LINJÄR ALGEBRA

Och

GEOMETRI

R Öv
2001
Sidor: 75
Pris: 40kr

1.3
$$\begin{cases} x-2y+z=1 & (a)\\ 2x-6y+6z=2 & (b)\\ -3x+5y+z=3 & (c)\end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y+z=1 & (a)\\ 2x-6y+6z-2(x-2y+z)=2-2\cdot 1 & (b)-2\times(a)\to(b')\\ -3x+5y+z+3(x-2y+z)=3+3\cdot 1 & (c)+3\times(a)\to(c')\end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y+z=1 & (a)\\ -2y+4z=0 & (b')\\ -y+4z=6 & (c')\end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y+z=1 & (a)\\ 2y-4z=0 & (b')\\ -y+4z+\frac{1}{2}(2y-4z)=6 & (c')+\frac{1}{2}\times(b')\to(c'')\end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y+z=1 & (a)\\ 2y-4z=0 & (b)\\ 2z=6 & (c'')\end{cases}$$

$$\begin{cases} z=3\\ y=\frac{4}{2}\cdot 3=6\\ x=1+2\cdot 6-3=10\end{cases}$$

1.4
$$\begin{cases} x-2y+z=1 & (a)\\ 2x-6y+6z=2 & (b)\\ -3x+5y-z=3 & (c)\end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y+z=1 & (a)\\ 2x-6y+6z-2(x-2y+z)=2-\_\cdot 1 & (b)-2\times(a)\to(b')\\ -3x+5y-z+3(x-2y+z)=3+3\cdot 1 & (c)+3\times(a)\to(c')\end{cases}$$

(2)

1.4 $\begin{cases} x-2y+z=1 & (a) \\ \quad -2y+4z=0 & (b') \\ \quad -y+2z=6 & (c') \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y+z=1 & (a') \\ \quad y-2z=0 & (b') \\ \quad -y+2z+(y-2z)=6+0 \implies 0=6\ ! & (c')+(b')\to ! \end{cases}$

lösning saknas

1.7 $\begin{cases} x-y-2z+2w=-1 & (a) \\ -3x+4y+7z-12w=2 & (b) \\ 2x-4y-3z-2w=-12 & (c) \\ 5x-y-3z-31w=-20 & (d) \end{cases}$

$\begin{cases} x-y-2z+2w=-1 & (a)\to(a) \\ \quad y+z-6w=-1 & (b)+3\times(a)\to(b') \\ \quad -2y+z-6w=-10 & (c)-2\times(a)\to(c') \\ \quad 4y+7z-41w=-15 & (d)-5\times(a)\to(d') \end{cases}$

$\begin{cases} x-y-2z+2w=-1 & (a) \\ \quad y+z-6w=-1 & (b) \\ \qquad 3z-18w=-12 & (c')+2\times(b')\to(c'') \\ \qquad 3z-17w=-11 & (d')-4\times(b')\to(d'') \end{cases}$

$\begin{cases} x-y-2z+2w=-1 & (a) \\ \quad y+z-6w=-1 & (b') \\ \qquad 3z-18w=-12 & (c'') \\ \qquad\quad w=1 & (d'')-(c'')\to(d''') \end{cases}$

$\begin{cases} w=1 \\ z=-4+6\cdot 1=2 \\ y=-1-2+6\cdot 1=3 \\ x=-1+3+2\cdot 2-2\cdot 1=4 \end{cases}$

1.10
$$\begin{cases} x+2y-z=1 & \text{(a)} \\ 3x-y-2z=9 & \text{(b)} \\ 3x+4y+7z=-5 & \text{(c)} \\ 2x-2y-z=7 & \text{(d)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 & \text{(a)} \\ -7y+z=6 & \text{(b)}-3\times\text{(a)} \to \text{(b')} \\ -2y+10z=-8 & \text{(c)}-3\times\text{(a)} \to \text{(c')} \\ -6y+z=5 & \text{(d)}-2\times\text{(a)} \to \text{(d')} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 & \text{(a)} \\ -7y+z=6 & \text{(b')} \\ 68z=-68 & 7\text{(c')}-2\times\text{(b')} \to \text{(c'')} \\ 1z=-1 & 7\times\text{(d')}-6\times\text{(b')} \to \text{(d'')} \equiv \text{(c'')} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=-1 \\ y=-\frac{1}{7}(6-(-1))=-1 \\ x=1+(-1)-2(-1)=2 \end{cases}$$

1.12
$$\begin{cases} x-y+2z=4 & \text{(a)} \\ 2x+y-z=1 & \text{(b)} \\ 3x+3y-4z=-2 & \text{(c)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+2z=4 & \text{(a)} \\ 3y-5z=-7 & \text{(b)}-2\times\text{(a)} \to \text{(b')} \\ 6y-10z=-14 & \text{(c)}-3\times\text{(a)} \to \text{(c')} \equiv 2\times\text{(b')} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+2z=4 & \text{(a)} \\ 3y-5z=-7 & \text{(b')} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=t \\ y=\frac{1}{3}(-7+5t)=\frac{1}{3}(5t-7) \\ x=4-2t+\frac{1}{3}(5t-7)=\frac{1}{3}(5-t) \end{cases}$$

1.15 $\begin{cases} x+2y+3z+4w=1 \\ y-3z-w=5 \end{cases}$ 4 obekanta, 2 ekvationer: vi inför 2 parametrar s och t

$$\begin{cases} w=t \\ z=s \\ y=3s+t+5 \\ x=-2(3s+t+5)-3s-4t+1=-9-9s-6t \end{cases}$$

1.26 $\begin{cases} x+ay=2 \\ ax+4y=4 \\ x-by=a \end{cases}$ 2 obekanta, ∞ många lösningar ⟺ 1 ekvation

alt.1) ekvationer plockas bort om de innebär $0=0$

alt.2) ekvationerna är identiska

$$\begin{cases} x+\boxed{a}y=\boxed{2} \\ x+\boxed{\frac{4}{a}}y=\boxed{\frac{4}{a}} \\ x-\boxed{b}y=\boxed{a} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=\frac{4}{a}=-b \\ 2=\frac{4}{a}=a \end{cases}$$

$\begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$ ger lösningen $\begin{cases} x=2-2t \\ y=t \end{cases}$

