TMA 660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri för F1
Datum: 1999-10-23, kl. 14.15 - 18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Fredrik Altenstedt, ankn. 5379.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. (a) Visa att punkterna $A(2,-3,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(-4,5,6)$, $D(2,-3,6)$ bildar en plan fyrhörning. (2p)
(b) Bestäm den ortogonala projektionen P' av punkten $P(1,0,1)$ på planet som går genom A,B,C,D. (6p)

2. Lös för varje värde på λ och μ ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = \lambda \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_2 + 2x_3 + \mu x_4 = 1 \end{cases} \qquad (8p)$$

3. Låt A och B vara $n \times n$ matriser och antag att A är inverterbar. Visa att

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B). \qquad (7p)$$

4. Ekvationen $z^4 - 3z^2 - 6z - 2 = 0$ har två rötter vilkas kvot är i. Lös ekvationen. (7p)

5. Bestäm λ så att vektorerna

$$\begin{gathered} (\lambda+1, \lambda, \lambda, \ldots, \lambda), \\ (\lambda, \lambda+\tfrac{1}{2}, \lambda, \ldots, \lambda), \\ (\lambda, \lambda, \lambda+\tfrac{1}{3}, \ldots, \lambda), \\ \ldots \\ (\lambda, \lambda, \lambda, \ldots, \lambda+\tfrac{1}{n}) \end{gathered}$$

blir linjärt beroende. (8p)

6. Givet är den algebraiska ekvationen

$$(z-\alpha)^n + e^{i\theta}(z+\alpha)^n = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att alla lösningar ligger på en rät linje genom origo (i det komplexa talplanet). (4p)
(b) Lös ekvationen. (4p)

7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektoriell produkt. (6p)

8. (a) Visa att ett homogent linjärt ekvationssystem alltid är lösbart. (2p)

(b) Visa att ett kvadratiskt homogent linjärt ekvationssystem med inverterbar koefficientmatris endast har den triviala lösningen (= nollösningen). (3p)

(c) Visa att ett homogent linjärt ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar. (3p)

JM

TMA660 Linjär algebra & geometri F1

23/10-99

Lösningar

1. (a) $\vec{AB} = (-3, 4, 0)$

$\vec{AC} = (-6, 8, 5)$

$\vec{AD} = (0, 0, 5)$

den skalära trippelprodukten:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ vektorerna LB $\Rightarrow$ de fyra punkterna ligger i samma plan

(b) normalvektor till planet:

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

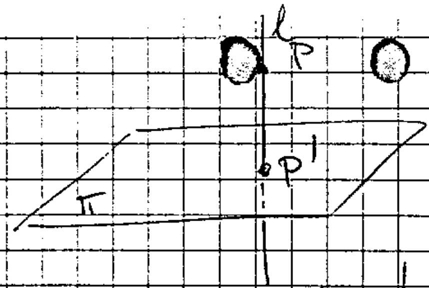
$$= 20 e_1 + 15 e_2 + 0 \cdot e_3 \parallel (4, 3, 0)$$

planet: π $4x + 3y = d$

Sätt in A: $8 - 9 = -1$ $\Rightarrow d = -1$

$\Rightarrow$ planet har ekvation

π: $4x + 3y + 1 = 0$



Ekvationen för den räta linjen $\underline{l}$ genom P, $\perp \pi$:

$$l: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 0 + 3t \\ z = 1 \end{cases}$$

$P' = l \cap \pi$; vi söker t s.a. pkten från $\underline{l}$ ligger i π:

$$4(1+4t) + 3(0+3t) + 1 = 0$$

$$25t = -5$$

$$t = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow P'\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right).$$

---

(2) Gausseliminera:

$$\begin{array}{c} (-2) \\ + \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & \mu & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 6-2\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & \mu & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2) \\ \\ + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 6-2\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-6 & -11+4\lambda \end{array}\right)$$

