TMA 660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri för F1
Datum: 2000-01-14, kl. 8.45 - 12.45.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Greger Cronquist, tel. 0740-459022.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1.(a) Bestäm ekvationen för det plan som går genom den räta linjen

$$x+5=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{2}$$

och är parallellt med den räta linjen

$$\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2y-3z+5=0 \end{cases}. \qquad (4p)$$

(b) Bestäm origos spegelbild i planet från deluppgift (a). (4p)

2. Lös för varje värde på λ ekvationssystemet

$$\begin{cases} -\lambda x_1 & & -\ 2x_3 & +\ 2x_4 & = 0 \\ -3x_1 & +(4-\lambda)x_2 & -\ 3x_3 & +\ 3x_4 & = 0 \\ -4x_1 & & +(2-\lambda)x_3 & +\ 4x_4 & = 0 \\ -2x_1 & & +\ 2x_3 & +(4-\lambda)x_4 & = 0 \end{cases}. \qquad (8p)$$

3. Ekvationen

$$z^3-(1-i)z^2-(2-3i)z-10i=0$$

har en reell rot. Lös ekvationen. (8p)

4. Bestäm parametern λ så att vektorn $(7,-2,\lambda)$ kan uttryckas som linjärkombination av vektorerna $(2,3,5)$, $(3,7,8)$, $(1,-6,1)$. (7p)

5. Beräkna determinanten av typ $n\times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (8p)$$

6. Låt α vara ett komplext tal sådant att $\alpha+\frac{1}{\alpha}=2\cos\phi$ för något reellt ϕ. Visa att $\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n}=2\cos n\phi$ för varje naturligt tal n. (7p)

7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för skalär produkt (inkl. projektionsformeln). (6p)

8. Formulera och bevisa Cramers regel. (8p för godtyckligt n; 5p för $n=3$)

/JM

1

Linjär algebra och geometri F1

14/11 - 2000

Lösningar

1. En vektor, parallell med den första linjen, är $(1, 4, 2)$, en vektor, parallell med den andra är

$$(2,-1,1) \times (1,2,-3) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= e_1 + 7e_2 + 5e_2 = (1, 7, 5)$$

En normalvektor till det sökta planet:

$$(1,4,2) \times (1,7,5) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} =$$

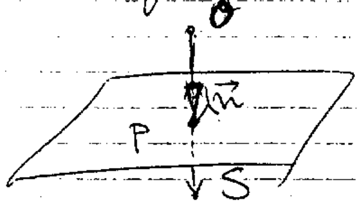
$$= 6e_1 - 3e_2 + 3e_3 = (6,-3,3) \parallel (2,-1,1)$$

$\Rightarrow$ planet har ekvation $2x - y + z + d = 0$

En pkt i planet: $(-5, 3, 1)$ (se den första linjen)

$\Rightarrow -10 - 3 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = 12$

$\Rightarrow$ planets ekvation $2x - y + z + 12 = 0$;



$P \in$ planet; $OP \perp$ planet

$\overrightarrow{OP} = \lambda(2,-1,1) \Rightarrow P = (2\lambda, -\lambda, \lambda)$

$4\lambda + \lambda + \lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$

$\Rightarrow P = (-4, 2, -2)$; $\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OP} \Rightarrow \boxed{S = (-8, 4, -4)}$

2. Ett kvadratiskt homogent linjärt ekvationssystem har endast den triviala lösningen om koefficientmatricens determinant $\neq 0$. Vi bestämmer därför de λ för vilka $\det A = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 4-\lambda & -3 & 3 \\ -4 & 0 & 2-\lambda & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -4 & 2-\lambda & 4 \\ -2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\left[-\lambda(2-\lambda)(4-\lambda) + \cancel{16} - \cancel{16} + 4(2-\lambda) + 8\lambda - 8(4-\lambda)\right] =$$

$$= (4-\lambda)\left[-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 24\right] =$$

$$= (-\lambda+4)\left[-\lambda(\lambda^2-4) + 6(\lambda^2-4)\right] =$$

$$= (\lambda-4)(\lambda-6)(\lambda+2)(\lambda-2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4, \quad \lambda_4 = 6$$

1) $\lambda_1 = -2$: $\cdot\frac{1}{2}$, $+(\frac{1}{3})$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 6 & -3 & 3 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_4 = 0 \quad , \quad x_3 = t \quad , \quad x_2 = t \, , \; x_1 = t$$

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2 = 2:$

$$\begin{array}{c} \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \cdot 3 \\ \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -3 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}} x = 0$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_4 = s \quad , \quad x_3 = 0 \, , \; x_2 = 0 \quad , \quad x_1 = s$$

$$\Rightarrow x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $\lambda_3 = 4:$

$$\begin{array}{c} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ -4 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}} x = 0$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ (-1)\,(-2) \\ + \\ + \end{array}$$

