MINSTA KVADRAT METODEN

TMA660 CHALMERS

1. Metoden

Låt $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ är olösbar system av m linjära ekvationer med n variabler. Då har matrisen A n kolonner som är m-dimensionella vektorer medan $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$.

Observation 1. *Ekvationssystemmet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ har lösningar om och endast om $\overrightarrow{b} \in Col(A)$.*

Om nu systemmet är olösbart kan vi åtminståne hitta en vektor i $Col(A)$ som ligger närmast $\overrightarrow{b}$ (se bilden).

Då $\widehat{b} \in Col(A)$, det finns $\widehat{x}$ sådan att $A\widehat{x} = \widehat{b}$. Den $\widehat{x}$ kallar vi för lösning av $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ trots att egentligen $A\widehat{x} = \widehat{b} \neq \overrightarrow{b}$. (Obs! det kan finnas mer än en lösning).

Observation 2. *Konstruktionen ger att för alla $x \in \mathbb{R}^n$ gäller*

$$|Ax - \overrightarrow{b}| \geq |A\widehat{x} - \overrightarrow{b}| = |\widehat{b} - \overrightarrow{b}|.$$

Hade vi kunnat på ett enkelt sätt räkna ut $\widehat{b}$, skulle vi görs så , och sedan hade vi kunnat lösa $A\widehat{x} = \widehat{b}$, men tyvärr kan vi inte det. Den enda vi vet är att $\widehat{b} - \overrightarrow{b}$ är vinkelrätt mot $Col(A)$[1].

Observation 3. *Vektorn $\widehat{b} - \overrightarrow{b}$ är vinkelrätt mot $Col(A)$ omm $\widehat{b} - \overrightarrow{b}$ är vinkelrätt mot varje kolonn av A. Och detta händer omm $\widehat{b} - \overrightarrow{b}$ är vinkerätt mot varje rad i A^T.*

Betrakta $A^T(\widehat{b} - \overrightarrow{b})$. Eftersom vi gångrar rader av A^T med $(\widehat{b} - \overrightarrow{b})$ och de är vinkelrätta, så får vi 0.

Nu, vet vi att $A^T(\widehat{b} - \overrightarrow{b}) = A^T\widehat{b} - A^T\overrightarrow{b} = 0$, dvs $A^T\widehat{b} = A^T\overrightarrow{b}$. För den $\widehat{x}$ som vi letar är $A\widehat{x} = \widehat{b}$, altså $A^TA\widehat{x} = A^T\widehat{b}$. Ekvationssystem $A^TA\widehat{x} = A^T\overrightarrow{b}$ gäller alltsåför alla lösningar till $A\widehat{x} = \widehat{b}$.

Observation 4. *Ekvationen $A^TA\widehat{x} = A^T\widehat{b}$ har någon lösning, för att $\widehat{b}$ finns och $\widehat{b} \in Col(A)$ (eftersom vi har valt $\widehat{b}$ så från början).*

2. Entydlighet av lösningen.

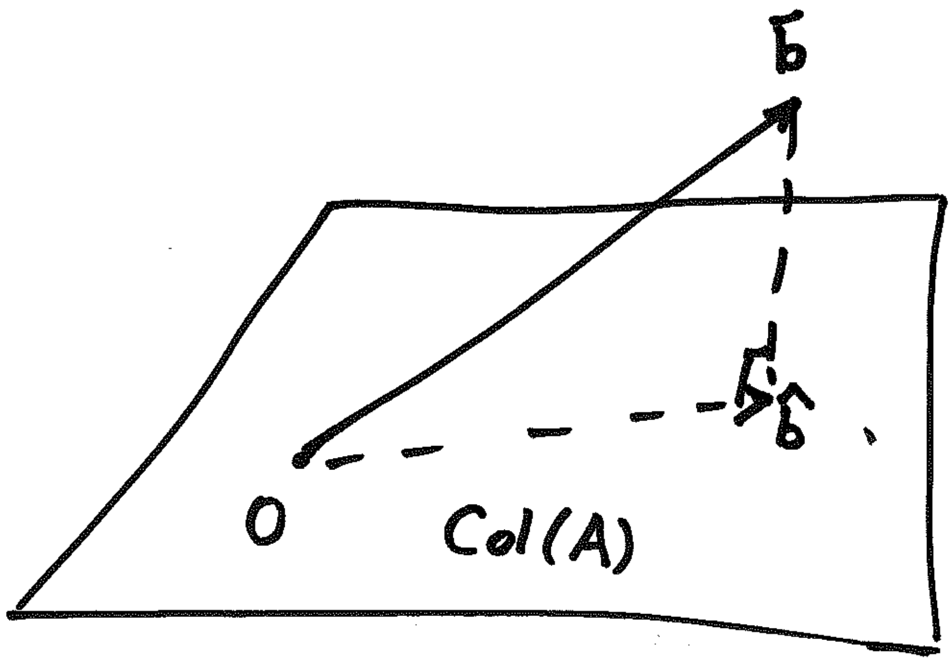
Låt $A^TAx = A^TAx^*$. Då måste $A^T(Ax - Ax^*) = 0$, dvs. $Ax - Ax^*$ är vinkelrätt mot alla rader i A^T, vilket är samma som kolonner i A. Altså är $Ax - Ax^*$ vinkelrätt mot $Col(A)$. Men å andra sida $(Ax - Ax^*) \in Col(A)$. En vektor kan vara vinkelrätt till sig sjlv endast om den är $\overrightarrow{0}$. Vi har därmed visat att $Ax = Ax^*$, för vilka som helst lösningar av $A^TAx = A^T\overrightarrow{b}$.

[1]Egentligen det måste bevisas, men vi kör på geometrisk intuition från bilden.

Sedan förra avsnit vet vi att någon lösning av $A^T Ax = A^T \overrightarrow{b}$ är sådan att $A^T x = \widehat{b}$, men nu har vi också visat att för alla lösningar av $A^T Ax = A^T \overrightarrow{b}$ gäller $Ax = \widehat{b}$.

Sammanfattning: Ekvationssystemmet $A^T Ax = A^T \overrightarrow{b}$ är lösbart och alla dess lösningar avbildas av A i samma vektor. Lösningar av $A^T Ax = A^T \overrightarrow{b}$ minimerar $|Ax - \overrightarrow{b}|$.

MARIA ROGINSKAYA



Facit

1. a) svart=3,5;vit=4,5; b) iii; 2 a) 10,1/2,0;b)ja; 3 a) -2,1,0; b) $|AX - B|$.