Linjär Algebra och Geometri F1

TMA660

TENTAKIT

Datum	Tenta	Lösning	Svar
1999-10-23	x	x	
2000-01-14	x	x	
2001-10-27	x	x	
2002-01-17	x	x	
2002-08-21	x	x	
2002-10-26	x		x
2003-01-16	x		
2003-08-20	x	x	
2003-10-25	x	x	
2004-01-15	x	x	
2004-08-18	x	x	
2004-10-23	x	x	
2005-01-13			
2005-08-17	x	x	
2005-10-22	x		
2006-01-12	x		
2006-08-23	x		

20 oktober 2006

TMA660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri F

Datum: 2006-08-23, kl. 14.00 - 18.00.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: , tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.

OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1.(a) Lös för varje värde på parametern λ det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ (2-\lambda)x_1 + x_2 - 4x_3 = -\lambda \end{cases} . \quad (7p)$$

(b) För $\lambda = 0$, skriv upp det ekvationssystem som ger en lösning till systemet ovan i minsta kvadratmening. (3p)

2.(a) Finn skärningslinjen l mellan planen $x - 2y - z = 7$ och $x - 2y = 3$. (2p)

(b) Bestäm ekvationen för den linje i planet $x + 2y - z = 2$, som skär l under rät vinkel. (6p)

3. Lös ekvationen

$$z^4 + z^2 + 1 = 0. \qquad (7p)$$

4. Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definieras genom

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Bestäm matrisen för T och beräkna dess determinant. (7p) (Korrekt löst uppgift för $n = 4$ ger 4p.)

5. De tre punkterna O, A_1, A_2 i planet är olika och motsvaras av de komplexa talen $0,\ z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$.

(a) Beräkna φ, där φ är den geometriska vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{OA_1}$ och $\overrightarrow{OA_2}$, i termer av x_1, x_2, y_1, y_2. (2p)

(b) Om B_1, B_2 är punkterna som motsvaras av $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$, och ψ är den geometriska vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{OB_1}$ och $\overrightarrow{OB_2}$, visa att $\varphi = \psi$. (5p)

6. Använd Cauchy-Schwarz olikhet för att bevisa olikheten mellan det aritmetiska och det kvadratiska medelvärdet: givet n positiva tal, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gäller att

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

När uppnås likhet? (7p)

7. Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz olikhet. (6p)

8. Formulera och bevisa satsen om att icke-reella nollställen till polynom med reella koefficienter förekommer i komplexkonjugerade par. (6p) Visa att polynom med reella koefficienter kan faktoriseras i reella första- och andragradsfaktorer, där andragradsfaktorerna saknar reella nollställen. (2p)

/JM

TMA660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri F

Datum: 2006-01-12, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Marcus Better, tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Lös för varje värde på parametern λ det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases} . \quad (6p)$$

2. Givet är de tre räta linjerna

$$l_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad l_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$l_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad s, t, u \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestäm punkter A på l_1, B på l_2 och C på l_3 så att A, B, C ligger på en rät linje och B är mittpunkt på sträckan AC. (3p)

(b) Beräkna arean av triangeln $\triangle ACD$, där D är B:s ortogonalprojektion på linjen l_1. (5p)

3. Ekvationen

$$z^6 + 3z^4 - 3z^2 + 4 = 0$$

har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (7p)

4. Visa att punkterna $(-2, 12), (-1, 5), (0, 3), (1, 2), (2, 4)$ ej ligger på grafen till någon andragradsfunktion $y = ax^2 + bx + c$. Bestäm den bästa anpassningen i minsta kvadratmening av en sådan funktion till punkterna ovan. (6p)

5. Bestäm alla λ för vilka vektorerna $u_1 = (\lambda+1, \lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$, $u_2 = (\lambda, \lambda+\frac{1}{2}, \lambda, \ldots, \lambda)$, $u_3 = (\lambda, \lambda, \lambda + \frac{1}{3}, \ldots, \lambda)$, $\ldots$, $u_n = (\lambda, \lambda, \lambda, \ldots, \lambda + \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^n$ är linjärt beroende. (5p) För alla övriga λ, uttryck $(1, 1, \ldots, 1)$ i basen $u_1, u_2, \ldots, u_n$. (4p)

6. Låt $z = a + iy$, där $a \neq 0$ är ett fixt reellt tal. Visa att det finns en cirkel med medelpunkt i $\frac{1}{2a}$ sådan att $\frac{1}{z}$ ligger på den cirkeln för alla $y \in \mathbb{R}$ och bestäm cirkelns radie. (8p)

7. Redogör för den geometriska tolkningen av skalär trippelprodukt. (6p)

8. Formulera och bevisa satsen om att icke-reella nollställen till polynom med reella koefficienter förekommer i komplexkonjugerade par. (6p) Visa att polynom med reella koefficienter kan faktoriseras i reella första- och andragradsfaktorer, där andragradsfaktorerna saknar reella nollställen. (2p)

/JM

TMA660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri F

Datum: 2005-10-22, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Milena Anguelova, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Lös för varje värde på parametern λ det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 15x_4 = 31 \\ x_1 + 2x_2 + (\lambda+3)x_4 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + (9-\lambda)x_3 + 9x_4 = 13-\lambda \end{cases} . \quad (7p)$$

2. Givet är de räta linjerna

$$l_1 : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad l_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

samt punkten $P(2, -2, 1)$. Bestäm ekvationen för den räta linje l som är vinkelrät mot både l_1 och l_2 och går genom P:s spegelbild i l_1. (7p)

3. Ekvationen

$$2z^3 + (2-i)z^2 + (-2+5i)z + (3+i) = 0$$

har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (7p)

4. Givet är vektorerna $e_1 = (1, 2, -1, -2)$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)$, $e_4 = (1, 3, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$.

(a) Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} . \quad (4p)$$

(b) Visa att e_1, e_2, e_3, e_4 är linjärt oberoende (och därmed bildar bas i $\mathbb{R}^4$). (2p)

(c) Visa att vektorn $u = (7, 14, -1, 1)$ har koordinaterna $(-2, 3, 0, 3)_e$ i basen e_1, e_2, e_3, e_4. (2p)

5. Givet är matrisen A och vektorn b, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att b inte tillhör A:s kolonnrum $V(A) = \mathrm{Col}\,A$. (2p)
(b) Finn en approximativ lösning till ekvationssystemet $Ax = b$ med hjälp av minsta kvadratmetoden. (3p)
(c) Använd den lösningen för att bestämma b:s ortogonalprojektion på A:s kolonnrum. (3p)

6. Låt

$$V(t_1, t_2, \ldots, t_n, t) = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{n-1} & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^{n-1} & t_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^{n-1} & t_n^n \\ 1 & t & t^2 & \ldots & t^{n-1} & t^n \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t_i \neq t_j \text{ för } i \neq j.$$

(a) Visa att $V(t_1, t_2, \ldots, t_n, t)$ är ett polynom av t, $P = P(t)$. (2p)
(b) Bestäm P:s nollställen. (3p)
(c) Beräkna $V(t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1})$. (4p)

7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektorprodukt (kryssprodukt), inkl. hjälpsats. (6p)

8. Visa att en kvadratisk matris är inverterbar om och endast om dess determinant är skild från noll. (8p)

/JM

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa
Datum: 2005–08–17 kl. 14.00–18.00
Telefonvakt: Marcus Warfheimer , tel. 0762-721860

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.
Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.
Betygsgränser: 24 - 35 p. ger betyget 3, 36 - 47 p. ger betyget 4 och 48 eller mer betyget 5.
Lösningar anslås på Matematiskt Centrum första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Rättningsprotokoll anslås på Matematiskt Centrum ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Bestäm skärningslinjen mellan planen $x+2y+2z=5$ och $x-y+z=2$. (4p)
   (b) Lös matrisekvationen $AXB=C$ där (5p)

$$A=\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\quad \text{och}\quad C=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$$

2. Bestäm (på formen $a+bi$) rötterna till ekvationen (7p)

$$(1+i)z^2-(4+8i)z+1+21i=0.$$

3. För vilka reella tal x är matrisen A inte inverterbar om (8p)

$$A=\begin{bmatrix}x&0&1&2\\3&4&5&6\\6&5&4&3\\2&1&0&x\end{bmatrix}$$

Bestäm i dessa/detta fall en bas för nollrummet till A.

4. Låt $A=[a_{ik}]$ vara en $n\times n$-matris sådan att (8p)

$$a_{ik}=k \text{ för } i\le k \text{ och } a_{ik}=0 \text{ för } i>k.$$

   (a) Bestäm inversen till A för $n=5$.
   (b) Ange inversen till A för allmänt $n\ge 2$ (endast svar).

5. Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden det plan $z=ax+by+c$ som är bäst anpassat till punkterna $(1,2,3)$, $(-1,0,1)$, $(1,1,1)$ och $(1,0,2)$. (7p)

6. Härled en formel för (kortaste) avståndet i $\mathbb{R}^3$ mellan (de ickeparallella) linjerna (7p)

$$l_1:\ \mathbf{r}=\mathbf{a}+s\mathbf{v} \quad \text{och} \quad l_2:\ \mathbf{r}=\mathbf{b}+t\mathbf{u}$$

(u och v ej parallella).

7. Antag att $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning. (7p)
   (a) Definiera begreppet linjär avbildning.
   (b) Visa att det finns en $m\times n$ matris A sådan att $T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$.
   (c) Ange standardmatrisen för $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $F(x_1,x_2)=(x_1+x_2,-x_1,2x_1-3x_2)$.

8. Definiera begreppet matrisprodukt AB samt formulera och bevisa en sats om transponering av matrisprodukt $(AB)^t$. (7p)

Lycka till!
TG

Lösningar till "Linjär algebra och geometri", F1, TMA660
17/8, 2005

1. a) En riktningsvektor för skärningslinje är $\vec{v}=(1,2,2)\times(1,-1,1)=$

$$=\begin{vmatrix}\vec{e}_x&1&1\\\vec{e}_y&2&-1\\\vec{e}_z&2&1\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}2&-1\\2&1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}\right)=$$

$$=(4,1,-3).$$

En gemensam punkt på planen (och därmed en punkt på linjen) är t. ex. $\vec{a}=(3,1,0)$;

Svar

$$l:\ \vec{r}=(3,1,0)+t(4,1,-3)\qquad t\in\mathbb{R}.$$

eller

$$\begin{cases}x=3+4t\\y=1+t\\z=-3t\end{cases}$$

b) $X=A^{-1}CB^{-1}$ (om A och B är inverterbara!)

$\det A=6-4=2$, $\det B=-1$ så

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-4\\-1&3\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}\quad \text{och}$$

$$X=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-4\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&-6\\-3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}12&6\\-8&3\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}-6&3\\4&-3/2\end{bmatrix}}$$

(svar)

$(1+i)z^2-(4+8i)z+1+21i=0$

$\frac{4+8i}{1+i}=6+2i$ och $\frac{1+21i}{1+i}=11+10i$

Dvs

$z^2-(6+2i)z+11+10i=0$

$(z-(3+i))^2=(3+i)^2-11-10i=-3-4i$

Sätt $x+iy=z-(3+i)$,

$x^2-y^2+i\cdot 2xy=-3-4i$, $|x+iy|^2=|-3-4i|$

Dvs

$$\begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ x^2+y^2=\sqrt{9+16}=5 \\ 2xy=-4 \end{cases}$$

$2x^2=2$, $x^2=1$, $x=\pm 1$

$2y^2=8$, $y^2=4$, $y=\pm 2$

& $x\cdot y<0$.

Dvs $x+iy=1-2i$ eller $-1+2i$

Svar: $z_1=3+i+1-2i=\underline{4-i}$, $z_2=3+i-1+2i=\underline{2+3i}$

---

3. A är inte inverterbar precis då $\det A=0$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= 9\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 9(x+1)\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9(x+1)(-x-1) = -9(x+1)^2$$

$=0$ om. m. $\underline{x=-1}$

I detta fall är

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ \dots \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alltså ges nollrummet (lösningarna till $A\vec{x}=\vec{0}$) av

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

, sätt $x_3=s$, $x_4=t$.

Dvs

$$\begin{cases} x_1 = s+2t \\ x_2 = -2s-3t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}, \quad s,t\in\mathbb{R}.$$

Svar: En bas för nollrummet är $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\1\end{bmatrix}$.

---

4 a)

$$[A\,|\,E]=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

o.s.v.

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

dividera rad i med i

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right] = [E\,|\,A^{-1}]$$

b) $A^{-1}=[\quad]$ har element $b_{ik}=\begin{cases} 0 & \text{om } i>k \\ 1/k & \text{om } i=k \\ -1/k & \text{om } i=k-1 \\ 0 & \text{om } i<k-1 \end{cases}$

... söker en "bästa" lösning till

$$\begin{cases} a + 2b + c = 3 \\ -a + c = 1 \\ a + b + c = 1 \\ a + c = 2 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Vi finner minsta kvadrat-lösningen ~~genom~~ att lösa normalekvationen $A^t A \vec{x} = A^t \vec{b}$.

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^t \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$$[A^t A \mid A^t \vec{b}] = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & -24 & -30 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -24 & -28 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Dvs $\vec{x} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Svar: Det "bästa" anpassade planet är

$$z = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{5}{4} \quad \text{eller}$$

$$x + 2y - 4z + 5 = 0.$$

6. Vi bildar $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{u}$ som är vinkelrät mot båda linjerna.

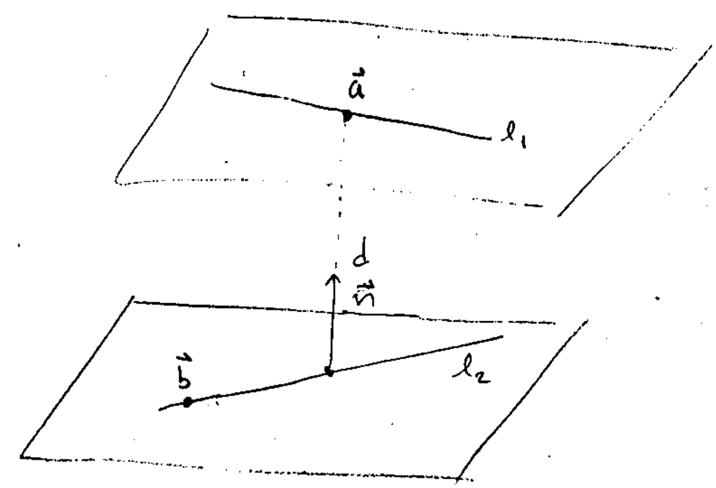
Lägg två parallella plan genom linjerna med ~~gemen~~ samma normalvektor $\vec{n}$.

Kortaste avståndet mellan linjerna är då lika med avståndet mellan (de parallella) planen, som kan fås som avståndet från punkt $\vec{b}$ på linje l_2 till planet genom $\vec{a}$ (i l_1).

Detta avstånd ges av

$$d = \left| \frac{\vec{n} \cdot (\vec{b} - \vec{a})}{|\vec{n}|} \right|$$

<u>Svar</u>: $d = \left| \frac{(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{v} \times \vec{u})}{|\vec{v} \times \vec{u}|} \right|$



MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa
Datum: 2004–10–23 kl. 14.00–18.00
Telefonvakt: Milena Anguelova, tel. 0739779268

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.
Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.
Betygsgränser: 24 - 35 p. ger betyget 3, 36 - 47 p. ger betyget 4 och 48 eller mer betyget 5.
Lösningar anslås på Matematiskt Centrum första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Rättningsprotokoll anslås på Matematiskt Centrum ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. För deluppgifterna a) - c) nedan skall *endast svar* anges.

   (a) Bestäm x_1 i lösningen till ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

   (b) Bestäm rötterna till andragradsekvationen (4p)

$$z^2 - (2+2i)z + 1 + 2i = 0$$

   (c) Bestäm en bas för nollrummet och dimensionen av kolonnrummet för matrisen (4p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ -4 & -10 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

2. En ljusstråle går genom punkten $(-1, 1, -2)$ i riktningen $(1, 0, 1)$ för att sedan reflekteras i planet $x + y - 2z = 3$. (7p)
   Bestäm ekvationen för den reflekterade strålen.

3. För vilka par av tal (a, b) har ekvationssystemet (7p)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ ax + by - 3z = 3 \\ 2x + 4y + (b+8)z = a - 2 \end{cases}$$

   oändligt många lösningar?

4. Lös matrisekvationen $AXB = C$, där (7p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ och } C = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \\ 6 & 8 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$$

Var god vänd!