4

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_4 = 0 \; ; \; x_3 = 0 \; , \; x_2 = p \; , \; x_1 = 0$ $\quad x = p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\lambda_4 = 6$:

$$\begin{array}{c} \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \cdot\frac{1}{4} \\ (-\frac{1}{2}) \end{array} \begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & -3 & 3 \\ -4 & 0 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \cdot 3 \quad (-1) \\ + \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_4 = q \; , \; x_3 = q \; , \; x_2 = 0 \; , \; x_1 = 0$

$$\Rightarrow x = q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\lambda \neq -2; 2; 4; 6$: endast trivial lösning

$\lambda = -2$: $x = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda = 2$: $x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda = 4$: $x = p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda = 6$: $x = q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(p, q, s, t \in \mathbb{R})$

(3.) $a \in \mathbb{R}$; $a^3 - (1-i)a^2 - (2-3i)a - 10i = 0$ (5)

$\Rightarrow$ Re ... $= 0$ och Im ... $= 0$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^3 - a^2 - 2a = 0 \\ a^2 + 3a - 10 = 0 \end{array} \right.$$

$$a^3 - a^2 - 2a = a(a^2 - a - 2) = a(a-2)(a+1)$$

$$a^2 + 3a - 10 = (a+5)(a-2)$$

$\Rightarrow$ gemensamt nollställe till Re- och Im-delen är endast $\boxed{a = 2 = z_3}$

Polynomdivision:

$$z^3 - (1-i)z^2 - (2-3i)z - 10i \,/\, z - 2 = z^2 + (1+i)z + 5i$$

$$\begin{array}{l} z^3 - (1-i)z^2 - (2-3i)z - 10i \\ -\,(z^3 - 2z^2) \\ \hline (1+i)z^2 - (2-3i)z - 10i \\ -\,((1+i)z^2 - (2+2i)z) \\ \hline 5iz - 10i \\ -\,(5iz - 10i) \\ \hline 0 \end{array}$$

Kvadratkomplettering ger:

$$z^2 + (1+i)z + 5i = \left(z + \frac{1+i}{2}\right)^2 - \frac{(1+i)^2}{4} + 5i =$$

$$= \left(z + \frac{1+i}{2}\right)^2 - \frac{\cancel{1} + 2i - \cancel{1}}{4} + 5i =$$

$$= \left(z + \frac{1+i}{2}\right)^2 + i\,\frac{9}{2} = 0$$

$$\left(z + \frac{1+i}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow z_1 + \frac{1+i}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} - i\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = 1 - 2i}$$

$$z_2 + \frac{1+i}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{+i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)/2} = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

6

$$= -\frac{3}{2} + i\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = -2 + i}$$

---

4. $(7, -2, \lambda) = \alpha(2,3,5) + \beta(3,7,8) + \gamma(1,-6,1)$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 7 \\ 3\alpha + 7\beta - 6\gamma = -2 \\ 5\alpha + 8\beta + \gamma = \lambda \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & -7 & -9 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -9 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array}\right) (-2)\ (-5) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -9 \\ 0 & -\cancel{5}\,1 & \cancel{15}\,3 & \cancel{25}\,5 \\ 0 & -12 & 36 & \lambda+45 \end{array}\right) (-12) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -9 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-15 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \exists$ konstanter α, β, γ med den önskade egenskapen omm $\lambda = 15$.

---

5. Subtrahera rad 1 från övriga rader:

determinanten $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ (addera rader 2…n till rad 1)

$$= \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = n(-1)^{n-1}$$

---

6. Låt $\alpha = re^{i\theta}$

$\Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} =$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) =$

$= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = 2\cos\varphi$

h.l. reellt $\Rightarrow \operatorname{Im}(\text{v.l.}) = 0$

$\Rightarrow \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = 0$

1) $r - \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$ (ty $r > 0$)

$\Rightarrow \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} = e^{ni\theta} + e^{-ni\theta} = 2\cos n\theta$

$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2\cos\theta = 2\cos\varphi \Rightarrow \cos\theta = \cos\varphi$

$\Rightarrow \theta = \pm\varphi + 2\pi \Rightarrow \sin\theta = \pm\sin\varphi$

$\Rightarrow e^{i\theta} = e^{\pm i\varphi} \Rightarrow e^{ni\theta} = e^{(\pm1)^n ni\varphi}$

$\Rightarrow \cos n\theta + i\sin n\theta = \cos n\varphi + i(\pm1)^n \sin n\varphi$

$\Rightarrow \cos n\theta = \cos n\varphi$ (realdelar)

$\Rightarrow \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} = 2\cos n\theta = 2\cos n\varphi$

2) $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi \Rightarrow \cos\theta = (-1)^k$

$\Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} = \left(r + \frac{1}{r}\right)(-1)^k = 2\cos\varphi$

$\Rightarrow \left| \underbrace{r + \frac{1}{r}}_{>0} \right| = 2\left|\cos\varphi\right| \leq 2\cdot 1$

$\Rightarrow 0 < r + \frac{1}{r} \leq 2$

$\Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

(se 1))