1.5
$$\begin{cases} 2x-6y+11z=35 & (a) \\ x-2y+z=2 & (b) \\ -3x+5y+z=8 & (c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-6y+11z=35 & (a) \\ 2y-9z=-31 & 2\times(b)-(a)\to(b') \\ -8y+35z=121 & 2\times(c)+3\times(a)\to(c') \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-6y+11z=35 & (a) \\ 2y-9z=-31 & (b') \\ -z=-3 & (c')+4\times(b')\to(c'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=3 \\ y=\frac{1}{2}(9\cdot 3-31)=-2 \\ x=\frac{1}{2}(35-11\cdot 3+6(-2))=-5 \end{cases}$$

1.18 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+y+2z=4 \\ x+ay+2z=0 \end{cases}$ byt för att ha 1:a pivot-elementet $\neq 0$ $\forall a$

$\begin{cases} x+y+z=1 & (a) \\ (1-a)y+(2-a)z=4-a & (b)-a\times(a)\rightarrow(b') \\ (a-1)y+z=-1 & (c)-(a)\rightarrow(c') \end{cases}$

$\begin{cases} x+y+z=1 & (a) \\ (1-a)y+(2-a)z=4-a & (b') \\ (3-a)z=3-a & (c')+(b')\rightarrow(c'') \end{cases}$

entydig lösning då alla pivot-element $\neq 0$

$\Leftrightarrow$ $a\neq 1$ och $a\neq 3$

$a=1$:

$\left.\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=3 \\ 2z=2 \end{cases}\right\} \Rightarrow z=3=1\ !$ lösning saknas

$a=3$:

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y-z=1 \\ 0=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=t \\ z=-1-2t \\ x=1-t-(-1-2t)=\underline{2+t} \end{cases}$

1.22 $\begin{cases} x-y+[illegible]z=1 & (a) \\ 2x-y+z=[illegible] & (b) \\ [illegible]x+y-z=[illegible] & (c) \end{cases}$

$$\begin{cases} x - y + az = 1 & (a) \\ \quad y + (1-2a)z = -3 & (b) - 2 \times (a) \to (b') \\ (1+a)y - (1+a^2)z = 1-a & (c) - a \times (a) \to (c') \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + az = 1 & (a) \\ y + (1-2a)z = -3 & (b') \\ [-(1+a^2) - (1-2a)(1+a)]z = 1-a + 3(1+a) & (c') - (1+a) \times (b') \to (c'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + az = 1 \\ y + (1-2a)z = -3 \\ (\underbrace{-1 - a^2 - 1 - a + 2a + 2a^2}) z = 4 + 2a \iff (a-1)(a+2)z = 4+2a \end{cases}$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \iff a = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 2} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2}$$

entydig lösning för $a \neq 1$, $a \neq -2$

$a = 1$:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \quad y - z = -3 \\ \qquad 0 = 6 \end{cases} \Rightarrow \text{lösning saknas}$$

$a = -2$:

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ \quad y + 5z = -3 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}$$

$z = t$: oändligt många lösningar

1.24
$$\begin{cases} x + ay + z = 1 & (a) \\ ax + y + z = a+1 & (b) \\ x - y + z = a+2 & (c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 & (a) \\ (1-a^2)y + (1-a)z = 1 & (b) - a \times (a) \to (b') \\ -(1+a)y = a+1 & (c) - (a) \to (c') \end{cases}$$

byt ordning på de obekanta: $(x, y, z) \to (x, z, y)$

$$\begin{cases} x + z + ay = 1 & (a) \\ (1-a)z + (1-a^2)y = 1 & (b') \\ -(1+a)y = a+1 & (c'') \end{cases}$$ triangulärt system för (x, z, y)

entydig lösning för $a \neq 1$, $a \neq -1$ (pivotelement $\neq 0$)

$a = 1$:

$$\begin{cases} x + z + y = 1 \\ 0 = 1 \\ -2y = 2 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ lösning saknas

$a = -1$:

$$\begin{cases} x + z - y = 1 \\ 2z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ y = t \\ x = 1 - \frac{1}{2} + t = \frac{1}{2} + t \end{cases}$$

1.25 $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 & (a) \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 & (b) \\ x_1 + x_2 = 2 & (c) \\ x_2 - x_3 = 3 & (d) \\ x_2 - x_4 = \text{[illegible]} & (e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 & (a) \\ x_2 = 4 & (b) + (a) \to (b') \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = -1 & (c) - (a) \to (c') \\ x_2 - x_3 = 3 & (d') = (d) \\ x_2 - x_4 = \text{[illegible]} & (e') = (e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 & (a) \\ x_2 = 4 & (b') \\ -x_3 - x_4 = -9 & (c') - 2\times(b') \to (c'') \\ -x_3 = -1 & (d') - (b') \to (d'') \\ x_4 = 1 & (e') - (b') \to (e'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 & (a) \\ x_2 = 4 & (b') \\ -x_3 - x_4 = -9 & (c'') \\ \left.\begin{aligned} x_4 &= 7 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow & x_4 = 7 = 1 : \text{lösning saknas} \end{cases}$$

1.9 $\begin{cases} x + y = -4 \\ x - 2y = 2 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ \left.\begin{aligned} -3y &= 6 \\ y &= 13 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y = -2 = 13\ ! : \text{lösning saknas} \end{cases}$$

1.14 $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 & (a) \\ 4x - 3y + 2z = 1 & (b) \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 & (a) \\ -9y - 6z = -9 & (b) - 2\times(a) \to (b') \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 3t \\ y = \frac{1}{9}(9 - 6\cdot 3t) = 1 - 2t \\ x = \frac{1}{2}(5 - 3(1-2t) - 4\cdot 3t) = 1 - 3t \end{cases}$$

2.5 Visa mittpunktsformeln:

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$,

där M är mittpunkt på sträckan AB, O godtycklig

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ — uppdelning av $\overrightarrow{OM}$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ — $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ty M mittpunkt på AB

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$ — uppdelning av $\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ — $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$

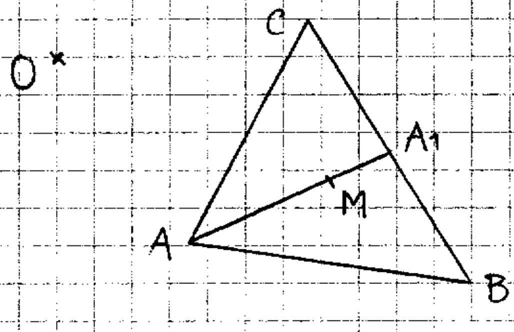
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$\square$

2.6 Visa tyngdpunktsformeln:

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$,

där M punkt på medianen AA_1 som delas den i förhållandet 2:1, O godtycklig



AA_1 median $\Leftrightarrow$ A_1 mittpunkt på BC (1)

delningsförhållande $2:1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$ (2)