(i) $\mu \neq 6$: entydig lösning $\forall \lambda$

3

$$x_4 = \frac{4\lambda - 11}{\mu - 6}$$

$$x_3 = 4 - x_4 = 4 - \frac{4\lambda - 11}{\mu - 6}$$

$$x_2 = 6 - 2\lambda - 3x_4 - x_3 =$$

$$= 6 - 2\lambda - 3\,\frac{4\lambda - 11}{\mu - 6} - 4 + \frac{4\lambda - 11}{\mu - 6} =$$

$$= 2 - 2\lambda - 2\,\frac{4\lambda - 11}{\mu - 6}$$

$$x_1 = \lambda - x_4 - x_2 = \lambda - \frac{4\lambda - 11}{\mu - 6} - 2 + 2\lambda +$$

$$+ 2\,\frac{4\lambda - 11}{\mu - 6} = 3\lambda - 2 + \frac{4\lambda - 11}{\mu - 6}$$

(ii) $\mu = 6\ ,\ \lambda \neq \frac{11}{4}$:

ingen lösning

(pivotelement i sista kolonnen)

(iii) $\mu = 6,\ \lambda = \frac{11}{4}$: oändligt många lösningar

fri variabel : $x_4 = t$

$$x_3 = 4 - t$$

$$x_2 = 6 - 2\cdot\frac{11}{4_2} - 3x_4 - x_3 =$$

$$= \frac{1}{2} - 3t - 4 + t = -\frac{7}{2} - 2t$$

$$x_1 = \frac{11}{4} - x_4 - x_2 = \frac{11}{4} - t + \frac{7}{2} + 2t =$$

$$= \frac{25}{4} + t$$

3. v.l. $(A+B)A^{-1}(A-B) =$ 4

$= (AA^{-1})A - ((AA^{-1})B + B(A^{-1}A)) - BA^{-1}B =$

$= A - \cancel{B} + \cancel{B} - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B$

h.l. $= (A-B)A^{-1}(A+B) =$

$= ((AA^{-1})A) + (AA^{-1})B - B(A^{-1}A) - BA^{-1}B =$

$= A + \cancel{B} - \cancel{B} - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B =$ v.l.

(vi har använt den distributiva lagen och den associativa lagen)

4. Kalla de två rötterna för α och $i\alpha$; då har vi

$$\alpha^4 - 3\alpha^2 - 6\alpha - 2 = 0$$

$$\alpha^4 + 3\alpha^2 - 6\alpha i - 2 = 0 \quad (\text{ty } i^4 = 1,\ i^2 = -1)$$

Subtrahera:

$$-6\alpha^2 - 6\alpha(1-i) = 0$$

$$\alpha(\alpha + (1-i)) = 0$$

$\alpha = 0$ är uppenbarligen ingen rot eventuellt kan $\alpha = -1+i$ vara det

$$i(-1+i) = -1-i$$

Om $-1 \pm i$ är rötter så måste v.l. vara delbart med $(z-(-1+i))(z-(-1-i)) =$

$$= z^2 + 2z + 2$$

Polynomdivision:

$$z^4 - 3z^2 - 6z - 2 \ / \ z^2+2z+2 = z^2 - 2z - 1$$

$$\underline{z^4 + 2z^3 + 2z^2}$$

$$-2z^3 - 5z^2 - 6z - 2 \qquad \Rightarrow -1 \pm i \text{ är verkligen rötter}$$

$$\underline{-2z^3 - 4z^2 - 4z}$$

$$-z^2 - 2z - 2$$

$$\underline{-z^2 - 2z - 2}$$

$$0$$

Övriga två rötter:

sätt $z^2-2z-1=0$

$$(z-1)^2-1-1=0$$

$$z_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$$

---

5. Det som krävs är alltså att hitta λ s.a. $\exists$ icke-trivial (icke-noll) lösning till

$$\alpha_1\begin{pmatrix}\lambda+1\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda+\frac{1}{2}\\ \vdots\\ \lambda\end{pmatrix}+\dots+\alpha_n\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda+\frac{1}{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