5. Anpassa med minsta kvadratmetoden ett andragradspolynom $y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ till datapunkterna (7p)

t_i	y_i
-1	2.25
0	-0.25
1	0.75
2	0.25

6. På en cirkel med centrum O, låt P, Q och R vara tre olika punkter sådana att sträckan PQ utgör en diameter (dvs passerar genom cirkelns centrum). Visa med hjälp av *skalärprodukten* att vinkeln mellan PR och QR är rät. (7p)

7. Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz olikhet i $\mathbb{R}^n$. (7p)

8. (a) Redogör kortfattat för begreppet *elementär matris.* (7p)
   (b) Bevisa att en kvadratisk $n \times n$ matris A är inverterbar om och endast om den är radekvivalent med identitetsmatrisen I_n.

Lycka till!
TG

Lösningar: Linjär Algebra och Geometri, F
TMA 660, 2004-10-23.

1. a) $x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) $(z-(1+i))^2 = -1$, $z_{1,2} = 1+i \pm i = 1,\ 1+2i$

c) En bas för nollrummet är $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

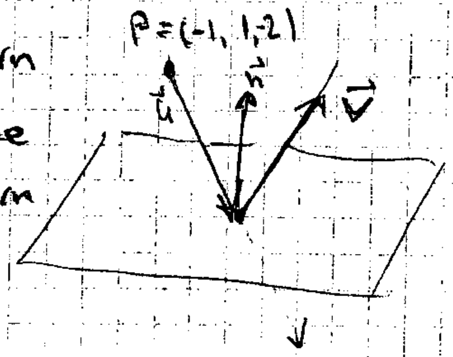
$\dim(\mathrm{Col}(A)) = 2$

2. Infallande ljusstråle ℓ: $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1 \\ z = -2+t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

skär planet π: $x+y-2z=3$ då

$-1+t+1-2(-2+t) = 3$, $\underline{\underline{t=1}}$

Dvs skärningspunkten $P_0 = (0,1,-1)$.



$\vec{u} = (1,0,1)$ är riktn.vektorn för ℓ och den reflekterade strålen har riktningsvektorn

$\vec{v} = \vec{u} - 2\vec{u}_n$

där $\vec{u}_n = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$ är projektionen av $\vec{u}$ på normalen $\vec{n} = (1,1,-2)$.

Dvs $\vec{u}_n = \frac{(1,0,1)\cdot(1,1,-2)}{1+1+4}\vec{n} = -\frac{1}{6}\vec{n}$ och $\vec{v} = \vec{u} + \frac{1}{3}\vec{n}$

Dvs
$$\vec{v} = \frac{1}{3}\left((3,0,3) + (1,1,-2)\right) = \frac{1}{3}(4,1,1).$$

Svar: De reflekterade strål har ekv.

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ ax + by - 3z = 3 \\ 2x + 4y + (b+8)z = a-2 \end{cases}$

Utökad matris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ a & b & -3 & 3 \\ 2 & 4 & b+8 & a-2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & b-2a & -3a-3 & 3 \\ 0 & 0 & b+2 & a-2 \end{bmatrix}$$

Vi har fria variabler bara då $b-2a=0$ eller $b+2=0$

1) $b=2a$ ger $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3(1+a) & 3 \\ 0 & 0 & 2(1+a) & a-2 \end{bmatrix} \cdot -\frac{1}{3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

sista raden ger $0 = a$ (annars inga lösningar)

I detta fall $(a=b=0)$ är y en fri variabel och vi har ∞ många lösn.

2) $b=-2$ ger $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2-2a & -3(1+a) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$ sista raden ger $a-2=0$; $a=2$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ och z är en fri variabel

Svar: Då $(a,b) = (0,0)$ eller $(2,-2)$ finns ∞ många lösn.

4. $AXB = C$, $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$$B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = CB^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \\ 6 & 8 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

utökad matris:

$$[A \; CB^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar: $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Med $\vec{t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2.25 \\ -0.25 \\ 0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix}$ så är

designmatrisen

$$A = \text{"}[\vec{t}^2 \; \vec{t} \; 1]\text{"} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi löser ekv. $A\vec{x} = \vec{y}$

enl. minsta kvadratmetoden!

Normalekvationen är $A^T A \vec{x} = A^T \vec{y}$,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

och

$$A^T \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.25 \\ -0.25 \\ 0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Utökad matris är

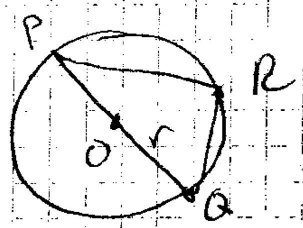
$$\begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 & -5 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \\ 6 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & -10 & 10 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -20 & -10 \end{bmatrix} -\tfrac{1}{20} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> Det polynom som är bäst anpassat är $p(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$.

6.



$$\vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP}$$
$$\vec{QR} = \vec{OR} - \vec{OQ}$$

<u>OBS</u>: $|\vec{OP}| = |\vec{OQ}| = |\vec{OR}| = r$, (radien)

& $\vec{OQ} = -\vec{OP}$

Dvs $\vec{PR} \cdot \vec{QR} = (\vec{OR} - \vec{OP}) \cdot (\vec{OR} - \vec{OQ}) =$

$$= \vec{OR} \cdot \vec{OR} - \vec{OP} \cdot \vec{OR} - \vec{OR} \cdot \vec{OQ} + \vec{OP} \cdot \vec{OQ}$$

$$= r^2 - \vec{OR} \cdot (\underbrace{\vec{OP} + \vec{OQ}}_{=\vec{0}}) + r \cdot r \cos(\pi)$$

vinkeln mellan $\vec{OP}$ & $\vec{OQ}$

$$= r^2 - 0 - r^2 = 0$$

Alltså är $\vec{PR} \perp \vec{QR}$ dvs vinkeln mellan PR och QR är rät.

MATEMATIK **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2004–08–18 kl. 14.15–18.15
Tentamen Telefonvakt: Christoffer Cromvik, tel. 0740 459022

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1. Bestäm ekvationen (på normalform) för planet som innehåller punkterna (6p)

$$P_1 = (0,1,3), \quad P_2 = (-1,3,1) \text{ och } P_3 = (2,-1,3).$$

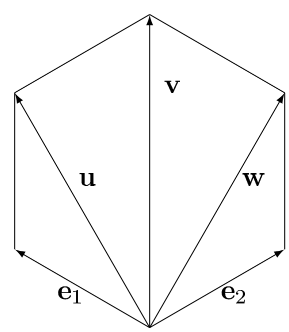
Beräkna sedan det avståndet från punkten $P = (2,1,-3)$ till detta plan.

2. För deluppgifterna a) - d) nedan skall *endast svar* anges.

(a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 4x - 3y + 2z &= 1 \\ x + 6y + 5z &= 7 \end{cases}$$

(b) I den regelbundna sexhörningen i figuren nedan bildar vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ en bas i planet. Ange koordinaterna för vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i denna bas. (3p)



(c) Andragradspolynomet (3p)

$$p(z) = z^2 + (1+2i)z - 3 + 11i$$

har nollstället $\alpha = 2 - 3i$. Bestäm polynomets andra nollställe.

(d) Beräkna längden och argumentet för det komplexa talet $\dfrac{1+i}{-\sqrt{3}+i}$. (3p)

3. Bestäm $V(A)$ (värderummet) och $N(A)$ (nollrummet) för matrisen (7p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Låt $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sådan att (7p)

$$\mathbf{e}_1 = T(\mathbf{e}_2) - T(\mathbf{e}_3), \ \mathbf{e}_2 = T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_3), \ \mathbf{e}_3 = T(\mathbf{e}_1) - T(\mathbf{e}_2).$$

Avgör också om T är volymbevarande.

Var god vänd!

5. För vilka *symmetriska* 3×3 -matriser X gäller att (7p)

$$AX = BX$$

om

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} ?$$

6. Visa att (7p)

$$-\sqrt{n} \leq x_1 + x_2 + \ \dots \ x_n \leq \sqrt{n}$$

om $x_1^2 + x_2^2 + \ \dots \ + x_n^2 = 1$.
För vilka $x_1, \ x_2, \ \dots \ x_n$ gäller likhet i den högra olikheten?
Ledning: För vektorer i $\mathbb{R}^n$ gäller Cauchy-Schwarz olikhet: $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$

7. Låt **u** och **v** vara två vektorer i rummet. (7p)

(a) Beskriv i en figur projektionen av **u** på **v** och ange en formel för denna.

(b) I en högerorienterad ON-bas för rummet så gäller att $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$.

i. Skriv upp en formel (m.h.a. de givna koordinaterna) för skalärprodukten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

ii. För beräkning av kryssprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ finns en något mer komplicerad formel,

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2, \dots, \dots)$$

Härled den fullständiga formeln utgående från räknelagarna för vektorprodukt.

8. (a) Beskriv hur determinanten för en kvadratisk matris A definieras om (7p)

i. A är en 2×2-matris,

ii. A är en 3×3-matris,

iii. A är en $n \times n$-matris.

(b) Visa att en kvadratisk matris A är inverterbar om och endast om $det A \neq 0$.

Lycka till!
TG

T.G. 040818 TMA660 1)

Tentamen i Linjär Algebra & Geometri, F1.

1. $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-1,3,1)-(0,1,3) = (-1,2,-2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = (2,-1,3)-(0,1,3) = (2,-2,0) = 2(1,-1,0)$

En normal till planet är

$$\vec{n} = (-1,2,-2)\times(1,-1,0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

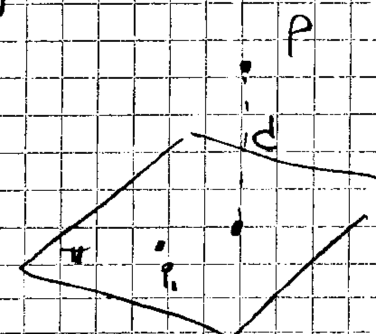
$$= (-2,-2,-1) = -(2,2,1)$$

Ekvationen för det sökta planet ges av

$$\vec{n}\cdot((x,y,z)-(0,1,3)) = 0$$

$$2x+2(y-1)+(z-3) = 0$$

$$\underline{\underline{2x+2y+z = 5}}$$



$\overrightarrow{P_1P} = (2,1,-3)-(0,1,3)$

$= (2,0,-6)$

Avståndet

$$d = \left|\overrightarrow{P_1P}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{(2,0,-6)\cdot(-2,-2,-1)}{\sqrt{4+4+1}} =$$

$$= \underline{\frac{2}{3}}$$

2. a) **Svar:**

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b) **Svar:**

$$\vec{u} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (2,1)_{\underline{e}}$$

$$\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = (2,2)_{\underline{e}}$$

$$\vec{w} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = (1,2)_{\underline{e}}$$

där $\underline{e}$ är base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

c) **Svar:**

Det andra nollstället är

$\beta = -3 + i$

(polynomdivision ger $p(z) = (z-2+3i)(z+3-i)$)

d) **Svar:**

$$\left|\frac{1+i}{-\sqrt{3}+i}\right| = \frac{|1+i|}{|-\sqrt{3}+i|} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$\arg\left(\frac{1+i}{-\sqrt{3}+i}\right) = \arg(1+i) - \arg(-\sqrt{3}+i)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{-7\pi}{12}}}$$

3.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 & \vec{a}_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} (-1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} (-4) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} (-1) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \end{array}$$

pivotkolonnerna i A är nr 1, 2 och 4

som alltså är linjärt oberoende!

$V(A) = \{ A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4 + x_5\vec{a}_5 : \vec{x} \in \mathbb{R}$

$= \mathbb{R}^3$ eftersom $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

$N(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^5 : A\vec{x} = \vec{0} \}$

$$A\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{cases} x_1 + 6x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = s$ och $x_5 = 3t$ är fria variabler.

$x_4 = 5t$, $x_2 = s + 5t - 6t = s - t$, $x_1 = -18t$

Dvs:

$$N(A): \vec{x} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -18 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

4. Eftersom T är linjär så är

$$\vec{e}_1 = T(\vec{e}_2) - T(\vec{e}_3) = T(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = T\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}_e$$

$$\vec{e}_2 = T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_3) = T(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_e$$

$$\vec{e}_3 = T(\vec{e}_1) - T(\vec{e}_2) = T(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}_e$$

Om A är matrisen för T så finner vi

$$\underset{\vec{e}_1 \;\; \vec{e}_2 \;\; \vec{e}_3}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}} = A\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}}_{=B} \quad \text{Dvs } \underline{\underline{A = B^{-1}}}$$

$$[B \mid E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&-1&0&1&0\\-1&1&0&0&0&1\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-2&-1&1&1\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-2&0&2&0\\0&2&2&2&0&0\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&-1&3&1\\0&2&0&3&-1&-1\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right]$$

$$\text{Dvs} \quad A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&3&1\\3&-1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\det A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1&3&1\\3&-1&-1\\-1&1&1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1&3&1\\0&8&2\\0&-2&0\end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}8&2\\-2&0\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\,4 = -2. \quad \therefore T \text{ är ej volymbevarande.}$$

5. $AX = BX$, $X = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ 3x3 matr.

$(A-B)X = 0$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \ \ -1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

För varje kolumn i $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$

gäller att $\begin{cases} x_{1i} + 2x_{3i} = 0 \\ x_{2i} + 2x_{3i} = 0 \end{cases}$

$x_{3i} = -t_i$ är en fri variabel ! $i = 1, 2, 3$

$x_{2i} = 2t_i$

$x_{1i} = 2t_i$

Dvs $X = \begin{bmatrix} 2t_1 & 2t_2 & 2t_3 \\ 2t_1 & 2t_2 & 2t_3 \\ -t_1 & -t_2 & -t_3 \end{bmatrix}$

Eftersom $X^t = X$ så är

$2t_1 = 2t_2$, $-t_1 = 2t_3$, $-t_2 = 2t_3$

Dvs $t_1 = t_2 = -2t_3$ med $t_3 = -t$ så är

$$X = \begin{bmatrix} 4t & 4t & -2t \\ 4t & 4t & -2t \\ -2t & -2t & t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

6. Sätt $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\vec{u} = (1, 1, \ldots, 1)$ (n st. ettor)

Då är $\vec{x} \cdot \vec{u} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

och enligt C-S olikhet är

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = |\vec{x} \cdot \vec{u}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{u}\| =$$

$$= \underbrace{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}}_{=1} \cdot \underbrace{(1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2)^{1/2}}_{=\sqrt{n}}$$

Dvs

$$-\sqrt{n} \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \sqrt{n}$$

om $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$

Likhet i C-S olikhet till höger gäller

om.m. $\vec{x}$ och $\vec{u}$ är lika riktade

dvs om.m. $\vec{x} = t \cdot \vec{u} = (t, \ldots, t)$, $t > 0$

Eftersom $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ så är $n \cdot t^2 = 1$

dvs $t = 1/\sqrt{n}$ och $\vec{X} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)$

MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2004–01–15 kl. 08.45–12.45
Tentamen | Telefonvakt: Niclas Andréasson, tel. 0740 459022

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1. (a) Är de tre vektorerna $(1, 2, -1)$, $(-1, 1, 0)$ och $(1, -3, 1)$ linjärt beroende? (3p)

(b) Vad är vinkeln mellan vektorerna $(2, -1, 1)$ och $(2, 0, 2)$? (3p)

(c) Lös följande ekvationssystem approximativt med minsta kvadratmetoden (4p)

$$\begin{cases} x - y &= 1 \\ x &= 1 \\ y &= 1 \end{cases}$$

2. (a) Lös ekvationen $z^2 - (1+i)z + 5i = 0$. (4p)

(b) Beräkna $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^9$ på formen $a + bi$. (4p)

3. En rät linje går genom punkten $(-1, 3, 4)$ och har riktningsvektorn $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$. Bestäm linjens projektion på planet $3x - y + 2z = -8$. Ange den projicerade linjens ekvation på parameterform. (7p)

4. Lös matrisekvationen $XA = B + 2X$ där (8p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 12 & -2 \\ 6 & 3 & 15 & -4 \end{bmatrix}.$$

5. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av (7p)

$$F(1, 1, -1) = (-1, -2, 1),\ F(1, -1, 1) = (3, 6, -3) \text{ och } F(-1, 1, 0) = (7, 0, 3).$$

Bestäm värderummet för F.
Finns det någon vektor (x, y, z) sådan att $F(x, y, z) = (1, 1, 1)$?