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ — uppdelning av $\overrightarrow{OM}$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$ — enl. (2)

$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ — (1): mittpunktsformeln, tog

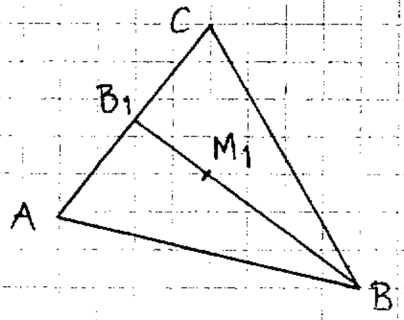
$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})$ — uppdelning av $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA})$ — $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$\square$

konsekvens: triangelns tre medianer skär varandra i M, denna delar dem var och en i förhållandet 2:1



kasta om A och B i beviset (och byt M mot M_1):

$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$

vi ser $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM}$ och alltså $M_1 = M$

motsvarande visas för medianen från C

$\square$

alternativ metod:

BB_1 median $\Leftrightarrow$ B_1 mittpunkt på AC

välj $O=B$ i mittpunktsformeln: $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$

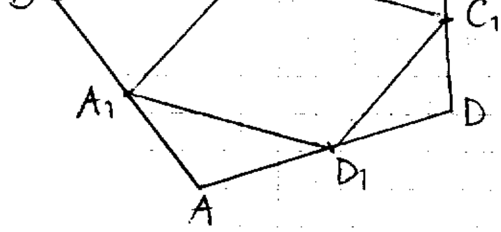
titta på tyngdpunktsformeln:

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3} \cdot 2\overrightarrow{BB_1}$

$\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$ $\Leftrightarrow$ M punkt på BB_1, delningsförhållande 2:1

idem för medianen från C

2.12 A, B, C, D punkter i rummet, A_1, B_1, C_1, D_1 mittpunkter enl. fig.



Visa att $A_1B_1C_1D_1$ är en parallellogram

$A_1B_1C_1D_1$ parallellogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$

$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1C})$ — B_1 mittpunkt på BC, välj $O = A_1$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1C})$ — A_1 mittpunkt på AB, $\overrightarrow{A_1B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA_1})$ — $\overrightarrow{A_1C} = -\overrightarrow{CA_1}$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}))$ — A_1 mittpunkt på AB, välj $O = C$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$ — $-\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}$, $-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC})$ — $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$ — uppdelning av $\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{D_1D} + 2\overrightarrow{DC_1})$ — D_1, C_1 mittpunkter på AD resp. C

$= \overrightarrow{D_1C_1}$

$\square$

2.18 b) Bestäm a så att $\vec{u}$ och $\vec{v}$ blir parallella

$\vec{u} = (a, -3)$, $\vec{v} = (2, 1-a)$

$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow k\vec{u} = \vec{v}$ för något k

$$k(a, -3) = (2, 1-a)$$

$$\begin{cases} ka = 2 \\ -3k = 1-a \end{cases}$$ (icke-linjärt system!)

$$\frac{a-1}{3} \cdot a = 2$$

$$a^2 - a - 6 = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ då $a = 3$ eller $a = -2$

c) $\vec{u} = (a, 3)$, $\vec{v} = (2, 1-a)$

$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} ka = 2 \\ 3k = 1-a \end{cases}$

$$\frac{1-a}{3} \cdot a = 2$$

$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff a^2 - a + 6 = 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 < 0$: inga reella rötter

$\vec{u}$ och $\vec{v}$ inte parallella för något a

2.20 b) $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ linjärt beroende om $\lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \vec{0}$ har icke-triviala lösningar (dvs. någon lösning $\neq \lambda_i = 0$)

$\vec{u}_1 = (0,1,1)$, $\vec{u}_2 = (1,0,1)$, $\vec{u}_3 = (1,1,0)$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0} \iff \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \text{(a)} \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & \text{(b)} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & \text{(c)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & \text{(b)} \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \text{(a)} \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & \text{(c)} - \text{(b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

entydigt lösbart med lösning $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ inte linjärt beroende $\iff$ linjärt oberoende

c) $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ (från uppg. b), $\vec{u}_4$ linjärt beroende?

$\vec{u}_4 = (3,3,2)$

[illegible] c) [illegible] $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ linjärt oberoende

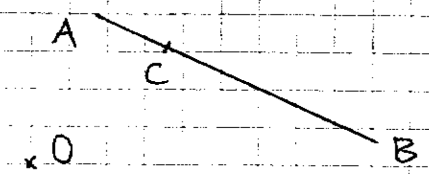
$\iff \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ utgör en bas (basatsen) för rummet

varje vektor kan skrivas som en linjärkombination av basvektorerna, speciellt kan $\vec{u}_4$ skrivas som en linjärkombination av $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$

$\iff \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ [illegible] linjärt beroende

2.4 C ligger på AB, 3 ggr så långt från B som från A

Visa att $\vec{OC} = \frac{3}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB}$



$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$ uppdelning av $\vec{OC}$

$= \vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{AB}$ ty $\vec{AC} = \frac{1}{4}\vec{AB}$

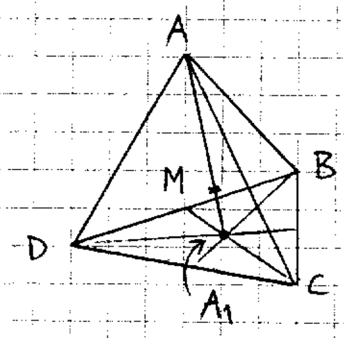
$= \vec{OA} + \frac{1}{4}(\vec{AO} + \vec{OB})$ uppdelning av $\vec{AB}$

$= \vec{OA} - \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB}$ $\vec{AO} = -\vec{OA}$

$= \frac{3}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB}$

$\square$

2.7



ABCD tetraeder

A_1 tyngdpunkt i BCD $\Leftrightarrow$ AA_1 median

M delar AA_1 i förhållandet 3:1

Visa att $\vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$

A_1 tyngdpunkt i BCD $\Leftrightarrow$ $\vec{OA_1} = \frac{1}{3}(\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$

(tyngdpunktsformeln, uppg 2.6)

M delar AA_1 i 3:1 $\Leftrightarrow$ M på AA_1, 3 ggr så långt från A som från A_1

$\Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{3}{4}\vec{OA_1}$ (se uppg 2.4)

alltså:

$\vec{OM} = \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{3}{4}\vec{OA_1}$

$= \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$

$= \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$

$\square$

Konsekvens: Tetraederns fyra medianer skär varandra i M, denna delar dem var och en i förhållandet 3:1 (4)

