad (n = \#\,\text{rader})$$

$$= -\det(P-I) \quad \text{ty } n \text{ är } \underline{\text{udda}}$$

Dvs $2\det(P-I) = 0$, $\underline{\det(P-I) = 0}$

Detta visar att $\lambda = 1$ är ett egenvärde till P.

$$\left[\begin{array}{ll} 1) & (A+B)^T = A^T + B^T \\ 2) & \det A^T = \det A \\ 3) & \det \lambda A = \lambda^n \det A \end{array}\right)$$