6. Låt A vara en kvadratisk matris vars nollrum är $N(A)$ och kolonnrum $V(A)$. Visa att (6p)

$$V(A) \subseteq N(A) \Leftrightarrow A^2 = 0.$$

7. Formulera och bevisa distributiva lagen för vektorprodukt (inklusive hjälpsatsen). (7p)

8. Definiera begreppen *linjär avbildning* och *standardmatris* till en linjär avbildning. Hur bestämmer man standardmatrisen? Bevisa ditt påstående. (7p)

Lycka till!
TG

Linjär Algebra och Geometri, FI (TMA660), 2004-01-1

1\. a)

$$\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&-3\\-1&0&1\end{vmatrix} \begin{matrix}(-2) & (1)\end{matrix} = \begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&-5\\0&-1&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3&-5\\-1&2\end{vmatrix} = 6-5=1 \neq 0$$

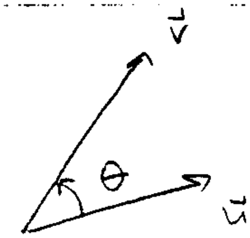
Alltså är kolonnerna $\vec{u}=(1,2,-1)$, $\vec{v}=(-1,1,0)$ och $\vec{w}=(1,-3,1)$ linjärt oberoende.

---

b) sätt $\vec{u}=(2,-1,1)$, $\vec{v}=(2,0,2)$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,-1,1)\cdot(2,0,2)=4-0+2=6$.

& $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta=\sqrt{6}\sqrt{8}\cdot\cos\theta$



vs $\cos\theta=\dfrac{6}{\sqrt{6}\sqrt{8}}=\sqrt{3}/2$ och $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ (30°)

---

c) Lös m.h.a. minsta kvadratmetoden

$$(*) \qquad \underbrace{\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{=A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

multiplicera $(*)$ med A^T från vänster!

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&-1&2\\-1&2&0\end{array}\right] (2)\ (-1) \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&-2&0\\0&3&2\end{array}\right] \left(\tfrac{2}{3}\right) \left(\tfrac{1}{3}\right) \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&0&4/3\\0&1&2/3\end{array}\right]$$

Svar: $\begin{cases}x=4/3\\y=2/3\end{cases}$

2.a) $z^2 - (1+i)z + 5i = 0$

(*) $\left(z - \frac{1}{2}(1+i)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(1+i)\right)^2 - 5i = \frac{i}{2} - 5i = -\frac{9}{4}\cdot 2i$

$= \frac{9}{4}(1-i)^2 \qquad \left((1-i)^2 = -2i\right)$

Dvs $z - \frac{1}{2}(1+i) = \pm\frac{3}{2}(1-i)$, $\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(1+i) + \frac{3}{2}(1-i) = \underline{\underline{2-i}} \\ z_2 = \frac{1}{2}(1+i) - \frac{3}{2}(1-i) = \underline{\underline{-1+2i}} \end{cases}$

<u>Alt.</u> forts från (*):

$\left(z - \frac{1}{2}(1+i)\right)^2 = -\frac{9}{2}i$

sätt $x + iy = z - \frac{1}{2}(1+i)$, då är

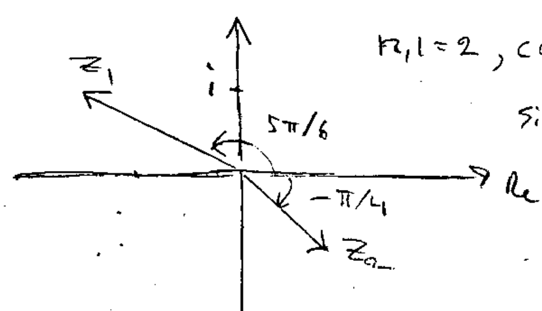
$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -\frac{9}{2} \end{cases}$, $x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$, dvs $2x^2 = \frac{9}{2}$, $x = \pm\frac{3}{2}$

vilket ger $y = \mp\frac{3}{2}$.

Dvs $z - \frac{1}{2}(1+i) = \pm\frac{3}{2}(1-i)$, $\underline{\underline{z_1 = 2-i}}$ och $z_2 = \underline{\underline{-1+2i}}$

2b) $z_1 = -\sqrt{3} + i = 2e^{i5\pi/6}$

$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$



$|z_1| = 2$, $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$|z_2| = \sqrt{2}$ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Alltså är

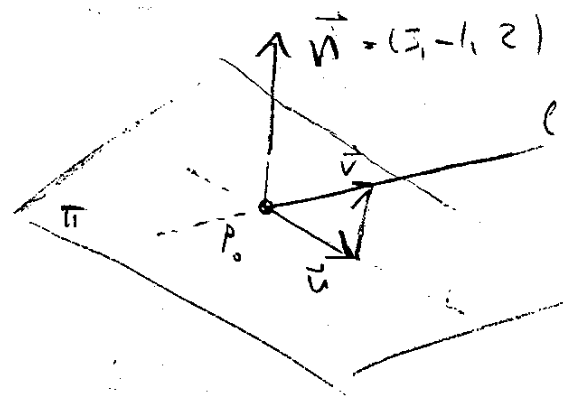
$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^9 = \left(\frac{2e^{i5\pi/6}}{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}}\right)^9 =$

$= (\sqrt{2})^9 \left(e^{i(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4})}\right)^9 = 2^4\cdot\sqrt{2}\; e^{i9\cdot\frac{13\pi}{12}} = 16\sqrt{2}\, e^{i\frac{39\pi}{4}} = \left(\frac{39\pi}{4} = 10\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$= 16\cdot\sqrt{2}\, e^{i(10\pi - \frac{\pi}{4})} = 16\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} = 16\sqrt{2}\,(1-i)/\sqrt{2} = \underline{\underline{16 - 16i}}$

3. $P = (-1, 3, 4)$, $\vec{v} = (1, -1, 3)$.

$\ell : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$, $\pi : 3x - y + 2z = -8$.



ℓ skär π då

$3(-1+t) - (3-t) + 2(4+3t) = -8$

$10t + 2 = -8$, $\underline{\underline{t = -1}}$

dvs ℓ skär π i $P_0 = (-1-1, 3-(-1), 4-3) = (-2, 4, 1)$

Projektionen av $\vec{v}$ på planet π ger den sökta linjens riktningsvektor $\vec{u} = \vec{v}_\pi = \vec{v} - \vec{v}_n$, där

$\vec{v}_n$ = "projektionen av $\vec{v}$ på normalen $\vec{n}$" =

$$= \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{(1,-1,3)\cdot(3,-1,2)}{9+1+4}\vec{n} = \frac{5}{7}(3,-1,2).$$

Dvs $\vec{u} = (1,-1,3) - \frac{5}{7}(3,-1,2) = \frac{1}{7}(-8, -2, 11) = \frac{-1}{7}\underline{\underline{(8, 2, -11)}}$

<u>Svar:</u> $\ell_\pi : \begin{cases} x = -2 + 8t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 - 11t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

4. $XA = B + 2X$, $\quad X(A-2E) = B$

(A) $\quad (A-2E)^T X^T = B^T$, vi bestämmer X^T!

$$A-2E = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Den utökade koefficientmatrisen till (A) är

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 12 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 12 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -12 & -13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 & 10 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 & -10 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 & 10 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \quad \text{(högra delen } = X^T\text{)}$$

Svar $\quad X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$

Alt. $\quad \boxed{X = B(A-2E)^{-1}}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 5 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

(högra delen $= 4(A-2E)^{-1}$)

och

$$X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 12 & -2 \\ 6 & 3 & 15 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 8 & -4 & -4 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 4 & 4 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Låt A vara standardmatrisen för F. Då gäller att

$$A\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}}_{=C}, \quad \text{dvs} \quad \underline{\underline{A = CB^{-1}}}$$

$$[B \,\vdots\, E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

där den högra delen $= 2B^{-1}$.

Dvs

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Värderummet för F är A's kolonnrum!.

Men

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) & (1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 0 & -14 & -14 \\ 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \;\; \uparrow$ Pivotkolonnerna!

Alltså spänns värderummet upp av kolonnerna $(1,2,-1)$ och $(4,1,1)$, $\left((4,1,1) = \frac{1}{2}(8,2,2) \right)$.

Dvs värderummet är planet:

$$\boxed{(x,y,z) = s(1,2,-1) + t(4,1,1), \quad s,t \in \mathbb{R}}$$

En normal ges av

$$\vec{n} = (1,2,-1) \times (4,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (3,-5,-7).$$

Dvs planets ekvation på normalform är

$$\boxed{3x - 5y - 7z = 0}$$

$(1,1,1)$ tillhör inte värderummet eftersom den inte ligger i detta plan: $3\cdot 1 - 5\cdot 1 - 7\cdot 1 = -9 \neq 0$.

6. Antag att $A^2 = O$

Tag ett $\vec{y} \in V(A)$. Då finns $\vec{x}$ så att $\vec{y} = A\vec{x}$

och därmed finner vi att

$$A\vec{y} = A(A\vec{x}) = A^2\vec{x} = O\vec{x} = \vec{0},$$

dvs $\vec{y} \in N(A)$!

(Dvs om $A^2 = O$ så gäller att $V(A) \subseteq N(A)$).

Omvänt, antag att $V(A) \subseteq N(A)$.

Om $A = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n]$ så är förstås $\vec{a}_i \in V(A)$

Men eftersom $V(A) \subseteq N(A)$ så är då $A\vec{a}_i = \vec{0}$.

Vi finner därmed att

$$A^2 = A[\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n] = [A\vec{a}_1\ A\vec{a}_2 \ldots A\vec{a}_n]$$
$$= [\vec{0}\ \vec{0} \ldots \vec{0}] = O.$$

(Dvs om $V(A) \subseteq N(A)$ så följer att $A^2 = O$).

MATEMATIK | Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2003–10–25 kl. 14.15–18.15
Tentamen | Telefonvakt: Alexander Herbertsson, tel. 0740 459022

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1. (a) Bestäm, på parameterform, skärningslinjen mellan planen $x - y + 2z = -2$ och $2x - y + z = 2$. (3p)

(b) Bestäm ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot båda planen i (a) och som innehåller punkten $P_0 = (1, 2, -1)$. (3p)

(c) Bestäm avståndet från punkten $P = (5, 3, 3)$ till planet i (b) ovan. Bestäm dessutom den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{P_0P}$ på samma plan. (3p)

2. Lös andragradsekvationen (6p)

$$(1 + 2i)z^2 + (2 - i)z - 5 + 15i = 0.$$

(Bra att veta: $\sqrt{841} = 29$)

3. Låt (8p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \\ a & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm för alla värden på a dimensionen av kolonnrummet för A.

(b) Bestäm nollrummet i fallet $a = 2$. (Lös ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.)

4 Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden den "bästa" anpassningen av en rät linje till följande punkter i planet, (1, 1.5), (2, 8) och (3, 5.5). Bestäm också medelfelet. (8p)

5. Låt T och F vara två linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ sådana att $T(\mathbf{u})$ är den rätvinkliga projektionen av $\mathbf{u}$ på planet $3x - y + z = 0$ och $F(\mathbf{u})$ den rätvinkliga projektionen av $\mathbf{u}$ på linjen $x = y = -z$. Bestäm standardmatrisen (avbildningsmatrisen) för den sammansatta avbildningen $F \circ T$. (8p)

6. Låt A vara en $m \times n$ matris. Visa att nollrummen för A^TA och A är lika, dvs. visa att, (7p)

$$A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

(7p)

7. (a) Definiera begreppet invers till en matris A.

(b) Visa att om A och B är inverterbara $n \times n$ matriser så är produkten AB också inverterbar.

(c) Visa att om A är inverterbar så är också A^T inverterbar.

8. Visa att om A och B är två $n \times n$ matriser så är (7p)

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Lycka till!
TG

MATEMATIK **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2003-10-25 kl. 14.15-18.15

Tentamen Telefonvakt: Alexander Herbertsson, tel. 0740 459022

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1. (a) Bestäm, på parameterform, skärningslinjen mellan planen $x - y + 2z = -2$ och $2x - y + z = 2$. (3p)

(b) Bestäm ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot båda planen i (a) och som innehåller punkten $P_0 = (1, 2, -1)$. (3p)

(c) Bestäm avståndet från punkten $P = (5, 3, 3)$ till planet i (b) ovan. Bestäm dessutom den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{P_0P}$ på samma plan. (3p)

2. Lös andragradsekvationen (6p)

$$(1 + 2i)z^2 + (2 - i)z - 5 + 15i = 0.$$

(Bra att **veta**: $\sqrt{841} = 29$)

3. Låt (8p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \\ a & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm för alla värden på a dimensionen av kolonnrummet för A.

(b) Bestäm nollrummet i fallet $a = 2$. (Lös ekvationen $Ax = 0$.)

4 Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden den "bästa" anpassningen av en rät linje till följande punkter i planet, (1, 1.5), (2, 8) och (3, 5.5). Bestäm också medelfelet. (8p)

5. Låt T och F vara två linjära avbildningar från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^3$ sådana att $T(\mathbf{u})$ är den rätvinkliga projektionen av $\mathbf{u}$ på planet $3x - y + z = 0$ och $F(\mathbf{u})$ den rätvinkliga projektionen av $\mathbf{u}$ på linjen $x = y = -z$. Bestäm standardmatrisen (avbildningsmatrisen) för den sammansatta avbildningen $F \circ T$. (8p)

6. Låt A vara en $m \times n$ matris. Visa att nollrummen för A^TA och A är lika, dvs. visa att, (7p)

$$A^TA\mathbf{x} = 0 \iff A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

(7p)

7. (a) Definiera begreppet invers till en matris A.

(b) Visa att om A och B är inverterbara $n \times n$ matriser så är produkten AB också inverterbar.

(c) Visa att om A är inverterbar så är också A^T inverterbar.

8. Visa att om A och B är två $n \times n$ matriser så är (7p)

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Lycka till!
TG

Lösningar till Linjär Algebra och Geometri för F1, tma660, 2003-10-25.

1. a) $\begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Dvs $\begin{cases} x - z = 4 \\ y - 3z = 6 \end{cases}$ Sätt $z = t$, $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 6 + 3t \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

b) $\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$ och $\vec{n}_2 = (2, -1, 1)$ är normalerna till plan ovan.

$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ är en normal till det sökta planet.

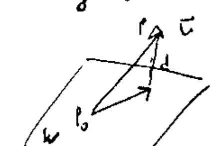
$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1, 3, 1)$$

Ekvationen för planet är $x + 3y + z = d$.

Eftersom $P_0 = (1, 2, -1)$ ligger i planet så är

$d = 1 + 3 \cdot 2 - 1 = 6$ <u>Svar</u> $x + 3y + z = 6$

c) $\vec{u} = \overrightarrow{P_0P} = (5,3,3) - (1,2,-1) = (4,1,4)$



Projektionen av $\vec{u}$ på $\vec{n}$ är

$$\vec{u}_n = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \frac{(4,1,4) \cdot (1,3,1)}{1 + 9 + 1} \vec{n} = \frac{4+3+4}{11} \vec{n} = \vec{n}$$

Alltså är

$$d = |\vec{n}| = \sqrt{11}$$

och projektionen av $\vec{u}$ på planet är

$$\vec{u}_w = \vec{u} - \vec{u}_n = (4,1,4) - (1,3,1) = (3,-2,3)$$

2) $(1+2i)z^2 + (2-i)z - 5 + 15i = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2-i}{1+2i} = \frac{(2-i)(1-2i)}{1+4} = \frac{2-2-i-4i}{5} = -i \\ \frac{-5+15i}{1+2i} = \frac{5(-1+3i)(1-2i)}{1+4} = -1+6+3i+2i = 5+5i \end{array}\right]$$

$$z^2 - iz + 5 + 5i = 0$$

$$(z - \tfrac{i}{2})^2 = -\tfrac{1}{4} - 5 - 5i = -\tfrac{21}{4} - 5i$$

sätt $z - \frac{i}{2} = x + iy$, då är $(z-\frac{i}{2})^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

Dvs $\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{21}{4} \\ 2xy = -5 \end{cases}$, $x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{441}{16} + 5} = \sqrt{\frac{841}{16}} = \frac{29}{4}$.