Kasta om A och B i beviset (och byt M mot M_1):

$\vec{OM_1} = \frac{1}{4}(\vec{OB} + \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD})$

vi har $\vec{OM_1} = \vec{OM}$ och alltså $M_1 = M$

motsvarande visas för medianerna från C och D (se även uppg 2.6) □

2.8 Triangeln ABC har tyngdpunkten M. Visa att $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$

tyngdpunktsformeln: $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

välj $O = M$: $\vec{OO} = \frac{1}{3}(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})$

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$$

2.17 c) $\vec{v} = (-9; -7; -3)$, $\vec{u_1} = (2; 1; -1)$, $\vec{u_2} = (1; 1; 1)$

$\vec{v}$ linjärkombination av $\vec{u_1}$ och $\vec{u_2}$ $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2} = \vec{v}$ har icke-triviala lösningar

$$\lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = -9 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -7 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = -9 \\ \lambda_2 = -5 \\ 3\lambda_2 = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = -9 \\ \lambda_2 = -5 \end{cases}$$

$$\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2=\vec{v} \iff \begin{cases}\lambda_2=-5\\ \lambda_1=-2\end{cases}$$

$\vec{v}$ är en linjärkombination av $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$

2.19 d) $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff k\vec{u}=\vec{v}$ för något $k\neq 0$

$$\begin{cases} ka=4\\ k(1+a)=2\\ 3k=-6\end{cases}$$

$$\begin{cases} k=-2\\ a=\frac{4}{k}=-2\end{cases}$$

kontr: $-2(1-2)=2 \rightarrow$ OK!

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ då $a=-2$

2.19 b) linjärt beroende i planet $\iff$ parallella vektorer

$\vec{u}=(6;-3)$, $\vec{v}=(-4;2)$

$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff k\vec{u}=\vec{v}$ för något $k\neq 0$

$$\begin{cases} 6k=-3\\ -4k=2\end{cases} \iff k=-\frac{1}{2}$$

$\vec{u}$ och $\vec{v}$ linjärt beroende

d) $\vec{u}_1=(1;0)$, $\vec{u}_2=(0;1)$, $\vec{u}_3=(7;5)$

$\vec{u}_1=\hat{e}_1$ och $\vec{u}_2=\hat{e}_2$ utgör en (ON-) bas för planet

$\vec{u}_3=7\hat{e}_1+5\hat{e}_2 \iff$ linjärt beroende

(Vi kan som alternativ lösning en sats som säger att tre eller fler vektorer i planet alltid är linjärt beroende.)

2.20c) två vektorer linjärt beroende $\Leftrightarrow$ parallella

$k\vec{u} = \vec{v}$ för något $k \neq 0$

$\vec{u} = (1;1;1)$, $\vec{v} = (3;1;2)$

$k\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = 1 \\ k = 2 \end{cases}$ inga lösningar!

$\therefore$ $\vec{u}$ och $\vec{v}$ linjärt oberoende

d) $\vec{u} = (1;0;2)$, $\vec{v} = (-2;0;-4)$

$k\vec{u} = \vec{v}$ för $k = -2$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ och $\vec{v}$ linjärt beroende

2.2[illegible]) $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ bas $\Leftrightarrow$ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ linjärt oberoende

$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow (k_1, k_2, k_3) = (0,0,0)$

$\vec{u}_1 = (5-\lambda; -1; -2)$, $\vec{u}_2 = (-1; 5-\lambda; -2)$, $\vec{u}_3 = (-2; -2; 2-\lambda)$

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (5-\lambda)k_1 - k_2 - 2k_3 = 0 \\ -k_1 + (5-\lambda)k_2 - 2k_3 = 0 \\ -2k_1 - 2k_2 + (2-\lambda)k_3 = 0 \end{cases}$$

byt ordning på ekvationerna för att alltid ha första pivotelementet $\neq 0$ (problem för $\lambda = 5$):

$$\begin{cases} -k_1 + (5-\lambda)k_2 - 2k_3 = 0 & (a) \\ -2k_1 - 2k_2 + (2-\lambda)k_3 = 0 & (b) \\ (5-\lambda)k_1 - k_2 - 2k_3 = 0 & (c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -k_1 + (5-\lambda)k_2 - 2k_3 = 0 & (a) \\ -2(6-\lambda)k_2 + (6-\lambda)k_3 = 0 & (b) - 2\times(a) \rightarrow (b) \\ \underbrace{(25+\lambda^2-10\lambda-1)}k_2 - 2(6-\lambda)k_3 = 0 \Leftrightarrow (6-\lambda)(4-\lambda)k_2 - 2(6-\lambda)k_3 = 0 & (c) + (5-\lambda)\times(a) \rightarrow (c) \end{cases}$$

$\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \pm \sqrt{25-24} = 5 \pm 1$

$$\begin{cases} -k_1 + (5-\lambda)k_2 - 2k_3 = 0 & (a) \\ -2(6-\lambda)k_2 + (6-\lambda)k_3 = 0 & (b) \\ [-4(6-\lambda) + (4-\lambda)(6-\lambda)]k_3 = 0 & (c')\times 2 - (4-\lambda)\times(b) \to (c'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} -k_1 + (5-\lambda)k_2 - 2k_3 = 0 \\ -2(6-\lambda)k_2 + (6-\lambda)k_3 = 0 \\ -\lambda(6-\lambda)k_3 = 0 \end{cases}$$

entydig lösning, $(k_1;k_2;k_3) = (0;0;0)$, om $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq$

$\Rightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ är en bas för $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 6$

3.2 använd mittpunktsformeln : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ (se uppg. 2.5

$O : (0;0;0)$

$A : (1;0;2) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (1-0; 0-0; 2-0) = (1;0;2)$

$B : (-1;2;2) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (-1;2;2)$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}[(1;0;2) + (-1;2;2)]$

$= \frac{1}{2}(0;2;4)$

$= (0;1;2)$

$M : (0;1;2)$ mittpunkt

3.3 b) använd tyngdpunktsformeln : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

a)

$O : (0;0;0)$

$A : (1;2;-1) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (1;2;-1)$

$B : (2;1;0) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (2;1;0)$

$C : (-1;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = (-1;1;1)$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}[(1;2;-1) + (2;1;0) + (-1;1;1)]$

$= \frac{1}{3}(2;4;0)$

$= (\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 0)$

$M : (\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 0)$ tyngdpunkt

(18)

3.6 b) Bestäm skärningspunkten mellan linjerna
$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -3t \end{cases}$ och $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 4+6t \end{cases}$

observera att parametrarna är olika!