Gausselimination ger:

$$\begin{pmatrix}\lambda+1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda\\ \lambda & \lambda+\frac{1}{2} & \lambda & \dots & \lambda & \lambda\\ \lambda & \lambda & \lambda+\frac{1}{3} & \dots & \lambda & \lambda\\ & & & \dots & & \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda+\frac{1}{n}\end{pmatrix}\begin{matrix}+\\ +\\ +\\ (-1)\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{n}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & -\frac{1}{n}\\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n}\\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda+\frac{1}{n}\end{pmatrix}\begin{matrix}(-\lambda)\\ (-2\lambda)\\ (-3\lambda)\\ \dots\\ (-(n-1)\lambda)\\ + \; + \; +\end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{n}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & -\frac{1}{n}\\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_n\end{pmatrix},$$

där

$$\Lambda_n = \lambda + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\lambda + \frac{2}{n}\lambda + \dots + \frac{n-1}{n}\lambda =$$

$$= \lambda\left(1 + \frac{1+2+\dots+(n-1)}{n}\right) + \frac{1}{n} =$$

$$= \lambda \cdot \frac{1+2+\dots+(n-1)+n}{n} + \frac{1}{n}$$

För existens av icke-trivial lösning är det nödvändigt och tillräckligt att $\Lambda_n = 0$; det ger:

$$\lambda \cdot \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\cancel{n}} = -\frac{1}{\cancel{n}}$$

$$\lambda = -\frac{2}{n(n+1)}$$

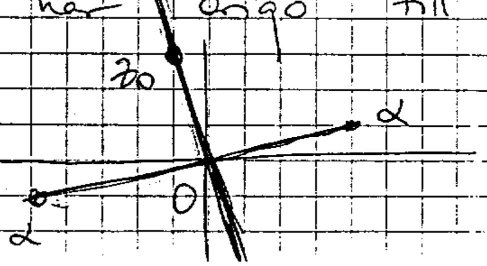
---

6. (a) Antag att z_0 är en rot till ekvationen; då gäller

$$|z_0 - \alpha|^n = \underbrace{|-e^{i\theta}|}_{=1} \cdot |z_0 + \alpha|^n$$

$$\Leftrightarrow \quad |z_0 - \alpha| = |z_0 + \alpha| ,$$

d.v.s. z_0 befinner sig på samma avstånd från α som från $-\alpha$. Det betyder att z_0 ligger på mittpunktsnormalen till sträckan med ändpunkter α och $-\alpha$ (som har origo till mittpunkt).



(b) $\left(\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right)^n = -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$ (för $z \neq -\alpha$)

$\Leftrightarrow \quad w^n = e^{i(\theta+\pi)}$, där $w = \frac{z-\alpha}{z+\alpha}$

(för $z \neq -\alpha$)

$$w_k = e^{i[(\theta+\pi)+2k\pi]/n} = e^{i(\theta+(2k+1)\pi)/n}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$w = \frac{z-\alpha}{z+\alpha}$; lös ut z :

$$wz + w\alpha = z - \alpha$$

$$z = \alpha \frac{1+w}{1-w} \qquad (w \neq 1)$$

Rötterna: $z_k = \alpha \frac{1 - e^{i(\theta+(2k+1)\pi)/n}}{1 + e^{i(\theta+(2k+1)\pi)/n}}$, $k = 0, \ldots, n-1$

$z = -\alpha$: $\quad (-2\alpha)^n + e^{i\theta} \cdot 0 = 0$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

$\Rightarrow$ ekvationen blir $z^n(1+e^{i\theta}) = 0$

$\theta = \pi + 2k\pi$: alla z rötter

$\theta \neq \pi + 2k\pi$: $z = 0$

$w = 1$ leder också till $\alpha = 0$.