Dvs $2x^2 = 2$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$ obs $x \cdot y < 0$

$2y^2 = \frac{25}{2}$, $y^2 = \frac{25}{4}$, $y = \pm\frac{5}{2}$

Dvs

$z = \frac{i}{2} \pm (1 - \frac{5}{2}i)$, **Svar** $z_1 = 1 - 4i$, $z_2 = 1 + 3i$

---

3) a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \\ a & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ Dimensionen av kolonnrummet = # pivotkolonner i A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \\ a & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) & (-a) & (1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 2-a & 2-a \\ 0 & 2a-4 & 4-a^2 \\ 0 & -2 & 2+a \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 1/(2-a) \\ 1/(a-2) \\ \end{matrix} \overset{a \neq 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2+a \\ 0 & -2 & 2+a \end{bmatrix} (-1)\ (2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4+a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dvs 1) $a \neq 2$, $a \neq -4$ $\Rightarrow$ $\underline{\dim \mathrm{Col}\, A = 3}$ eftersom # pivotkolonner är 3 i detta fall

2) $a = -4$; $\Rightarrow$ $\underline{\dim \mathrm{Col}\, A = 2}$ eftersom endast de två 1:a kolonnerna i detta fall är pivotkolonner.

3) $a = 2$:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} (-\tfrac{1}{2}) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ dvs $\underline{\underline{\dim \mathrm{Col}\, A = 2}}$

3b) För $a = 2$ så har ekv. $A\bar{x} = \bar{0}$ koef.matris

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ x_3 är en fri var. Sätt $x_3 = t$,

Vi får $x_1 - 2x_3 = 0$, $x_2 - 2x_3 = 0$ Dvs $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

Dvs $\mathrm{Nul}\, A = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ($\dim \mathrm{Nul}\, A = 1$)

---

4. Vi söker en rät linje $y = kx + m$ s.a.

$$\begin{cases} k \cdot 1 + m = 1{,}5 = 3/2 \\ k \cdot 2 + m = 8 \\ k \cdot 3 + m = 5{,}5 = 11/2 \end{cases}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3/2 \\ 8 \\ 11/2 \end{bmatrix}}_{=\bar{b}} \quad (*)$$

Vi finner minsta kvadrat-lösningen genom att multipl. (*) med A^T från vänster: $A^T A \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = A^T \bar{b}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 8 \\ 11/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Vi får utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 34 \\ 6 & 3 & 15 \end{array}\right] (-2) \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} (\frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{3}) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} (-2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ Dvs $\begin{cases} k = 2 \\ m = 1 \end{cases}$ ∴ $y = 2x + 1$ är den "bäst" anpassade linje

Medelfelet är $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{3}(\|\bar{b}\|^2 - \|A[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}]\|^2)}$,

$\|\bar{b}\|^2 = (3/2)^2 + 8^2 + (11/2)^2 = 9/4 + 64 + 121/4 = 65/2 + 64$

$A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$; $\|A[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}]\|^2 = 9 + 25 + 49 = 19 + 64$.

Dvs $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{3}(\frac{65}{2} - 19)} = \sqrt{\frac{27}{3 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \underline{\frac{3}{\sqrt{2}}}$

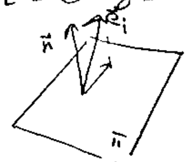
5. Vi bestämmer standardmatriserna för T och F.

$A = [T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2)\ T(\vec{e}_3)]$ standardmatris för T

$B = [F(\vec{e}_1)\ F(\vec{e}_2)\ F(\vec{e}_3)]$ — " — F

där $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ är standardbase för $\mathbb{R}^3$.

Projektionen av $\vec{e}_i$ på planet $\pi: 3x - y + z = 0$ ges av



$T(\vec{e}_i) = \vec{e}_i - \dfrac{\vec{e}_i \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$, där $\vec{n} = [3\ -1\ 1]^T$ är normalen till π.

$|\vec{n}|^2 = 9 + 1 + 1 = 11$.

$T(\vec{e}_1) = [1, 0, 0]^T - \frac{3}{11}[3\ -1\ 1]^T = \frac{1}{11}[11-9\ \ 1\ \ -1]^T = \frac{1}{11}[2\ 1\ -1]^T$

$T(\vec{e}_2) = [0\ 1\ 0]^T - \frac{-1}{11}[3\ -1\ 1]^T = \frac{1}{11}[3\ \ 11-1\ \ -1]^T = \frac{1}{11}[3\ 10\ -1]^T$

$T(\vec{e}_3) = [0\ 0\ 1]^T - \frac{1}{11}[3\ -1\ 1]^T = \frac{1}{11}[-3\ \ 1\ \ 11-1] = \frac{1}{11}[-3\ 1\ 10]^T$

Dvs $A = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$.

Projektionen av $\vec{e}_i$ på linje $\ell: x = y = -z$ ges av

$F(\vec{e}_i) = \dfrac{\vec{e}_i \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$, där $\vec{v} = [1\ 1\ -1]^T$ är en riktningsvektor för ℓ.

$|\vec{v}|^2 = 1 + 1 + 1 = 3$.

Dvs

$F(\vec{e}_1) = \frac{1}{3}\vec{v}$, $F(\vec{e}_2) = \frac{1}{3}\vec{v}$, $F(\vec{e}_3) = \frac{-1}{3}\vec{v}$

och $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Standardmatrisen för den sammansatta avbildningen $F \circ T$ ges av

$$BA = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & -1 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 8 & 12 & -12 \\ 8 & 12 & -12 \\ -8 & -12 & 12 \end{bmatrix} = \frac{4}{33}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Om $\vec{x} \in Nul(A)$, dvs om $A\vec{x} = \vec{0}$ så är därmed $A^T A\vec{x} = \vec{0}$ och $\vec{x} \in Nul(A^T)$.

Om $\vec{x} \in Nul(A^TA)$, dvs $A^TA\vec{x} = \vec{0}$ så gäller att $\vec{y} = A\vec{x} \in Col\,A$, men dessutom att $\vec{0} = A^T\vec{y} = [\vec{a}_1\cdot\vec{y}\ \ \vec{a}_2\cdot\vec{y}\ \cdots\ \vec{a}_n\cdot\vec{y}]^T$, dvs $\vec{a}_i \cdot \vec{y} = 0$

där $\vec{a}_i$ är i:e kolonnen i A.

Alltså är $(\vec{y} = A\vec{x})$

$\|\vec{y}\|^2 = \vec{y}\cdot\vec{y} = (x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n)\cdot\vec{y}$

$= x_1\vec{a}_1\cdot\vec{y} + x_2\vec{a}_2\cdot\vec{y} + \ldots + x_n\vec{a}_n\cdot\vec{y} = 0$!

Vilket visar att $A\vec{x} = \vec{y} \overset{!}{=} 0$

dvs $\vec{x} \in Nul(A)$!

Vi har alltså visat att

1) $\vec{x} \in Nul(A) \Rightarrow \vec{x} \in Nul(A^TA)$

2) $\vec{x} \in Nul(A^TA) \Rightarrow \vec{x} \in Nul(A)$

M.a.o. $Nul(A) = Nul(A^TA)$

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa
Datum: 2003–08–20 kl. 14.15–18.15
Telefonvakt: Hanna Martinsson, tel. 0740 459022

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv dessutom linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1. Bestäm ekvationen för den rätvinkliga projektionen av linjen (8p)

$$x - 3 = y - 4 = z - 5$$

på planet

$$\pi : x - 2y + 2z = 4$$

2. Lös för varje värde på parametern λ ekvationssystemet (8p)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \\ 15x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 = -4 \\ 6x_1 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -1 \\ (\lambda+3)x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 1-\lambda \\ 9x_1 - 5x_2 + 3x_3 + (5-\lambda)x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

Bestäm också dimensionen av nollrummet till koefficientmatrisen.

3. Den linjära avbildningen $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ har matrisen (6p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Parallellepipeden P har ett hörn i origo och de tre närmast angränsande hörnen är $A = (-1, 2, 5)$, $B = (4, -2, 12)$ och $C = (3, 7, 2)$. Låt $Q = T(P)$ vara bilden av P under avbildningen T. Bestäm koordinaterna för fyra av hörnen i Q och volymerna av P och Q.

4 Lös matrisekvationen $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$ där (8p)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 19 & -10 & 15 & 4 \\ 32 & -12 & 24 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Bestäm alla rötter till ekvationen (8p)

$$(z^2 + (2+2i)z + 4i)^3 = 8i.$$

Vär god vänd!

6. Punkterna $A = (1, 5, -2)$, $B = (3, 1, -6)$ och $R = (-1, 3, -10)$ är givna. Låt l vara linjen genom R och mittpunkten på sträckan AB. Vilka punkter C på linjen l har egenskapen att arean av triangeln ABC är lika med 1? (7p)

(7p)

7. (a) Vad menas med att en matris A är inverterbar?

   (b) Visa att om $n \times n$ matriserna A och B är inverterbara så är produkten AB också inverterbar.

   (c) Visa att en matris A är inverterbar om och endast om $detA = 0$.

8. Definiera begreppet linjär avbildning. Visa att en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en-entydig om och endast om ekvationen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ endast har den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Visa också att om så är fallet så gäller att kolonnerna i standardmatrisen för T är linjärt oberoende. (8p)

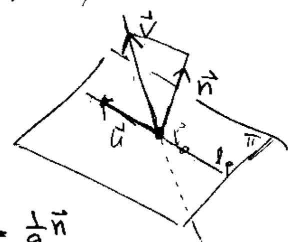
Lycka till!
TG

Lösningar till Linjär Algebra och Geometri F1

1. $\ell : x-3 = y-4 = z-5$, $(x,y,z) = (3,4,5) + t\cdot(1,1,1)$, $t \in \mathbb{R}$

$\pi : x - 2y + 2z = 4$, $\vec{n} = (1,-2,2)$ är en normal till planet

$\vec{v} = (1,1,1)$ är en riktn.vektor för linjen ℓ



Låt $\vec{v}_n$ = proj. av $\vec{v}$ på $\vec{n}$

$$= \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{(1,1,1)\cdot(1,-2,2)}{1^2+(-2)^2+2^2}\vec{n} = \frac{1}{9}\vec{n}$$

Alltså är

$$\vec{u} = 9(\vec{v}-\vec{v}_n) = 9(1,1,1) - \frac{9}{9}(1,-2,2) = (9-1, 9+2, 9-2) = \underline{(8,11,7)}$$

en riktningsvektor för projektionen av linjen ℓ på π.

Skärningspunkten P_0 mellan ℓ och π ges av

$$3+t-2\cdot(4+t)+2(5+t) = 4 \ , \quad t+5 = 4 \ , \quad \underline{\underline{t=-1}}$$

Dvs $P_0 = (3,4,5) - 1\cdot(1,1,1) = (2,3,4)$

Svar:

$$\ell_p : (x,y,z) = (2,3,4) + t(8,11,7) \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

eller

$$\frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{11} = \frac{z-4}{7}$$

2. Utökade koefficientmatrisen är

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 5 & 6 & 7 & -4 \\ 6 & 0 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ \lambda+3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1-\lambda \\ 9 & -5 & 3 & 5-\lambda & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-5)(-2)(-1)(-3) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ \lambda & 2 & 0 & -2 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2 & 0 & -1-\lambda & -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2)(-1)(1) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -(3+\lambda) & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Här ser vi att det finns 3 olika fall.

1) $\lambda = -3$, 2) $\lambda = 0$ 3) $\lambda \neq -3,$

1) $\lambda = -3$: Sista raden ovan ger att $0 = 12$

Dvs lösning saknas!

\# fria variabler är 2, dvs $\underline{\dim(N_A) = 2}$.

2) $\lambda = 0$; I detta fall är

$$U \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left(-\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(-\tfrac{1}{3}\right) \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left(\tfrac{1}{2}\right) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 och x_5 är fria variable

Sätt $x_5 = 2t$, $x_3 = 3s$

$$\dim(N_A) = 2$$

Då är

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{6} - s - t \\ x_2 = -\frac{5}{2} \quad\ \ - t \\ x_3 = \quad\ 3s \\ x_4 = -4 \end{cases} \ , \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 7/6 \\ -5/2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3) $\lambda \neq 0, -3$; dela med λ i rad 4 :

$$U \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -(3+\lambda) & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -3 \\ -\frac{1}{3+\lambda} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-12}{3+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \quad -1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12/(3+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2\cdot 3 & & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12/(3+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \\ -2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & (39+5\lambda)/(3+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12/(3+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & (-15+3\lambda)/(3+\lambda) \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & (39+5\lambda)/(3+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12/(3+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_5 är en fri variabel, $\dim(N_A) = 1$.

sätt $x_5 = -2t$, då är

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{-15+3\lambda}{6+2\lambda} + t \\ x_3 = \dfrac{39+5\lambda}{6+2\lambda} + 3t \\ x_4 = -\dfrac{12}{3+\lambda} \\ x_5 = \qquad -2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har standardmatrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\det M = 4}$$

$$T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad T(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$T(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 28 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$T(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 24 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$T(A), T(B), T(C)$ och $T(\vec{0}) = \vec{0}$ är hörne i Q

Volymen av P är

$$V(P) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 5 & 12 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \quad 5 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 13 \\ 0 & 32 & 17 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 32 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 2 & -48 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 1 & -24 \end{vmatrix} = -2(-144-13) = 2 \cdot 157 = 3$$

och volymen av Q är

$$V(Q) = \det M \cdot V(P) = 4 \cdot 314 = \underline{\underline{1256}}.$$

4. $AXB = C$; $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -10 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 19 & -10 & 15 & 4 \\ 32 & -12 & 24 & 6 \end{bmatrix}$.

Vi finner att

$$XB = A^{-1}C = \begin{bmatrix} -10 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 & -10 & 15 & 4 \\ 32 & -12 & 24 & 6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 34 & 16 & 18 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{=D}.$$

Transponera!

$B^T X^T = D^T$, Lös ekv. $B^T Y = D^T$, $(X = Y^T)$

Utökad matris är,

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 34 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 16 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 18 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 33 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 15 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 18 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -27 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -24 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 5 \end{array}\right]$$

X^T

Svar: $X = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

5. $(\underbrace{z^2 + (2+2i)z + 4i}_{=w_k})^3 = 8i = 2^3 e^{i(\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi)}$

Dvs

$w_k = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2\pi}{3})}$, $k = 0,1,2$

1) $w_0 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i$

2) $w_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i$

3) $w_2 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -2i$

Fall 1): $z^2 + (2+2i)z + 4i = \sqrt{3} + i$

$(\underbrace{z + (1+i)}_{=x+iy})^2 = \sqrt{3} + i - 4i + (1+i)^2 = \sqrt{3} - i$

Dvs $\begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{3} \\ 2xy = -1 \end{cases}$, $x^2 + y^2 = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{3+1} = 2$

$2x^2 = 2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2}(4 + 2\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2$; $x^2 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})^2$

$2y^2 = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})^2$; $y^2 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})^2$

$\therefore$ $x = \pm\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $y = \mp\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Dvs $z_1 = -1 - i + \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}i = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{3-\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = -1 - i - \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i = -\frac{3+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

Fall 2): $z^2 + (2+2i)z + 4i = -\sqrt{3} + i$

$(\underbrace{z + (1+i)}_{=u+iv})^2 = -\sqrt{3} + i - 4i + (1+i)^2 = -\sqrt{3} - i = i^2(\sqrt{3} + i)$

$u + iv = i(x + iy) = \pm\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right)$

$z_3 = -1 - i + \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i = -\frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$

$z_4 = -1 - i - \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{3+\sqrt{3}}{2}i$

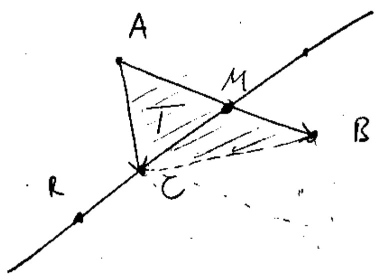
Fall 3: $z^2 + (2+2i)z + 4i = -2i$, $(z + (1+i))^2 = -4i = 2(1-i)^2$

$z_{5,6} = -1 - i \pm \sqrt{2}(1-i)$; $z_5 = \underline{\sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2}+1)i}$, $z_6 = \underline{-(\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}

6. $A = (1, 5, -2)$

$B = (3, 1, -6)$

$R = (-1, 3, -10)$



Area av triangeln är

$$T = \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{AB}| \quad !$$

Mittpunkten på sträckan AB ges av

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{2}(1+3, 5+1, -2-6) = (2, 3, -4)$$

$$\vec{RM} = (2,3,-4) - (-1,3,-10) = (3, 0, 6) = 3\underbrace{(1,0,2)}_{=\vec{v}}$$

Punkten C har koordinaterna

$$\vec{OC} = \vec{OM} + t\vec{v}$$

Alltså är

$$\vec{AC} = (2,3,-4) - (1,5,-2) + t(1,0,2) = (1+t, -2, -2+2t)$$

och

$$\vec{AB} = (3,1,-6) - (1,5,-2) = (2,-4,-4) = 2(1,-2,-2)$$

Dvs

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = 2 \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1+t & -2 & -2+2t \end{vmatrix} = 2\left(\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2+2t \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1+t & -2+2t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1+t & -2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 2(-4t, 4t, 2t) = -4t(2, -2, -1)$$

Dvs

$$\text{Area } T = \frac{1}{2} \cdot 4|t| \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 6|t| = 7; \; t = \pm\frac{7}{6}$$

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa
Datum: 2003–01–16 kl. 08.45–12.45
Telefonvakt: Per Hörfelt, tel. 0704 977974

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv dessutom linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1. Bestäm en ekvation för den linje som ligger i planet (8p)

$$\pi : 2x + y - 3z = 1$$

och som skär linjen

$$l : (x, y, z) = (-1, 2, -3) + t(1, -1, 1), \quad (t \in \mathbb{R})$$

under rät vinkel.