$\begin{cases} 2+t_1 = 1-2t_2 \\ -3t_1 = 4+6t_2 \end{cases}$

$\begin{cases} t_1 + 2t_2 = -1 \\ -3t_1 - 6t_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow t_1 + 2t_2 = -1 = -\frac{4}{3}$! lösning saknas
ingen skärning

3.8

skär linjerna $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ och $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -1+t \end{cases}$ varandra?

$\begin{cases} 1 - t_1 = 1+t_2 \\ t_1 = t_2 \\ -t_1 = -1+t_2 \end{cases}$

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 0 \\ t_1 - t_2 = 0 \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = 0 = 1$! lösning saknas
ingen skärning

Parallellitet?

$l_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ { linjen går genom $P_0 : (1;0;0)$
har riktningsvektor $(-1;1;1)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}_1$ för alla punkter $P:(x;y;z)$ på linjen

$l_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ { linjen går genom $P_1 : (1;0;-1)$
har riktningsvektor $(1;1;1)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t\vec{v}_2$ för alla punkter $P:(x;y;z)$ på linjen

l_1 och l_2 parallella $\Leftrightarrow$ $\vec{v_1}$ och $\vec{v_2}$ parallella

$k\vec{v_1} = \vec{v_2}$ för något $k \neq 0$

$$\begin{cases} -k = 1 \\ k = 1 \\ -k = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{inga lösningar}$$

ingen parallellitet

3.10 b) $P:(0;1;2)$, $Q:(1;2;3)$, $R:(3;4;1)$

planet π bestäms av en punkt och två vektorer

alla punkter A i planet definieras av vektorn $\vec{PA}$, är en linjärkombination av $\vec{PQ}$ och $\vec{PR}$:

$$\vec{PA} = t_1\vec{PQ} + t_2\vec{PR}$$

$$\vec{PQ} = (1-0; 2-1; 3-2) = (1;1;1)$$

$$\vec{PR} = (3-0; 4-1; 1-2) = (3;3;-1)$$

$$\vec{PA} = (x-0; y-1; z-2)$$

$$\begin{cases} x-0 = t_1 + 3t_2 \\ y-1 = t_1 + 3t_2 \\ z-2 = t_1 - t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t_1 + 3t_2 \\ y = 1 + t_1 + 3t_2 \\ z = 2 + t_1 - t_2 \end{cases}$$

3.14 a) Gauss-eliminering av planets parameterform ger:

$$\begin{cases} x = -1 + s + t \\ y = -s + 2t \\ z = s - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} s + t = x + 1 \\ -s + 2t = y \\ s - t = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} s+t=x+1 \\ 3t=x+y+1 \\ -2t=z-x-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}(x+y+1)=-\frac{1}{2}(z-x-1)$$

$$x-2y-3z+1=0$$

planets ekvation kan alltså uttryckas $x-2y-3z+1=0$

3.15 skärning mellan plan och linje

$\pi: 2x+y-z-5=0$

$$l_1: \begin{cases} x=1-t \\ y=3t \\ z=2+t \end{cases}$$

sätt in linjens ekvation i planets:

$2(1-t)+3t-(2+t)-5=0 \Rightarrow -5=0$ lösning saknas

linjen l_1 skär inte planet π

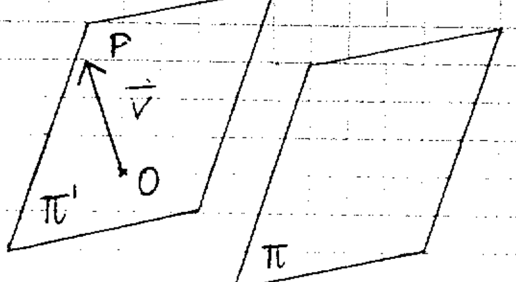
3.22 $l_1: x-1=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3} \quad (=t)$

på parameterform:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2+3t \end{cases} \quad \text{eller} \quad (x;y;z)=(1;1;2)+t\underbrace{(1;2;3)}_{\vec{v}}$$

$\pi: 3x+by+z-1=0$

linjen l_1 // planet $\pi \Leftrightarrow$ linjen l_1 // planet π', där π' // π och origo $\in \pi'$



π' // π

tag punkten P (se figur):

$\overrightarrow{OP}=\vec{v}$

linjen l_1 // $\vec{v}$ ty riktningsvektor

$\ell_1 \parallel \pi \iff P \in \pi'$

$\vec{OP} = (1;2;3) \Rightarrow P:(1-0;2-0;3-0) = (1;2;3)$

enl. sats 4 har π' ekvationen $3x + by + z + d' = 0$

vi vet att $O \in \pi' \Rightarrow 3\cdot 0 + b\cdot 0 + 0 + d' = 0$

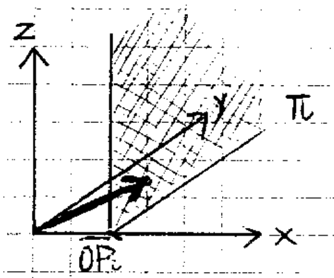
$$\pi' : 3x + by + z = 0$$

$P \in \pi' \iff 3\cdot 1 + b\cdot 2 + 3 = 0$

$$b = -3$$

linjen ℓ_1 parallell med planet π då $b = -3$

3.25 $P \in \ell : \vec{OP} = \vec{OP_0} + t\vec{v}$ där $P_0 \in \ell$ känd och $\vec{v}$ riktningsv



$\left.\begin{array}{l}\pi \parallel yz\text{-planet} \\ P_0 \in \pi\end{array}\right\} \vec{v} = (0, v_2, v_3)$

$\ell : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + tv_2 \\ z = 5 + tv_3 \end{cases}$ skär linjen $\ell_0 : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

OBS! olika t

$x = 1 = 2 + 3t_2 \Rightarrow t_2 = -\frac{1}{3}$

ℓ_0 skär π i punkten $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + 2(-\frac{1}{3}) = \frac{7}{3} \\ z = 1 + 2(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \end{cases}$

ℓ ligger i π och skär alltså ℓ_0 i $(1; \frac{7}{3}; \frac{1}{3})$

$\ell : t = \frac{y-2}{v_2} = \frac{z-5}{v_3} \Rightarrow \frac{v_2}{v_3} = \frac{\frac{7}{3} - 2}{\frac{1}{3} - 5} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{14}{3}} = \frac{-1}{14}$

välj $v_2 = -1$, $v_3 = 14$

en ekvation för ℓ är $(x;y;z) = (1;2;5) + t(0;-1;14)$

3.3 b) använd tyngdpunktsformeln: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