2. Lös matrisekvatonen $AX = A + 2X$ där (8p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Avgör också om matrisen X är inverterbar genom att beräkna dess determinant.

3. (a) Bestäm för varje värde på parametern α nollrummet till matrisen (8p)

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) För $\alpha = 0$ lös ekvationen $Ax = b$ om $b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

4. Den algebraiska ekvationen (8p)

$$6z^4 + z^3 + 8z^2 - 9z + 2 = 0$$

har två rationella rötter. Bestäm dessa och lös sedan ekvationen fullständigt. Faktorisera också polynomet $p(z) = 6z^4 + z^3 + 8z^2 - 9z + 2$ i reella faktorer av så låg grad som möjligt.

5. En ljusstråle går genom punkten $A = (1, 2, -3)$ och reflekteras i planet (8p)

$$\pi : \quad 2x + y - z - 1 = 0,$$

och går sedan (efter reflektion) genom punkten $B = (7, 8, 13)$. Bestäm koordinaterna för den punkt i planet i vilken ljusstrålen reflekteras.

Var god vänd!

6. Visa att (6p)

$$cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

7. (a) Ge sex påståenden som var och en är ekvivalent med påståendet: (8p)

$n \times n$ matrisen A är inverterbar.

Följande begrepp skall finnas med, ett för varje påstående:
(i) ekvationen $AX = 0$, (ii) rangen för A, (iii) kolonnerna i A, (iv) $detA$, (v) en-entydig, (vi) identitetsmatrisen I_n.

(b) Visa att om matrisen A är inverterbar så är också den transponerade matrisen A^T inverterbar.

8. Formulera och bevisa Cramers regel. (6p)

Lycka till!
TG

MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Linjär algebra och geometri för F1, (TMA 660)
Datum: 2002-10-26, 14.15 - 18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Hanna Martinsson tel. 0740 459022

---

1. En tetraeder har hörnen $P_1 = (1, 1, 2)$, $P_2 = (3, -1, -1)$, $P_3 = (0, 3, 2)$ och $P_4 = (6, 3, -1)$ (ON-system). (8p)

   a) Bestäm en ekvation för planet som innehåller triangeln $P_1P_2P_3$.

   b) Beräkna arean av triangeln $P_1P_2P_3$.

   c) Beräkna tetraederns volym.

   d) Beräkna avståndet från P_4 till planet genom $P_1P_2P_3$.

2. a) Bestäm nollrummet och en bas för kolonnrummet till matrisen (8p)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 8 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

   b) För vilka värden på λ ligger vektorn $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & \lambda \end{bmatrix}^T$ i kolonnrummet för $\boldsymbol{A}$?

   För dessa värden på λ, bestäm koordinaterna för $\boldsymbol{b}$ i den bas du erhöll för kolonnrummet.

3. a) Bestäm alla lösningar till den binomiska ekvationen $z^6 = -1$ och beskriv lösningarna i en figur i komplexa talplanet. (7p)

   b) Faktorisera polynomet $p(z) = z^6 + 1$ i reella faktorer av så låg grad som möjligt.

4. a) Bestäm inversen till matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. (8p)

   b) Lös matrisekvationssystemet $\begin{cases} \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{YB} + \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{C} \end{cases}$

   där $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{A}$ som ovan.

5. Den linjära avbildningen $F: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ har följande egenskaper: (7p)

$$F(1, 1) = k(3, 5), \quad F(1, -1) = k(1, 3)$$

   där k är en positiv konstant. Dessutom gäller att avbildningens areaskala är 1, dvs två vektorer spänner upp samma parallellogramarea som deras bildvektorer. Bestäm standardmatrisen för F. Avgör också om avbildningen bevarar orientering.

6. Bestäm alla lösningar till matrisekvationen $\boldsymbol{X}^2 + 2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$ där $\boldsymbol{X}$ är en reell symmetrisk matris och $\boldsymbol{I}$ en enhetsmatris. (7p)

Var god vänd!

7. a) Definiera skalärprodukten av två geometriska vektorer. (8p)

b) Beskriv ortogonalprojektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$. Rita och förklara!

c) Definiera kryssprodukten mellan två geometriska vektorer.

d) Bevisa distributiva lagen för kryssprodukt

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$$

8. Låt $\boldsymbol{A}$ vara en kvadratisk $n \times n$ matris. Visa att följande påståenden är ekvivalenta. (7p)

(1) $\boldsymbol{A}$ är inverterbar.

(2) $\boldsymbol{A}$ har en kvadratisk vänsterinvers (av typ $n \times n$).

(3) Ekvationen $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$.

Lycka Till !/ **TG**

Linjär Algebra och Geometri, F1

Svar: 2004-08-18

1. Planets ekvation är: $2x+2y+z=5$. Avståndet från P till planet är $2/3$.

2. a)
$$\begin{cases} x &= 1+3t \\ y &= 1+2t \\ z &= -3t \end{cases}$$
b)
$$\begin{cases} \mathbf{u} &= (2,1)_{\underline{e}} \\ \mathbf{v} &= (2,2)_{\underline{e}} \\ \mathbf{w} &= (1,2)_{\underline{e}} \end{cases}$$

c) $-3+i$. d) $|\dfrac{1+i}{-\sqrt{3}+i}| = \sqrt{2}/2$ och $arg(\dfrac{1+i}{-\sqrt{3}+i}) = -7\pi/12$.

3. $V(A)=\mathbb{R}^3$ och $N(A) = span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -18 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$

4. Standardmatrisen för T är $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ och T är ej volymbevarande.

5. $X = t\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.$

Svar: 2004-01-15

1. a) Nej b) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ c) $\begin{cases} x &= 4/3 \\ y &= 2/3 \end{cases}$

2. a) Rötterna är $z_1 = 2-i$ och $z_2 = -1+2i$ b) $16-16i$

3. $\begin{cases} x &= -2+8t \\ y &= 4+2t \\ z &= 1-11t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}.$

4. $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

5. $V(F) = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$

Dvs $V(F)$ är ett plan i rummet och dess ekvation på normalform är: $3x-5y-7z=0$.
Detta visar också att ekvationen $F(x,y,z)=(1,1,1)$ saknar lösning.

Svar: 2003-10-25

1. a) $\begin{cases} x &= 4+t \\ y &= 6+3t \\ z &= t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ b) $x+3y+z=6$ c) $d=\sqrt{11}$, $\mathbf{u}_\pi = (3,-2,3)$

2. Rötterna är $z_1 = 1-2i$ och $z_2 = -1+3i$

3. $dimCol(A) = 2,\ Nul(A) = span\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

4. $y = 2x+1$, medelfelet är $\epsilon = 3/\sqrt{2}$

5. Standardmatrisen för $F \circ T$ är

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & -1 & 10 \end{bmatrix} = \frac{2}{33}\begin{bmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 2 & 7 & -6 \\ -2 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Svar: 2002-10-26

1. a) $6x+3y+2z=13$ b) $7/2$ c) 5 d) $30/7$

2. a) $Nul(A) = span\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\mathbf{b} \in Col(A)$ om och endast om $\lambda = 11$.

Koordinaterna för $\mathbf{b}$ i basen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ är $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Rötterna är $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\ -i,\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

$P(z) = z^6 + 1 = (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)$

4. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -12 & 4 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

b) $Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 6 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}$, $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

6. $X = -I$ är *enda* lösningen.

MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Linjär Algebra och Geometri för F1, (TMA 660)
Datum: 2002-08-21, 14.15 - 18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Erik Broman tel. 0740 459022

---

1. Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Enbart svar skall ges, alltså ett rakt ja eller nej. Rätt svar ger 1 poäng, fel svar ger -1 poäng och inget svar 0 poäng. Man kan dock inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften. (6p)

   a) Varje homogent ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar.

   b) Matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ är inverterbar.

   c) Låt A, B och C vara kvadratiska matriser av samma storlek. Om $AB = AC$ och om C är inverterbar så följer alltid att $B = C$.

   d) Om A är inverterbar så är A^{-1} inverterbar.

   e) Om $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ så är elementet i andra raden och första kolonnen till inversen för A lika med $\frac{-7}{18}$.

   f) Linjen l: $(x, y, z) = (-1, 0, 4) + t(2, 1, -4)$ skär planet π: $(x, y, z) = (2, -1, 1) + s(1, 1, 3) + t(0, 1, -4)$ i punkten $(3, 2, -4)$.

2. Visa att linjen l_1 genom punkterna $P_1 = (1, -1, -2)$ och $P_2 = (2, -1, 2)$ ligger i planet $\pi: (x, y, z) = s(1, -1, -2) + t(1, 0, 4)$. En andra linje l_2 ligger också i planet π och skär l_1 under rät vinkel i punkten P_2. Bestäm en ekvation för l_2. (7p)

3. Den algebraiska ekvationen $z^5 - 3z^4 + 8z^3 - 15z^2 + 15z - 18 = 0$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (7p)

4. Lös matrisekvationen $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C}$, där (8p)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 19 & -10 & 15 & 4 \\ 32 & -12 & 24 & 6 \end{bmatrix}.$$

5. Lös följande ekvationssystem för alla reella värden på p. (8p)

$$\begin{cases} x + py + z = 1 \\ px + y + p^2 z = 1 \\ -x + y + 2pz = 3 \end{cases}.$$

6. A är en $n \times n$ matris ($n \geq 2$) vars samtliga element är ettor. Bestäm inversen till $E - A$. (8p)

7. a) Formulera och bevisa multiplikationssatsen för determinanter (6p)

   b) Visa att om matrisen A är inverterbar så är $detA \neq 0$. (2p)

8. Formulera och bevisa distributiva lagen för vektoriell produkt. (8p)

/TG

MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Linjär Algebra och Geometri för F (TMA 660)
Datum: 2002-08-21, 14.15 - 18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Erik Broman tel. 0740 459022

---

1. Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Enbart svar skall ges, alltså ett rakt ja eller nej. Rätt svar ger 1 poäng, fel svar ger -1 poäng och inget svar 0 poäng. Man kan dock inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften. (6p)
   a) Varje homogent ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar.
   b) Matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ är inverterbar.
   c) Låt A, B och C vara kvadratiska matriser av samma storlek. Om $AB = AC$ och om C är inverterbar så följer alltid att $B = C$.
   d) Om A är inverterbar så är A^{-1} inverterbar.
   e) Om $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ så är elementet i andra raden och första kolonnen till inversen för A lika med $\frac{-7}{18}$.
   f) Linjen l: $(x, y, z) = (-1, 0, 4) + t(2, 1, -4)$ skär planet π: $(x, y, z) = (2, -1, 1) + s(1, 1, 3) + t(0, 1, -4)$ i punkten $(3, 2, -4)$.
2. Visa att linjen l_1 genom punkterna $P_1 = (1, -1, -2)$ och $P_2 = (2, -1, 2)$ ligger i planet $\pi: (x, y, z) = s(1, -1, -2) + t(1, 0, 4)$. En andra linje l_2 ligger också i planet π och skär l_1 under rät vinkel i punkten P_2. Bestäm en ekvation för l_2. (7p)
3. Den algebraiska ekvationen $z^5 - 3z^4 + 8z^3 - 15z^2 + 15z - 18 = 0$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (7p)
4. Lös matrisekvationen $AXB = C$, där (8p)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 19 & -10 & 15 & 4 \\ 32 & -12 & 24 & 6 \end{bmatrix}.$$
5. Lös följande ekvationssystem för alla reella värden på p. (8p)
$$\begin{cases} x + py + z = 1 \\ px + y + p^2 z = 1 \\ -x + y + 2pz = 3 \end{cases}$$
6. A är en $n \times n$ matris ($n \geq 2$) vars samtliga element är ettor. Bestäm inversen till $E - A$. (8p)
7. a) Formulera och bevisa multiplikationssatsen för determinanter (6p)
   b) Visa att om matrisen A är inverterbar så är $\det A \neq 0$. (2p)
8. Formulera och bevisa distributiva lagen för vektoriell produkt. (8p)

Lösningar till "Linjär Algebra & Geometri", F1, TMA660. 1)

2002-08-21.

1a Ja

1b) Nej ("rad1 = 2·rad2 + rad3")

1c) Nej (Inte ens om vi antar att $A \neq 0$ är påståendet sant. Tag t.ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $C = E$.)

1d) Ja

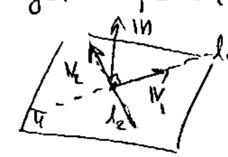
1e) Nej, $\left(\hat{a}_{21} = (-1)^3 \frac{A_{21}}{\det A} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{1}{18} \right)$

1f) Ja.

---

2. $P_1 = (1,-1,-2) \in \pi$ ty tag $s = 1$ och $t = 0$
$P_2 = (2,-1,2) \in \pi$ ty tag $s = t = 1$.

Eftersom P_1 och P_2 båda ligger i planet π så går linje l_1 genom P_1 och P_2 också det.



En riktningsvektor för l_1 är
$$v_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (2,-1,2) - (1,-1,-2) = (1,0,4)$$

En normal till planet ges av $n = u \times v$, där $u = (1,0,4)$, $v = (1,-1,-2)$

Dvs $n = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (4, 6, -1)$.

En riktningsvektor för l_2 ges av
$$v_2 = n \times v_1 = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 4 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (24, -17, -6)$$

Svar: $l_2 : (x, y, z) = (2,-1,2) + t(24,-17,-6)$, $t \in \mathbb{R}$

Sätt $p(z) = z^5 - 3z^4 + 8z^3 - 15z^2 + 15z - 18$; ansätter $z = ia$ som en rot till ekv. $p(z) = 0$

för $(ia)^5 - 3(ia)^4 + 8(ia)^3 - 15(ia)^2 + 15(ia) - 18 = 0$

$i(a^5 - 8a^3 + 15a) - 3(a^4 - 5a^2 + 6) = 0 \quad (= 0 + i \cdot 0)$

Real och imaginärdel är båda 0 ;

dvs (1) $a^4 - 5a^2 + 6 = 0$

(2) $a^5 - 8a^3 + 15a = 0 \quad a \neq 0$ enl (1) , dvs $a^4 - 8a^2 + 15 = 0$

(1) $\Rightarrow a^2 = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5 \pm 1}{2} = 2, 3$

(2) $\Rightarrow a^2 = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1 = 3, 5$

$\therefore \quad a^2 = 3$ och $a = \pm\sqrt{3}$.

Dvs $z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$ är två rötter till $p(z) = 0$.

$(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) = z^2 + 3$ delar $p(z)$!

$p(z) = (z^2 + 3)\underbrace{(z^3 - 3z^2 + 5z - 6)}_{= q(z)}$

Efter prövning finner vi att $q(2) = 0$ dvs $z_3 = 2$ är också en rot. Vi finner att $q(z) = (z-2)(z^2 - z + 3)$. övriga rötter ges av

$z^2 - z + 3 = 0$

$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\tfrac{1}{4} - 3}_{-\frac{11}{4}}} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$

Svar: Rötterna är $z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$, $z_3 = 2$, $z_{4,5} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$

4. $\underset{2\times 2}{A} \underset{2\times 4}{X} \underset{4\times 4}{B} = \underset{2\times 4}{C}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{pmatrix}$

Om A och B är inverterbara så är $X = A^{-1} C B^{-1}$,

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} = -20 + 21 = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existerar

$\det B =$ "utveckla längs kolonn 4" $= -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2(0 - 1 + 3 - 0 + 2 + 0) = -8 \neq 0 \Rightarrow B^{-1}$ existerar ,

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} -10 & -(-7) \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

$A^{-1}C = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 & -10 & 15 & 4 \\ 32 & -12 & 24 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 16 & 18 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Vi bestämmer nu B^{-1} .