$O : (0;0;0)$

$A : (2;0;1) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (2;0;1)$

$B : (-1;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (-1;1;1)$

$C : (1;0;2) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = (1;0;2)$

$D : (3;1;4) \Rightarrow \overrightarrow{OD} = (3;1;4)$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}[(2;0;1) + (-1;1;1) + (1;0;2) + (3;1;4)]$

$= \frac{1}{4}(5;2;8)$

$= (\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; 2)$

$M : (\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; 2)$ Tyngdpunkt

3.5 b) $\ell : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{P_0P_1}$ där P_0, P_1 givna punkter på linjen

$\left.\begin{array}{l} P_0 : (1;1) \\ P_1 : (2;1) \end{array}\right\} \overrightarrow{P_0P_1} = (1;0) \Rightarrow \ell : (x;y) = (1;1) + t(1;0)$

$(x;y) = (1+t;1)$

c) $\ell : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{v}$ där P_0 given punkt, $\vec{v}$ given riktning

$(x;y) = (-2;0) + t(1;-5)$

$(x;y) = (t-2;-5t)$

d) $\ell : 2x - y = 5$

sätt $x = t \Rightarrow y = 2t - 5$

$(x;y) = (t; 2t-5)$

3.6 a) Bestäm skärningspunkten mellan linjerna

$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -t \end{cases}$ och $\begin{cases} x = -2-t \\ y = 4t \end{cases}$

$\begin{cases} 2+3t_1 = -2-t_2 \\ -t_1 = 4t_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3t_1 + t_2 = -4 \\ t_1 + 4t_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3t_1 + t_2 = -4 \\ 11t_2 = 4 \end{cases}$$ → sätt in t i sin ekvation

$$\begin{cases} x = -2 - \frac{4}{11} = -\frac{26}{11} \\ y = 4 \cdot \frac{4}{11} = \frac{16}{11} \end{cases}$$

skärningspunkt: $\left(-\frac{26}{11}; \frac{16}{11}\right)$

c) $\begin{cases} x = -2+4t \\ y = 4-8t \end{cases}$ och $x+2y=3$

sätt $y=t$ i $x+2y=3$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 3-2t \\ y = t \end{cases}$

$$\begin{cases} -2+4t_1 = 3-2t_2 \\ 4-8t_1 = t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4t_1 + 2t_2 = 5 \\ 8t_1 + t_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4t_1 + 2t_2 = 5 \\ -3t_2 = -6 \end{cases}$$ → sätt in t_2 i sin ekvation

$$\begin{cases} x = 3 - 2\cdot 2 = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

skärningspunkt: $(-1; 2)$

d) $\begin{cases} x = -2+4t \\ y = 4-8t \end{cases}$ och $2x+y=0$

sätt $x=t$ i $2x+y=0$ $\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases}$

$$\left.\begin{cases} -2+4t_1 = t_2 \quad \cdot -2 \Rightarrow 4-8t_2 = -2t_2 \\ 4-8t_1 = -2t_2 \end{cases}\right\}$$ [illegible]

de två ekvationerna är identiska $\Rightarrow$ oändligt många lösningar

linjerna sammanfaller!

3.7

rutt 1: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2$, rutt 2: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = 3t \end{cases}$ $, 0 \leq t \leq 3$

Visa att båda planen passerar punkten $(3;4;6)$

rutt 1: $\begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ 4 = 2 + 2t \\ 6 = 3 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$ verifierar ekvationerna
plan 1 passerar punkten

rutt 2: $\begin{cases} 3 = 1 + t \\ 4 = 8 - 2t \\ 6 = 3t \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$ verifierar ekvationerna
plan 2 passerar punkten

För en kollision krävs att båda planen är på samma plats vid samma tillfälle. Linjerna skär varandra i $(3;4;6)$, alltså ingen annanstans. Planen passerar denna punkt vid $t = 1$ resp $t = 2$ $\Rightarrow$ ingen kollision. $\square$

3.12. Skriv om planets ekvation:

$$\begin{cases} x = 1 + s - t \\ y = 2 + s + t \\ z = 3 - s + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s - t = x - 1 \\ s + t = y - 2 \\ -s + 2t = z - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s - t = x - 1 \\ 2t = y - x - 1 \\ t = x + z - 4 \end{cases}$$

$2t = y - x - 1 = 2(x + z - 4) \Rightarrow 3x - y + 2z - 7 = 0$

$P_0 : (0; -3; 2) : \; 3 \cdot 0 - (-3) + 2 \cdot 2 - 7 = 0 \Rightarrow P_0 \in \pi$

$P_1 : (1; -2; 1) : \; 3 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 1 - 7 = 0 \Rightarrow P_1 \in \pi$

$P_2 : (2; 3; 1) : \; 3 \cdot 2 - 3 + 2 \cdot 1 - 7 = -2 \neq 0 \Rightarrow P_2 \notin \pi$

3.14 b) $\begin{cases} x = 1+s-t \\ y = 2s-t \\ z = -1+s+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s-t = x-1 \\ 2s-t = y \\ s+2t = z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s-t = x-1 \\ t = y-2x+2 \\ 3t = -x+z+2 \end{cases}$

$3t = 3(y-2x+2) = -x+z+2 \Rightarrow 5x-3y+z-4=0$

d) $\begin{cases} x = 1+s \\ y = 1 \\ z = 3-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = x-1 \\ t = 3-z \\ y = 1 \end{cases}$

$y-1=0$

3.17 a) $l_1 : (x;y;z) = (1+t;\ 1+2t;\ 1+3t)$

$l_2 : (x;y;z) = (t;\ 2+t;\ b-2t)$

skärningspunkten till l_1 och l_2 satisfierar

$\begin{cases} 1+t_1 = t_2 \\ 1+2t_1 = 2+t_2 \\ 1+3t_1 = b-2t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1-t_2 = -1 \\ 2t_1-t_2 = 1 \\ 3t_1+2t_2 = b-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1-t_2 = -1 \\ t_2 = 3 \\ 5t_2 = b+2 \end{cases}$

entydig lösning $\Leftrightarrow$ $5t_2 = 15 = b+2 \Rightarrow b = 13$

b) $P \in \pi$: $\overrightarrow{P_0P} = s\overrightarrow{v_1} + t\overrightarrow{v_2}$

där $P_0 \in l_1$ eller l_2, $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ riktningsvektorer till l_1 resp. l_2

$l_1 : (x;y;z) = (1;1;1) + t(1;2;3) \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = (1;2;3)$

välj $P_0 : (1;1;1)$ ty $t=0$ ger $\overrightarrow{OP} = (1;1;1) \Rightarrow P_0 \in l$