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-2)(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) (-3) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 1 & 3 & -9 \end{array}\right) (8)(8)(8)$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & 18 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -8 & 0 & -8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 1 & 3 & -9 \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 1 & 3 & -9 \end{array}\right)$

$= 8 \cdot B^{-1}$

Svar: $X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 34 & 16 & 18 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 37 & 39 & 19 \\ 0 & 4 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

4. De utökade koefficientmatrisen för ekv.systemet är

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & 1 & 1 \\ p & 1 & p^2 & 1 \\ -1 & 1 & 2p & 3 \end{array}\right) \overset{(-p)\ (1)}{} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & 1 & 1 \\ 0 & 1-p^2 & p^2-p & 1-p \\ 0 & 1+p & 1+2p & 4 \end{array}\right) \ -(1-p)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & 1 & 1 \\ 0 & 1+p & 1+2p & 4 \\ 0 & 0 & 3p^2-2p-1 & -3(1-p) \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & 1 & 1 \\ 0 & 1+p & 1+2p & 4 \\ 0 & 0 & (1-p)(1+3p) & 3(1-p) \end{array}\right) \quad (A)$$

Vi erhåller en entydig lösning om $1\cdot(1+p)(1-p)(1+3p) \neq 0$

Dvs om $p \neq 1$, $p \neq -\frac{1}{3}$ och $p \neq -1$.

I sådana fall så får vi efter division med $(1-p)(1+3p)$: rad 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & 1 & 1 \\ 0 & 1+p & 1+2p & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{1+3p} \end{array}\right) \ -(1+2p)\ (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & 0 & (3p-2)/(3p+1) \\ 0 & 1+p & 0 & (6p+1)/(3p+1) \\ 0 & 0 & 1 & 3/(3p+1) \end{array}\right)$$

$$\left[\ 1-\frac{3}{1+3p} = \frac{3p-2}{3p+1} \ ,\ 4-3\frac{1+2p}{1+3p} = \frac{4+12p-3-6p}{3p+1} = \frac{6p+1}{3p+1}\ \right]$$

Dvs $z = \dfrac{3}{3p+1}$, $y = \dfrac{6p-5}{(3p+1)(p+1)}$, $x+py = \dfrac{3p-2}{3p+1}$

$$x = \frac{3p-2}{3p+1} - p\,\frac{6p+1}{(3p+1)(p+1)} = \frac{3p^2+3p-2p-2-6p^2-p}{(3p+1)(p+1)} = \frac{-3p^2-2}{(3p+1)(p+1)}$$

Alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{(3p+1)(p+1)}\begin{pmatrix} -3p^2-2 \\ 6p+1 \\ 3(p+1) \end{pmatrix}$$

För $p = -\frac{1}{3}$ så ger sista raden att $0 = 4$!

För $p = -1$ så ger rad 2 och 3 att $\begin{cases} -z = 4 \\ -4z = 6 \end{cases}$!

D.v.s. i dessa fall saknas lösningar.

För $p = 1$ så får systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

så att $z = 2t$ (fri variabel)

Då erhålls $2y + 3\cdot 2t = 4$, $y = 2 - 3t$

och $x + y + z = 1$, $x = 1 - y - z = -1 + t$.

Dvs $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 2-3t \\ z = 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

---

6. Vi noterar att $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & & \\ \vdots & & \ddots & \\ n & & & n \end{bmatrix}$

$= nA$.

Om r är ett reellt tal så är

$$(E-A)(E-rA) = E - rA - A + r\underbrace{A^2}_{=nA} = E + (rn - r - 1)A$$

Högerledet är lika med E om vi väljer r s.a.

$$rn - r - 1 = 0$$

Dvs $r = \dfrac{1}{n-1}$

Svar: $(E-A)^{-1} = E - \frac{1}{n-1}A$, $n = 2, 3, \ldots$

MATEMATIK	**Tentamensskrivning i**
Chalmers Tekniska Högskola	**Linjär algebra och geometri för F1, (TMA 660)**
	Datum: 2002-01-17, 08.45 - 12.45
Ange CTH - nummer eller personnummer, samt	Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
linje, inskrivningsår och namn.	Tel.vakt: Richards Grzhibovskis tel. 0740 459022

---

1. Ekvationen $2z^4 + 4z^3 + 5z^2 - 3z + 9 = 0$ har roten $(1 + i\sqrt{3})/2$. (8p)
   Bestäm, på formen $a + ib$ $(a, b \in \boldsymbol{R})$, samtliga lösningar till ekvationen.

2. a) Visa att planen π_1: $x + 2y + z = 3$ och π_2: $3x - 2y + z = -7$ (2p)
   är vinkelräta mot varandra.

   b) Bestäm ett plan π_3 som innehåller punkten $(1, -2, 0)$ och som är vinkelrät mot (3p)
   både π_1 och π_2 ovan.

   c) Bestäm skärningspunkten mellan planen π_1, π_2 och π_3. (3p)

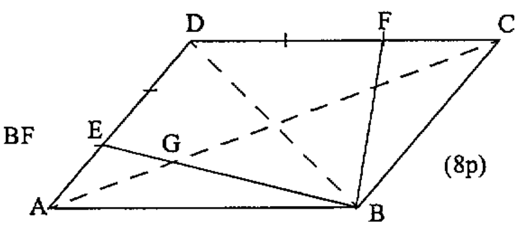
3. a) För vilka reella tal a är matrisen A inverterbar, där (8p)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 & -1 \\ a+2 & 0 & a-1 & 3 \\ 1 & a-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   b) Bestäm inversen för A då $a = 2$.

4. Beräkna volymen av den tetraeder som har hörn i punkterna (4p)
   $(1, 1, 2)$, $(2, 4, 7)$, $(0, 1, 4)$ och $(1, 0, 4)$.

5. Betrakta parallellogrammen ABCD till höger. Sidorna AD och CD är vardera delade i tre lika långa sträckor (se figuren). Visa att BE, BD, och BF delar AC i fyra lika långa sträckor. (8p)



6. Avgör om polynomet (8p)

$$x^{105} + 2x^{98} - x^{67} + x^{54} - 2x^{26} + x$$

   är delbart med $x^2 - x + 1$.

7. a) Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara två vektorer. Beskriv i en figur projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$ och ange en formel för denna. (8p)

   b) Formulera och bevisa distributiva lagen för skalärprodukt.

8. a) Formulera och bevisa Cramers regel för 3×3 matriser. (8p)

   b) Lös med hjälp av *Cramers regel* ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - \ y = 0 \end{cases}.$$

Lycka till !

MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Linjär algebra och geometri för F1, (TMA 660)
Datum: 2002-01-17, 08.45 - 12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Tel.vakt: Richards Grzhibovskis tel. 0740 459022

1. Ekvationen $2z^4+4z^3+5z^2-3z+9 = 0$ har roten $(1+i\sqrt{3})/2$. (8p)
Bestäm, på formen $a+ib$ $(a, b \in R)$, samtliga lösningar till ekvationen.

2. a) Visa att planen π_1: $x+2y+z = 3$ och π_2: $3x-2y+z = -7$ är vinkelräta mot varandra. (2p)

b) Bestäm ett plan π_3 som innehåller punkten $(1, -2, 0)$ och som är vinkelrät mot både π_1 och π_2 ovan. (3p)

c) Bestäm skärningspunkten mellan planen π_1, π_2 och π_3. (3p)

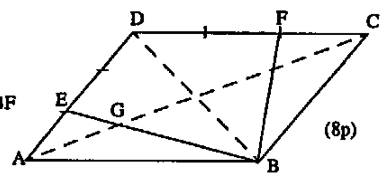
3. a) För vilka reella tal a är matrisen A inverterbar, där (8p)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 & -1 \\ a+2 & 0 & a-1 & 3 \\ 1 & a-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestäm inversen för A då $a = 2$.

4. Beräkna volymen av den tetraeder som har hörn i punkterna $(1,1,2)$, $(2,4,7)$, $(0,1,4)$ och $(1,0,4)$. (4p)

5. Betrakta parallellogrammen ABCD till höger. Sidorna AD och CD är vardera delade i tre lika långa sträckor (se figuren). Visa att BE, BD, och BF delar AC i fyra lika långa sträckor. (8p)



6. Avgör om polynomet (8p)

$$x^{105}+2x^{98}-x^{67}+x^{54}-2x^{26}+x$$

är delbart med x^2-x+1.

7. a) Låt u och v vara två vektorer. Beskriv i en figur projektionen av u på v och ange en formel för denna. (8p)

b) Formulera och bevisa distributiva lagen för skalärprodukt.

8. a) Formulera och bevisa Cramers regel för 3×3 matriser. (8p)

b) Lös med hjälp av *Cramers regel* ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+2y = 1 \\ x-\ y = 0 \end{cases}.$$

Lycka till !

Lösning till Linjär algebra och geometri, F1, 17/1, 2002

1. $\alpha = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ är en rot till $2z^4+4z^3+5z^2-3z+9=0$

Ekvationen har reella koefficienter och därmed är även $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$ en rot.

Alltså är $(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)z + |\alpha|^2 = z^2 - z + 1$ en faktor till polynomet $p(z) = 2z^4+4z^3+5z^2-3z+9$

Polynomdivision ger

$p(z) = (z^2-z+1)(2z^2+6z+9)$

$$\begin{array}{r} 2z^2+6z+9 \\ z^2-z+1 \,\big)\, 2z^4+4z^3+5z^2-3z+9 \\ -(2z^4-2z^3+2z^2) \\ 6z^3+3z^2-3z+9 \\ -(6z^3-6z^2+6z) \\ 9z^2-6z+9 \\ -(9z^2-6z+9) \\ 0 \end{array}$$

Övriga rötter ges av ekvationen

$2z^2+6z+9=0$

$z^2+3z+\frac{9}{2}=0$

$z = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{-9}{4}}$

$z_{1,2} = \frac{-3}{2}(1\pm i)$

Svar: Samtliga rötter är $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$, $\frac{-3}{2}(1\pm i)$.

2a π_1 har normalen $\vec{n}_1 = (1,2,1)$

π_2 har normalen $\vec{n}_2 = (3,-2,1)$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) + 1\cdot 1 = 3-4+1 = 0 .$$

Dvs $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ och därmed är planen vinkelräta mot varandra.

2b) π_3 är vinkelrät mot π_1 och π_2, därmed är

$$\vec{n}_3 = \frac{1}{2}\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2-(-2), -(1-3), -2-6) = (2,1,-4)$$

en normal till π_3.

Dvs $\pi_3 : 2x+y-4z+D=0$, där D är en konstant.

Ty π_3 innehåller punkten $(1,-2,0)$, dvs

$$2\cdot 1 + (-2) - 4\cdot 0 + D = 0 , \quad D = 0 .$$

<u>Svar:</u> $\pi_3 : 2x+y-4z = 0$.

2c) Skärningspunkten för π_1, π_2 och π_3 ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+2y+z = 3 \\ 3x-2y+z = -7 \\ 2x+y-4z = 0 \end{cases}$$

Den utökade koefficientmatrisen ges av

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) (-3)(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -2 & -16 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-\frac{1}{2}) \\ (-\frac{1}{3}) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 8 \end{array}\right) (-4)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right) (-\tfrac{1}{7}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) (-2)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) (-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

<u>Svar:</u> Skärningspunkten är $(-1, 2, 0)$.

3a A är inverterbar precis då $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 & -1 \\ a+2 & 0 & a-1 & 3 \\ 1 & a-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & a-2 & 2 & -1 \\ -a+4 & -a+1 & a-1 & 3 \\ -1 & a-2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} -3 & a-2 & -1 \\ -a+4 & -a+1 & 3 \\ -1 & a-2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & a-2 & -1 \\ -a-5 & 2a-5 & 0 \\ -4 & 2a-4 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -(a+5) & 2a-5 \\ -4 & 2(a-2) \end{vmatrix} = 2\big((a+5)(a-2) - 2(2a-5)\big)$$

$$= 2(a^2-a) = 2a(a-1) .$$

Dvs $\det A = 0$ omm. $a = 0$ eller 1.

<u>Svar:</u> A är inverterbar omm. $a \neq 0, 1$

3b Vi bestämmer inversen till A då $a = 2$. ($\det A = 4$)

$$(A|E) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-4)(-1)(-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) (4)(1) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} (4) \\ (4) \\ (4) \\ (-1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -36 & 0 & 16 & 4 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) (9)(2)(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -9 & 7 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 0 & 0 & 10 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 7 & -5 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -9 & 7 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 7 & -5 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -9 & 7 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

<u>Svar:</u> $$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & -4 & 7 \\ -9 & 7 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Tetraedern "spänns" upp av vektorerna

$\vec{u} = (2,4,7)-(1,1,2) = (1,3,5)$

$\vec{v} = (0,1,4)-(1,1,2) = (-1,0,2)$

$\vec{w} = (1,0,4)-(1,1,2) = (0,-1,2)$

Volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ges av $|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}|$ och volymen V av tetraedern är $\frac{1}{6}$ av denna. Dvs

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{13}{6}$$

: Sätt $p(x) = x^{105}+2x^{98}-x^{67}+x^{54}-2x^{26}+x$, $q(x) = x^2-x+1$.

Om varje nollställe α till $q(x)$ är ett nollställe till $p(x)$ så är $p(x)$ delbart med $q(x)$. Om $q(\alpha) = 0$ så är också

$0 = q(\alpha)\cdot(\alpha+1) = \alpha^3-\alpha^2+\alpha+\alpha^2-\alpha+1 = \alpha^3+1$.

Dvs $\alpha^3 = -1$. Men

$\alpha^{105} = (\alpha^3)^{35} = (-1)^{35} = -1$

$\alpha^{98} = (\alpha^3)^{32}\cdot\alpha^2 = (-1)^{32}\alpha^2 = \alpha^2$

$\alpha^{67} = (\alpha^3)^{22}\alpha = (-1)^{22}\alpha = \alpha$

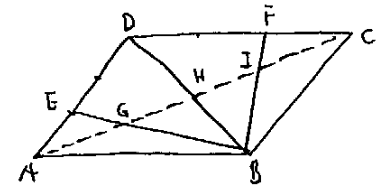
$\alpha^{54} = (\alpha^3)^{18} = (-1)^{18} = 1$

$\alpha^{26} = (\alpha^3)^8\cdot\alpha^2 = (-1)^8\alpha^2 = \alpha^2$

Nu visar att $p(\alpha) = -1+2\alpha^2-\alpha+1-2\alpha^2+\alpha = 0$!

Eftersom $q(x)$ har två olika nollställen följer att båda dessa är nollställe till $p(x)$ och därmed att $p(x)$ är delbart med $q(x)$.

5. Vi noterar att AB, AD utgör en bas för planet.



Eftersom $\vec{AG} \parallel \vec{AC}$ så finns tal s så att

$\vec{AG} = s\,\vec{AC}$

Men $\vec{AG} = \vec{AB}+\vec{BG}$

och $\vec{BG} = t\vec{BE}$ för något tal t ty $\vec{BG} \parallel \vec{BE}$.

Dessutom är $\vec{BE} = \vec{AE}-\vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{AD}-\vec{AB}$ ty $|AE| = \frac{1}{3}|AD|$

och $\vec{AC} = \vec{AB}+\vec{AD}$. Sammantaget finner vi att

$s\vec{AB}+s\vec{AD} = \vec{AG} = \vec{AB}+\vec{BG} = \vec{AB}+t\vec{BE} = \vec{AB}+t(\frac{1}{3}\vec{AD}-\vec{AB}) = (1-t)\vec{AB}-\frac{t}{3}\vec{AD}$

Eftersom $\vec{AB}, \vec{AD}$ utgör en bas och koordinaterna för en vektor ($\vec{AG}$) är entydiga så finner vi att

$s = 1-t$ $\therefore$ $4s = 1$, $s = \frac{1}{4}$

$s = \frac{t}{3}$, $t = 3s$

Dvs sträckan $|AG| = \frac{1}{4}|AC|$.

Men sträckan BD skär sträckan AC mitt itu, dvs $|AH| = \frac{1}{2}|AC|$, vilket visar att $|AG| = |GH| = \frac{1}{4}|AC|$

Av symmetriskäl följer också att sträckorna $|HI| = |FC| = \frac{1}{4}|AC|$

(Trianglarna ABD och CDB är kongruenta med E och F på motsvarande platser.)

MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Linjär algebra och geometri för F1, (TMA 660)
Datum: 2001-10-27, 14.15 - 18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Henrik Seppänen tel. 0740 459022

---

1. a) Bestäm avståndet från punkten $P = (-1, 3, 3)$ till det plan π som innehåller punkterna $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (0, -1, 1)$ och $P_3 = (1, 2, 4)$. (6p)

   b) En ljuskälla är placerad i punkten P. Den genererar en smal ljusstråle som reflekteras i punkten P_3 i det speglande planet π ovan. (4p)
   Bestäm ekvationerna för linjerna som beskriver ljusstrålens bana.
   (Koordinater är angivna i ett ON-system.)

2. Betrakta ekvationssystemet (7p)

$$\begin{cases} x + y + z + 2u = 1 \\ ax + z + u = 2 \\ 2x + 2y + 3z + 5u = 3 \\ y + z + au = b \end{cases}$$

   a) Bestäm determinanten för koefficientmatrisen och avgör för vilka a som ekvationssystemet har en entydig lösning.
   b) Avgör för vilka värden på a och b som systemet har mer än en lösning och bestäm lösningarna i dessa fall

3. En kvadrat med sidan två är placerad i den övre halvan av det komplexa talplanet. Ett hörn ligger i punkten $z_1 = 1 + i$ och ena sidan, med start i z_1, bildar vinkeln $\pi/3$ (radianer) med positiva realaxeln. Bestäm övriga hörnpunkter i kvadraten. Rita figur och ange svaret på formen $a + bi$. (6p)

4. Lös matrisekvationen $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C} - 2\boldsymbol{XB}$, där (7p)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Ekvationen $z^4 + 5iz^3 + (-7 + 3i)z^2 - 12z - 4 - 12i = 0$ har en rent imaginär dubbelrot. Lös ekvationen. (7p)

6. Man säger att ett tal λ är ett egenvärde till en matris $\boldsymbol{A}$ om det finns en icketrivial lösning till ekvationen $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$. (Man säger då också att lösningen $\boldsymbol{x}$ är en egenvektor). (7p)
   Låt $\boldsymbol{P}$ vara en matris sådan att $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^T$ (dvs $\boldsymbol{P}$ är en ortogonalmatris).
   Visa att om $det\boldsymbol{P} = 1$ och $\boldsymbol{P}$ har ett udda antal rader så är $\lambda = 1$ ett egenvärde till $\boldsymbol{P}$.

7. a) Formulera och bevisa multiplikationssatsen för determinanter (6p)

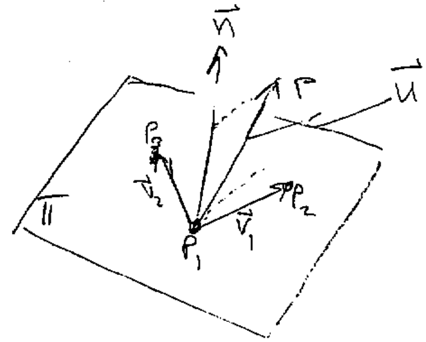
   b) Visa att om matrisen $\boldsymbol{A}$ är inverterbar så är $det\boldsymbol{A} \neq 0$. (2p)

8. a) Definiera begreppet invers matris och visa att en matris har högst en invers. (2p)

   b) Visa att om en matris har en vänsterinvers så är den inverterbar. (6p)

Lösningar till Linjär Algebra och Geometri, TMA660, 20011027.

1.a Vi bestämmer först en normal till planet π: Vektorerna



$\vec v_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (0,-1,1)-(1,0,1) = (-1,-1,0)$

$\vec v_2 = \overrightarrow{P_1P_3} = (1,2,4)-(1,0,1) = (0,2,3)$

är två riktningsvektorer för π

En normalvektor till planet är

$$\vec n = \vec v_1 \times \vec v_2 = \begin{vmatrix} \vec e_x & \vec e_y & \vec e_z \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-3, 3, -2) = -(3,-3,2)$$

Planets ekv: $3x-3y+2z+D=0$; $P_1 \in \pi \Rightarrow 3-0+2+D=0$, $\underline{\underline{D=}}$

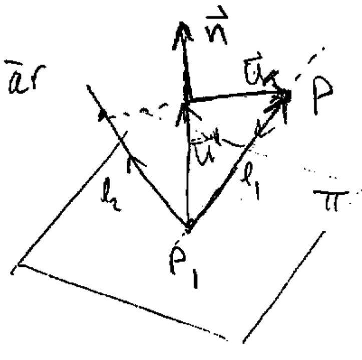
Sätt $\vec u = \overrightarrow{P_1P} = (-1,3,3)-(1,0,1) = (-2,3,2)$

Projektionen av $\vec u$ på $\vec n$ ges av

$$\vec u' = \frac{\vec u \cdot \vec n}{|\vec n|^2}\vec n = \frac{(-2,3,2)\cdot(-3,3,-2)}{9+9+4}\vec n = \frac{6+9-4}{22}\vec n = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Avståndet från P till planet är $d = |\vec u'| = \frac{1}{2}\sqrt{22}$.

b) En riktningsvektor för l_1 och l_2 är



$\vec u = \overrightarrow{P_1P} = (-2,3,0)$

respektive

$\vec w = \vec u - 2\vec u_{\parallel}$, där $\vec u_{\parallel} = \vec u - \vec u'$

Dvs

$\vec w = 2\vec u' - \vec u = \vec n - \vec u = (-3,3,-2) - (-2,3,0) = (-1,0,-2)$

<u>Svar</u>: Ekvationerna för linjerna ges av

$$l_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } l_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}$$

$t \in \mathbb{R}$

Med $a=2$ och $b=0$ så får vi ekv. systemet med utökad koefficientmatris

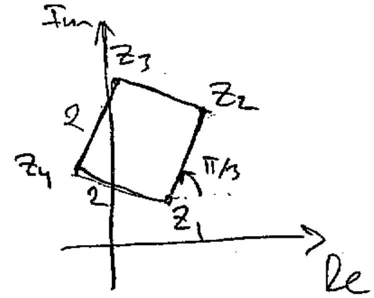
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Dvs $\begin{cases} x = 1 \\ y + u = -1 \\ z + u = 1 \end{cases}$, sätt $u = -t \Rightarrow \begin{array}{l} z = 1+t \\ y = -1+t \end{array}$.

Svar: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

---

3. Vi finner att



$$z_2 = z_1 + 2e^{i\pi/3}$$

$$z_4 = z_1 + i(z_2 - z_1) = z_1 + 2i\, e^{i\pi/3}$$

$$z_3 = z_2 + (z_4 - z_1) = z_2 + 2i\, e^{i\pi/3}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2e^{i\pi/3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = \\ \qquad = 1 + i\sqrt{3} \\ 2i\, e^{i\pi/3} = -\sqrt{3} + i \end{array}\right]$$

Dvs hörnpunkterna är

$$z_2 = 1 + i + (1 + i\sqrt{3}) = \underline{2 + (1+\sqrt{3})i}$$

$$z_3 = 2 + (1+\sqrt{3})i - \sqrt{3} + i = \underline{2 - \sqrt{3} + (2+\sqrt{3})i}$$

$$z_4 = 1 + i - \sqrt{3} + i = \underline{1 - \sqrt{3} + 2i}$$

<u>4</u>

$$AXB = C - 2XB$$

$$AXB + 2IXB = C$$

$$(A+2I)XB = C \quad , \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A+2I)X = CB^{-1} \qquad \text{dvs } B^{-1} = B.$$

Men $\quad CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A+2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Den utökade koefficientmatrisen är

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] (-2)\ (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -10 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right] (-1)\ (-1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right] \left(\tfrac{1}{3}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] (-5)\ (-3) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$X$$

<u>Svar:</u> $\quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$

5. $z = ai$ är en rot $\Rightarrow$ $p(ai) = 0$, dvs

$$a^4 + 5a^3 + 7a^2 - 3a^2 i - 12ai - 4 - 12i = 0$$

$$\underbrace{a^4 + 5a^3 + 7a^2 - 4}_{=0} - \underbrace{(3a^2 + 12a + 12)}_{=0}\, i = 0$$

$$3a^2 + 12a + 12 = 0$$

$$a^2 + 4a + 4 = 0, \quad a = -2 \pm \sqrt{4-4} = \underline{\underline{-2}}$$

$\underline{z = -2i}$ är enl. utsaga en dubbelrot, dvs

$(z + 2i)^2 = z^2 + 4iz - 4$ delar $p(z)$.

[Alt. $(z - ai)^2 = z^2 - 2aiz - a^2$ delar $p(z)$].

$$
\begin{array}{r l}
 & z^2 + iz + 1 + 3i \\
z^2 + 4iz - 4 \,\big) & z^4 + 5iz^3 + (-7+3i)z^2 - 12z - 4 - 12i \\
 & -(z^4 + 4iz^3 - 4z^2) \\
 & iz^3 + (-3+3i)z^2 - 12z - 4 - 12i \\
 & -(iz^3 - 4z^2 - 4iz) \\
 & (1+3i)z^2 + (-12+4i)z - 4 - 12i \\
 & -((1+3i)z^2 + (-12+4i)z - 4 - 12i) \\
 & 0
\end{array}
$$

$z = -2i$ är e dubbelrot

Vi erhåller övriga rötter ur 2:a grads ekvationen

$$z^2 + iz + 1 + 3i = 0$$

$$\left(z + \frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} - 1 - 3i = \frac{1}{4}(-5 - 12i)\ ; \quad \text{sätt } z + \frac{i}{2} = \frac{1}{2}(x + iy)$$

Vi söker $w = x + iy$ s.a. $\underbrace{(x+iy)}_{= x^2 - y^2 + 2xyi}{}^2 = -5 - 12i$.

Dvs

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases}, \quad x^2 + y^2 = |w|^2 = |-5 - 12i| = \sqrt{25 + 144} = 13$$

$2x^2 = 8$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$

$2xy = -12 \Rightarrow y = \mp 3$

$\therefore$ Rötterna är

$z_3 = -\frac{i}{2} + \frac{1}{2}(2 - 3i) = \underline{\underline{1 - 2i}}$

$z_4 = -\frac{i}{2} + \frac{1}{2}(-2 + 3i) = \underline{\underline{-1 + i}}$

2.

i) Koefficientmatrisen för systemet är

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet har en entydig lösning precis då $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} (-a) & (-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -a & 1-a & 1-2a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (a) \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a^2-2a+1 \end{vmatrix} (-1)$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-2a \end{vmatrix} = -(a^2-2a).$$ (produkten av diagonalelementen)

$\therefore$ $\det A \neq 0$ omm. $a \neq 0$ och $a \neq 2$.

Dvs vi har en entydig lösn. precis då $a \neq 0, 2$.

ii) Vi kan ha mer än en lösning om $a=0$ eller $a=2$.

Vi utför nu samma radoperationer på den utökade koefficientmatrisen som på determinanten ovan.

Detta ger

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & a & b \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-2a & ab-a+2 \end{array}\right]$$

i) $a=0$: sista raden $\Rightarrow$ $0 = 0+2$ ej möjligt!

lösning saknas

ii) $a=2$: sista rad $\Rightarrow$ $0 = 2b$, $\therefore$ $b=0$

Detta ger också att u blir en fri variabel och vi har oändligt många lösningar

$\longrightarrow$

6 Vi har

$$1 = \det(P^{-1}P) = (\det P^{-1})\cdot(\det P) = [P^{-1} = P^T] = \det P^T \cdot \det P$$

eftersom $\det P = 1$ så följer att $\underline{\det P^T = 1}$

Vi undersöker ekvationen

$$PX = X \qquad \left(\begin{matrix}\text{Vi vill ta reda på om} \\ \lambda = 1 \text{ är ett egenvärde}\end{matrix}\right)$$

$$(P-I)X = 0$$

Denna har en ickeTrivial lösning omm. $\det(P-I)$ (

Men

$$\det(P-I) = \det P^T \cdot \det(P-I) = \det(\underbrace{P^TP}_{=I} - P^T) =$$

$$= \det(I-P^T) \overset{1)}{=} \det((I-P)^T) \overset{2)}{=} \det(I-P) =$$

$$= \det(-(P-I)) \overset{3)}{=} (-1)^n \det(P-I) \quad (n = \#\,\text{rader})$$

$$= -\det(P-I) \quad \text{ty } n \text{ är } \underline{\text{udda}}$$

Dvs $2\det(P-I) = 0$, $\underline{\det(P-I) = 0}$

Detta visar att $\lambda = 1$ är ett egenvärde till P.

$$\left[\begin{matrix} 1) & (A+B)^T = A^T + B^T \\ 2) & \det A^T = \det A \\ 3) & \det \lambda A = \lambda^n \det A \end{matrix}\right)$$

TMA 660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri för F1
Datum: 2000-01-14, kl. 8.45 - 12.45.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Greger Cronquist, tel. 0740-459022.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

1.(a) Bestäm ekvationen för det plan som går genom den räta linjen

$$x+5=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{2}$$

och är parallellt med den räta linjen

$$\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2y-3z+5=0 \end{cases}. \qquad (4p)$$

(b) Bestäm origos spegelbild i planet från deluppgift (a). (4p)

2. Lös för varje värde på λ ekvationssystemet

$$\begin{cases} -\lambda x_1 & & -\ 2x_3 & +\ 2x_4 & = 0 \\ -3x_1 & +(4-\lambda)x_2 & -\ 3x_3 & +\ 3x_4 & = 0 \\ -4x_1 & & +(2-\lambda)x_3 & +\ 4x_4 & = 0 \\ -2x_1 & & +\ 2x_3 & +(4-\lambda)x_4 & = 0 \end{cases}. \qquad (8p)$$

3. Ekvationen

$$z^3-(1-i)z^2-(2-3i)z-10i=0$$

har en reell rot. Lös ekvationen. (8p)

4. Bestäm parametern λ så att vektorn $(7,-2,\lambda)$ kan uttryckas som linjärkombination av vektorerna $(2,3,5)$, $(3,7,8)$, $(1,-6,1)$. (7p)

5. Beräkna determinanten av typ $n\times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (8p)$$

6. Låt α vara ett komplext tal sådant att $\alpha+\frac{1}{\alpha}=2\cos\phi$ för något reellt ϕ. Visa att $\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n}=2\cos n\phi$ för varje naturligt tal n. (7p)

7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för skalär produkt (inkl. projektionsformeln). (6p)

8. Formulera och bevisa Cramers regel. (8p för godtyckligt n; 5p för $n=3$)

/JM

Linjär algebra och geometri F1

14/11-2000

Lösningar

(1) En vektor, parallell med den första linjen, är $(1,4,2)$, en vektor, parallell med den andra är

$$(2,-1,1)\times(1,2,-3) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= e_1 + 7e_2 + 5e_2 = (1,7,5)$$

En normalvektor till det sökta planet:

$$(1,4,2)\times(1,7,5) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 6e_1 - 3e_2 + 3e_3 = (6,-3,3) \parallel (2,-1,1)$$

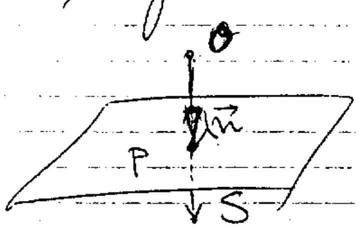
$\Rightarrow$ planet har ekvation $2x-y+z+d=0$

En pkt i planet: $(-5,3,1)$

(se den första linjen)

$\Rightarrow -10-3+1+d=0 \Rightarrow d=12$

$\Rightarrow$ planets ekvation $2x-y+z+12=0$;



$P \in$ planet; $OP \perp$ planet

$\vec{OP} = \lambda(2,-1,1) \Rightarrow P=(2\lambda,-\lambda,\lambda)$

$4\lambda+\lambda+\lambda+12=0 \Rightarrow \lambda=-2$

$\Rightarrow P=(-4,2,-2)$; $\vec{OS}=2\vec{OP} \Rightarrow \boxed{S=(-8,4,-4)}$

② Ett kvadratiskt homogent linjärt ekvationssystem har endast den triviala lösningen om koefficientmatricens determinant $\neq 0$. Vi bestämmer därför de λ för vilka det $A = 0$: ②

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 4-\lambda & -3 & 3 \\ -4 & 0 & 2-\lambda & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -4 & 2-\lambda & 4 \\ -2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\Big[-\lambda(2-\lambda)(4-\lambda) + \cancel{16} - \cancel{16} + 4(2-\lambda) + 8\lambda - 8(4-\lambda)\Big] =$$

$$= (4-\lambda)\left[-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 24\right] =$$

$$= (-\lambda+4)\left[-\lambda(\lambda^2-4) + 6(\lambda^2-4)\right] =$$

$$= (\lambda-4)(\lambda-6)(\lambda+2)(\lambda-2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4, \quad \lambda_4 = 6$$