$l_2 : (x;y;z) = (0;2;13) + t(1;1;-2) \Rightarrow \overrightarrow{v_2} = (1;1;-2)$

$\overrightarrow{P_0P} = s\overrightarrow{v_1} + t\overrightarrow{v_2} \Leftrightarrow (x-1;\ y-1;\ z-1) = s(1;2;3) + t(1;1;-2)$

$\begin{cases} x-1 = s+t \\ y-1 = 2s+t \\ z-1 = 3s-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s+t = x-1 \\ -t = y-1-2x+2 = y-2x+1 \\ -5t = z-1-3x+3 = z-3x+2 \end{cases}$

$-5t = 5(y-2x+1) = z-3x+2 \Rightarrow 7x-5y+z-3=0$

planets ekvation: $7x-5y+z-3=0$ $\square$

3.23 $\ell: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}$

$P_0: (1;-2;-1) \in \ell \Rightarrow \overrightarrow{OP} = (1;-2;-1) + t(v_1; v_2; v_3)$

$\pi: x+3y-z=0$

$\ell \parallel \pi \Rightarrow P: \overrightarrow{OP} = \vec{v}, \; P \in \pi$

$$v_1+3v_2-v_3=0 \qquad (a)$$

ℓ skär linjen $(x;y;z) = (1+t; 2-t; 3+2t)$:

$$\begin{cases} 1+t_1 = 1+v_1t_2 \\ 2-t_1 = -2+v_2t_2 \\ 3+2t_1 = -1+v_3t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 - v_1t_2 = 0 \\ t_1 + v_2t_2 = 4 \\ 2t_1 - v_3t_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 - v_1t_2 = 0 \\ (v_2+v_1)t_2 = 4 \\ (-v_3+2v_1)t_2 = -4 \end{cases}$$

entydig lösning då $\frac{4}{t_2} = v_1+v_2 = -(-v_3+2v_1)$

$$3v_1+v_2-v_3=0 \qquad (b)$$

vi får följande system:

$$\begin{cases} v_1+3v_2-v_3=0 & (a) \\ 3v_1+v_2-v_3=0 & (b) \end{cases}$$

$(a)+(b)$: $2v_1-2v_2=0$

$$v_1=v_2$$

välj $v_1=v_2=1$

$v_3 = v_1+3v_2 = 4$

en ekvation för ℓ är $(x;y;z) = (1+t; -2+t; -1+4t)$ $\square$

3.28 Visa att ℓ_1 skär ℓ_2

$$\ell_1: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+2t \\ z = 1+3t \end{cases}, \quad \ell_2: \begin{cases} x = 3-t \\ y = -5+3t \\ z = 2-2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+t_1 = 3-t_2 \\ 3+2t_1 = -5+3t_2 \\ 1+3t_1 = 2-2t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1+t_2 = 1 \\ 2t_1-3t_2 = -8 \\ 3t_1+2t_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1+t_2 = 1 \\ -5t_2 = -10 \\ -t_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1+t_2 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

systemet har entydig lösning $\Leftrightarrow$ linjerna skär vara

skärningspunkt : $(1; 1; -2)$

Bestäm π : $l_1, l_2 \in \pi$

$P \in \pi$: $\overrightarrow{P_0P} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$

där $P_0 \in l_1$ eller l_2, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ riktningsvektorer för l_1 resp. l_2

$l_1 : (x; y; z) = (2; 3; 1) + t(1; 2; 3) \Rightarrow \vec{v}_1 = (1; 2; 3)$

välj $P_0 : (2; 3; 1)$

$l_2 : (x; y; z) = (3; -5; 2) + t(-1; 3; -2) \Rightarrow \vec{v}_2 = (-1; 3; -2)$

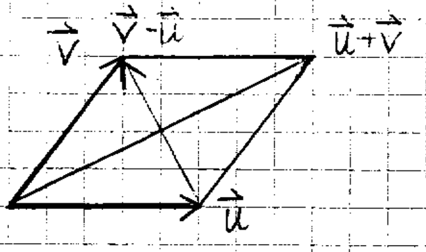
$\overrightarrow{P_0P} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 \Leftrightarrow (x-2; y-3; z-1) = s(1; 2; 3) + t(-1; 3; -$

$$\begin{cases} x-2 = s-t \\ y-3 = 2s+3t \\ z-1 = 3s-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s-t = x-2 \\ 5t = y-3-2x+4 = y-2x+1 \\ t = z-1-3x+6 = z-3x+5 \end{cases}$$

$5t = y-2x+1 = 5(z-3x+5)$

$13x+y-5z-24=0$ $\square$

4.4



rombens diagonaler:

$\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{u}$

diagonalerna vinkelräta $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}-\vec{u}) = 0$

vi har $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}-\vec{u}) = \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u}$

↑ distributiva lagen

(88)

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}-\vec{u}) = -\vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$

$= -|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$

men i en romb gäller att $|\vec{u}| = |\vec{v}|$:

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}-\vec{u}) = 0$

$\therefore$ diagonalerna är vinkelräta. $\square$

4.17 ℓ_1 definieras av skärningen mellan

$\pi_1: x+y+3z+6=0$ och $\pi_2: 2x+y-2z-10=0$

$$\begin{cases} x+y+3z+6=0 \\ 2x+y-2z-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+3z+6=0 \\ y+8z+22=0 \end{cases}$$

sätt $z=t$:

$$\begin{cases} z=t \\ y=-22-8t \\ x=-(-22-8t)-3t-6=16+5t \end{cases}$$

$\ell_1: (x;y;z)=(16+5t;-22-8t;t)$

$\ell_2: \overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{P_0P_1}$ med P_0 och $P_1 \in \ell_2$

$P_0:(6;0;1)$, $P_1:(-4;4;-7)$

$(x-6;y;z-1)=t(-10;4;-8)$

$\ell_2: (x;y;z)=(6-10t;4t;1-8t)$

skär ℓ_1 och ℓ_2 varandra?

eventuell skärningspunkt: $\begin{cases} 16+5t_1 = 6-10t_2 \\ -22-8t_1 = 4t_2 \\ t_1 = 1-8t_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5t_1+10t_2=-10 \\ 8t_1+4t_2=-22 \\ t_1+8t_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1+2t_2=-2 \\ 4t_1+2t_2=-11 \\ t_1+8t_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1+2t_2=-2 \\ -6t_2=-3 \\ 6t_2=3 \end{cases}$$

skärning för $\begin{cases} t_2 = \frac{1}{2} \\ t_1 = -2-2\cdot\frac{1}{2} = -3 \end{cases}$

insättning av t_1 i ekvationen för l_1 ger:

$$\begin{cases} x = 16-5\cdot 3 = 1 \\ y = -22+24 = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

l_1 och l_2 skär varandra i $(1;2;-3)$

vinkel mellan linjerna?