1) $\lambda_1 = -2$: $\cdot\frac{1}{2}$, $+$, $\cdot\frac{1}{3}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 6 & -3 & 3 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}} x = 0$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3

$\Rightarrow x_4 = 0, \quad x_3 = t, \quad x_2 = t, \quad x_1 = t$

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2 = 2$: $\begin{array}{l} :(-\frac{1}{2}) \\ \cdot 3 \\ \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -3 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$ $x = 0$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_4 = s, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = s$

$$\Rightarrow x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $\lambda_3 = 4$: $\begin{array}{l} :\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ :\frac{1}{2} \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ -4 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$ $x = 0$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1)\,(-2) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_4 = 0 \ ; \ x_3 = 0 \ , \ x_2 = p \ , \ x_1 = 0$

$x = p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\lambda_4 = 6$:

$$\begin{array}{c} \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \cdot\frac{1}{4} \\ (-\frac{1}{2}) \end{array} \begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & -3 & 3 \\ -4 & 0 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \cdot 3 \quad (-1) \\ + \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_4 = q \ , \ x_3 = q \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_1 = 0$

$$\Rightarrow x = q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\lambda \neq -2; 2; 4; 6$: endast trivial lösning

$\lambda = -2$: $x = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda = 2$: $x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda = 4$: $x = p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda = 6$: $x = q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(p, q, s, t \in \mathbb{R})$

3. $a \in \mathbb{R}$; $a^3 - (1-i)a^2 - (2-3i)a - 10i = 0$ (S)

$\Rightarrow$ Re ... $= 0$ och Im ... $= 0$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^3 - a^2 - 2a = 0 \\ a^2 + 3a - 10 = 0 \end{array} \right.$$

$$a^3 - a^2 - 2a = a(a^2 - a - 2) = a(a-2)(a+1)$$

$$a^2 + 3a - 10 = (a+5)(a-2)$$

$\Rightarrow$ gemensamt nollställe till Re- och Im-delen är endast $\boxed{a = 2 = z_3}$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} z^3 - (1-i)z^2 - (2-3i)z - 10i \;/\; z - 2 = z^2 + (1+i)z + 5i \\ -\underline{z^3 - 2z^2} \\ (1+i)z^2 - (2-3i)z - 10i \\ -\underline{(1+i)z^2 - (2+2i)z} \\ 5iz - 10i \\ -\underline{5iz - 10i} \\ 0 \end{array}$$

Kvadratkomplettering ger:

$$z^2 + (1+i)z + 5i = \left(z + \frac{1+i}{2}\right)^2 - \frac{(1+i)^2}{4} + 5i =$$

$$= \left(z + \frac{1+i}{2}\right)^2 - \frac{\cancel{1} + 2i - \cancel{1}}{4} + 5i =$$

$$= \left(z + \frac{1+i}{2}\right)^2 + i\,\frac{9}{2} = 0$$

$$\left(z + \frac{1+i}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow z_1 + \frac{1+i}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} - i\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = 1 - 2i}$$

$$z_2 + \frac{1+i}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)/2} = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$ 6

$$= -\frac{3}{2} + i\,\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = -2 + i}$$

---

4. $(7,-2,\lambda) = \alpha(2,3,5) + \beta(3,7,8) + \gamma(1,-6,1)$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{aligned} 2\alpha + 3\beta + \gamma &= 7 \\ 3\alpha + 7\beta - 6\gamma &= -2 \\ 5\alpha + 8\beta + \gamma &= \lambda \end{aligned}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array}\right) \overset{(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & -7 & -9 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -9 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array}\right) \overset{(-2),\,(-5)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -9 \\ 0 & -\cancel{5}\,1 & \cancel{15}\,3 & \cancel{25}\,5 \\ 0 & -12 & 36 & \lambda+45 \end{array}\right) \overset{(-12)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -9 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-15 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ $\exists$ konstanter α, β, γ med den önskade egenskapen omm $\lambda = 15$.

---

5. Subtrahera rad 1 från övriga rader :

7

$$\text{determinanten} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = \text{(addera rader } 2 \dots n \text{ till rad 1)}$$

$$= \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = n(-1)^{n-1}$$

---

6. Låt $\alpha = re^{i\theta}$

$\Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} =$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) =$

$= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = 2\cos\varphi$

h.l. reellt $\Rightarrow$ Im (v.l.) $= 0$

$\Rightarrow \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = 0$

1) $r - \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

(ty $r > 0$)

$\Rightarrow \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} = e^{ni\theta} + e^{-ni\theta} = 2\cos n\theta$

$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2\cos\theta = 2\cos\varphi \Rightarrow \cos\theta = \cos\varphi$

$\Rightarrow \theta = \pm\varphi + 2\pi \Rightarrow \sin\theta = \pm\sin\varphi$

$\Rightarrow e^{i\theta} = e^{\pm i\varphi} \Rightarrow e^{ni\theta} = e^{(\pm 1)^n ni\varphi}$

$\Rightarrow \cos n\theta + i\sin n\theta = \cos n\varphi + i(\pm 1)^n \sin n\varphi$

$\Rightarrow \cos n\theta = \cos n\varphi$ (realdelar)

$\Rightarrow \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} = 2\cos n\theta = 2\cos n\varphi$

2) $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi \Rightarrow \cos\theta = (-1)^k$

$\Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} = \left(r + \frac{1}{r}\right)(-1)^k = 2\cos\varphi$

$\Rightarrow \left|\underbrace{r + \frac{1}{r}}_{>0}\right| = 2|\cos\varphi| \leq 2\cdot 1$

$\Rightarrow 0 < r + \frac{1}{r} \leq 2$

$\Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

(se 1))

TMA 660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri för F1
Datum: 1999-10-23, kl. 14.15 - 18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Fredrik Altenstedt, ankn. 5379.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. (a) Visa att punkterna $A(2,-3,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(-4,5,6)$, $D(2,-3,6)$ bildar en plan fyrhörning. (2p)
(b) Bestäm den ortogonala projektionen P' av punkten $P(1,0,1)$ på planet som går genom A, B, C, D. (6p)

2. Lös för varje värde på λ och μ ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = \lambda \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_2 + 2x_3 + \mu x_4 = 1 \end{cases} \qquad (8p)$$

3. Låt A och B vara $n \times n$ matriser och antag att A är inverterbar. Visa att

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)\,. \qquad (7p)$$

4. Ekvationen $z^4 - 3z^2 - 6z - 2 = 0$ har två rötter vilkas kvot är i. Lös ekvationen. (7p)

5. Bestäm λ så att vektorerna

$$\begin{gathered}(\lambda+1, \lambda, \lambda, \ldots, \lambda), \\ (\lambda, \lambda+\tfrac{1}{2}, \lambda, \ldots, \lambda), \\ (\lambda, \lambda, \lambda+\tfrac{1}{3}, \ldots, \lambda), \\ \ldots \\ (\lambda, \lambda, \lambda, \ldots, \lambda+\tfrac{1}{n})\end{gathered}$$

blir linjärt beroende. (8p)

6. Givet är den algebraiska ekvationen

$$(z-\alpha)^n + e^{i\theta}(z+\alpha)^n = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att alla lösningar ligger på en rät linje genom origo (i det komplexa talplanet). (4p)
(b) Lös ekvationen. (4p)

7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektoriell produkt. (6p)

8. (a) Visa att ett homogent linjärt ekvationssystem alltid är lösbart. (2p)

(b) Visa att ett kvadratiskt homogent linjärt ekvationssystem med inverterbar koefficientmatris endast har den triviala lösningen (= nollösningen). (3p)

(c) Visa att ett homogent linjärt ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar. (3p)

JM

TMA660 **Linjär algebra & geometri F1** (1)

23/10 - 99

Lösningar

1. (a) $\vec{AB} = (-3, 4, 0)$

$\vec{AC} = (-6, 8, 5)$

$\vec{AD} = (0, 0, 5)$

den skalära trippelprodukten:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ vektorerna LB $\Rightarrow$ de fyra punkterna ligger i samma plan

(b) normalvektor till planet:

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

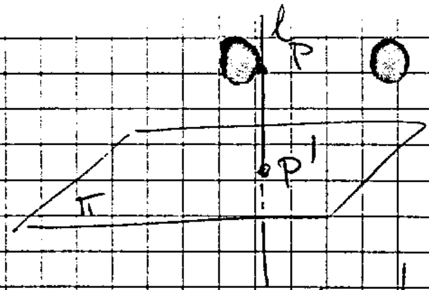
$$= 20 e_1 + 15 e_2 + 0 \cdot e_3 \parallel (4, 3, 0)$$

planet: π: $4x + 3y = d$

Sätt in A: $8 - 9 = -1 \Rightarrow d = -1$

$\Rightarrow$ planet har ekvation

π: $4x + 3y + 1 = 0$



Ekvationen för den räta linjen l genom P, $\perp \pi$:

$$l: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 0 + 3t \\ z = 1 \end{cases}$$

$P' = l \cap \pi$; vi söker t s.a. punkten från l ligger i π:

$$4(1+4t) + 3(0+3t) + 1 = 0$$

$$25t = -5$$

$$t = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow P'\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right).$$

---

(2) Gausseliminera:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & \mu & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 6-2\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & \mu & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 6-2\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-6 & -11+4\lambda \end{array}\right)$$

(i) $\mu \neq 6$: entydig lösning $\forall \lambda$

$$x_4 = \frac{4\lambda - 11}{\mu - 6}$$

$$x_3 = 4 - x_4 = 4 - \frac{4\lambda - 11}{\mu - 6}$$

$$x_2 = 6 - 2\lambda - 3x_4 - x_3 =$$

$$= 6 - 2\lambda - 3\,\frac{4\lambda - 11}{\mu - 6} - 4 + \frac{4\lambda - 11}{\mu - 6} =$$

$$= 2 - 2\lambda - 2\,\frac{4\lambda - 11}{\mu - 6}$$

$$x_1 = \lambda - x_4 - x_2 = \lambda - \frac{4\lambda - 11}{\mu - 6} - 2 + 2\lambda +$$

$$+ 2\,\frac{4\lambda - 11}{\mu - 6} = 3\lambda - 2 + \frac{4\lambda - 11}{\mu - 6}$$

(ii) $\mu = 6$, $\lambda \neq \frac{11}{4}$:

ingen lösning

(pivotelement i sista kolumnen)

(iii) $\mu = 6$, $\lambda = \frac{11}{4}$: oändligt många lösningar

fri variabel : $x_4 = t$

$$x_3 = 4 - t$$

$$x_2 = 6 - 2 \cdot \frac{11}{4_2} - 3x_4 - x_3 =$$

$$= \frac{1}{2} - 3t - 4 + t = -\frac{7}{2} - 2t$$

$$x_1 = \frac{11}{4} - x_4 - x_2 = \frac{11}{4} - t + \frac{7}{2} + 2t =$$

$$= \frac{25}{4} + t$$

3. $v.l. = (A+B)A^{-1}(A-B) =$

$= (AA^{-1})A - (AA^{-1})B + B(A^{-1}A) - BA^{-1}B =$

$= A - \cancel{B} + \cancel{B} - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B$

$h.l. = (A-B)A^{-1}(A+B) =$

$= ((AA^{-1})A) + (AA^{-1})B - B(A^{-1}A) - BA^{-1}B =$

$= A + \cancel{B} - \cancel{B} - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B = v.l.$

(vi har använt den distributiva lagen och den associativa lagen)

4. Kalla de två rötterna för α och $i\alpha$; då har vi

$$\alpha^4 - 3\alpha^2 - 6\alpha - 2 = 0$$

$$\alpha^4 + 3\alpha^2 - 6\alpha i - 2 = 0 \quad (\text{ty } i^4 = 1,\ i^2 = -1)$$

Subtrahera:

$$-6\alpha^2 - 6\alpha(1-i) = 0$$

$$\alpha(\alpha + (1-i)) = 0$$

$\alpha = 0$ är uppenbarligen ingen rot

eventuellt kan $\alpha = -1+i$ vara det

$$i(-1+i) = -1-i$$

Om $-1 \pm i$ är rötter så måste v.l. vara delbart med $(z-(-1+i))(z-(-1-i)) =$

$$= z^2 + 2z + 2$$

Polynomdivision:

$$z^4 - 3z^2 - 6z - 2 \;/\; z^2 + 2z + 2 = z^2 - 2z - 1$$

$$\begin{array}{l} z^4 + 2z^3 + 2z^2 \\ \hline -2z^3 - 5z^2 - 6z - 2 \\ -2z^3 - 4z^2 - 4z \\ \hline -z^2 - 2z - 2 \\ -z^2 - 2z - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\Rightarrow -1 \pm i$ är verkligen rötter

Övriga två rötter:

sätt $z^2 - 2z - 1 = 0$

$$(z-1)^2 - 1 - 1 = 0$$

$$z_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$$

---

5. Det som krävs är alltså att hitta λ s.a. $\exists$ icke-trivial (icke-noll) lösning till

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda+\frac{1}{2} \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda+\frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gausselimination ger:

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+\frac{1}{2} & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+\frac{1}{3} & \dots & \lambda & \lambda \\ & & & \dots & & \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda+\frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & -\frac{1}{n} \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n} \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda+\frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{matrix} (-\lambda) \\ (-2\lambda) \\ (-3\lambda) \\ \dots \\ (-(n-1)\lambda) \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & -\frac{1}{n} \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix}, \quad \text{där}$$

$$\Lambda_n = \lambda + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\lambda + \frac{2}{n}\lambda + \ldots + \frac{n-1}{n}\lambda =$$

$$= \lambda\left(1 + \frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n}\right) + \frac{1}{n} =$$

$$= \lambda \cdot \frac{1+2+\ldots+(n-1)+n}{n} + \frac{1}{n}$$

För existens av icke-trivial lösning är det nödvändigt och tillräckligt att $\Lambda_n = 0$; det ger:

$$\lambda \cdot \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\cancel{n}} = -\frac{1}{\cancel{n}}$$

$$\lambda = -\frac{2}{n(n+1)}$$

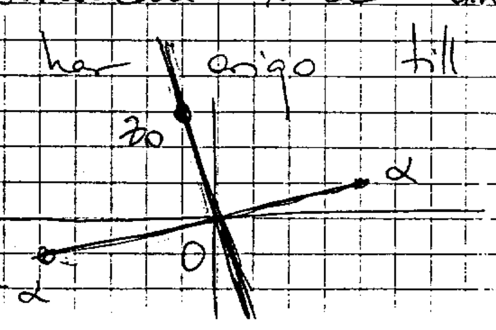
---

6. (a) Antag att z_0 är en rot till ekvationen; då gäller

$$|z_0 - \alpha|^n = \underbrace{|-e^{i\theta}|}_{=1} \cdot |z_0 + \alpha|^n$$

$$\Leftrightarrow \quad |z_0 - \alpha| = |z_0 + \alpha|,$$

d.v.s. z_0 befinner sig på samma avstånd från α som från $-\alpha$. Det betyder att z_0 ligger på mittpunktsnormalen till sträckan med ändpunkter α och $-\alpha$ (som har origo till mittpkt).



(b) $\left(\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right)^n = -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$ (för $z \neq -\alpha$)

$\Leftrightarrow \quad w^n = e^{i(\theta+\pi)}$, där $w = \frac{z-\alpha}{z+\alpha}$

(för $z \neq -\alpha$)

$$w_k = e^{i[(\theta+\pi)+2k\pi]/n} = e^{i(\theta+(2k+1)\pi)/n}$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$

$w = \frac{z-\alpha}{z+\alpha}$; lös ut z :

$$wz + w\alpha = z - \alpha$$

$$z = \alpha \frac{1+w}{1-w} \quad (w \neq 1)$$

Rötterna: $z_k = \alpha \dfrac{1 - e^{i(\theta+(2k+1)\pi)/n}}{1 + e^{i(\theta+(2k+1)\pi)/n}}$, $k = 0, \ldots, n-1$

$z = -\alpha$: $(-2\alpha)^n + e^{i\theta} \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow$ ekvationen blir $z^n(1 + e^{i\theta}) = 0$

$\theta = \pi + 2k\pi$: alla z rötter

$\theta \neq \pi + 2k\pi$: $z = 0$

$w = 1$ leder också till $\alpha = 0$.