vi söker $[\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ där $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ riktningsvektorer för l_1

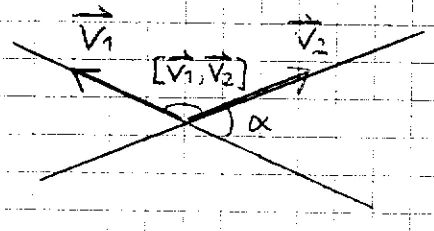
$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|\cdot \cos[\vec{v}_1, \vec{v}_2]$

$\cos[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$

$\vec{v}_1 = (5;-8;1)$, $\vec{v}_2 = (-10;4;-8)$

$\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|} = \frac{-5\cdot 10 - 8\cdot 4 - 8}{\sqrt{25+64+1}\sqrt{100+16+64}} = \frac{-90}{\sqrt{90}\sqrt{180}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff [\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \frac{3\pi}{4}$



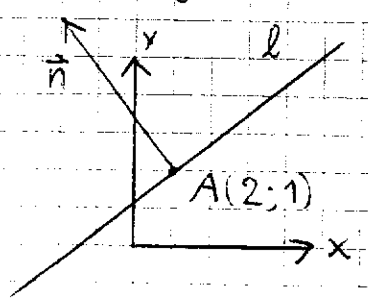
vi väljer istället:

$\alpha = \pi - [\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \frac{\pi}{4}$

vinkeln mellan linjerna är $\frac{\pi}{4}$

□

4.18 Ange en ekvation för linjen genom $(1;2)$ med normal
a) riktningen $(-3;4)$



$\vec{n}$ vinkelrät mot $l \iff \vec{n}\cdot\vec{v} = 0$

$\vec{n} = (-3;4)$, $\vec{v}$ riktningsvektor

$(-3;4)\cdot(v_1;v_2) = -3v_1 + 4v_2 = 0$

välj $v_1 = 4$, $v_2 = 3$

$l: (x,y) = (1+4t; 2+3t)$

4.18 b) Ange en ekvation för planet genom $(1;0;1)$ med normalriktningen $(-2;3;1)$

$\vec{n}=(-2;3;1) \iff \pi: -2x+3y+z+d=0$

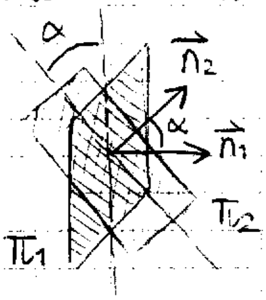
$(1;0;1)\in\pi \iff d=2\cdot1-3\cdot0-1=1$

$\pi: -2x+3y+z+1=0$

4.20 Bestäm vinkeln mellan planen

$\pi_1: 2x+y-z+1=0$ och $\pi_2: x-3y+2z-3=0$

vinkeln mellan π_1, π_2 = vinkeln mellan $\vec{n}_1, \vec{n}_2$



$\vec{n}_1=(2;1;-1)$, $\vec{n}_2=(1;-3;2)$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$

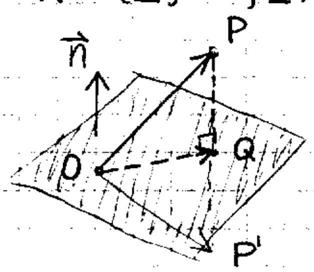
$$=\frac{2-1\cdot3-1\cdot2}{\sqrt{4+1+1}\,\sqrt{1+9+4}}=\frac{-3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=-\frac{3}{2\sqrt{21}}$$

$$\alpha=\arccos\left(-\frac{3}{2\sqrt{21}}\right)\simeq 109{,}1^\circ$$

$$\simeq 1{,}90 \text{ rad}$$

4.31 $P:(1;0;1)$, $\pi: 2x-y+2z=0 \Rightarrow \vec{n}=(2;-1;2)$

vinkelräta projektionen?



$\vec{u}=\vec{OP}=(1;0;1)$

$0\in\pi$ ty $2\cdot0-0+2\cdot0=0$

vi använder projektionsformeln

$$\vec{u}'=\vec{QP}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}=\frac{2\cdot1-1\cdot0+2\cdot1}{4+1+4}\vec{n}=\frac{4}{9}(2;-1;2)$$

i figuren ser vi att

$\overrightarrow{OQ} = \vec{u} - \vec{u}' = (1;0;1) - \frac{4}{9}(2;-1;2) = \frac{1}{9}(1;4;1)$

projektionspunkt $Q: \frac{1}{9}(1;4;1)$

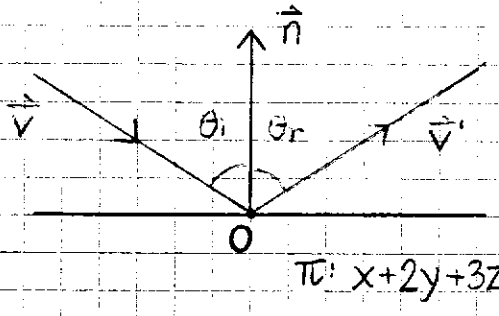
spegelpunkt?

enl figur: $\overrightarrow{OP'} = \vec{u} - 2\vec{u}' = (1;0;1) - 2\cdot\frac{4}{9}(2;-1;2)$

$= \frac{1}{9}(-7;8;-7)$

spegelpunkt $P': \frac{1}{9}(-7;8;-7)$

4.32.



optik:

- $\theta_i = \theta_r$
- $\vec{v}, \vec{n}, \vec{v}'$ i samma plan:

$\ell: x = -y = z \Rightarrow (x;y;z) = t(1;-1;1) = t\vec{v}$

$\pi: x + 2y + 3z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1;2;3)$

linjen ℓ skär planet i $O: (0;0;0)$

planet π' bestäms av $\vec{v}$ och $\vec{n}$, $\vec{v}'$ i π':

$$(x;y;z) = s\vec{n} + t\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s + t \\ y = 2s - t \\ z = 3s + t \end{cases}$$

$$\pi': \begin{cases} s + t = x \\ -3t = y - 2x \\ -2t = z - 3x \end{cases} \Rightarrow 2(y-2x) = 3(z-3x)$$

$$2y - 4x = 3z - 9x$$

$\pi': 5x + 2y - 3z = 0$

$\vec{v}' = \overrightarrow{OP}$ där $P \in \pi'$

$\vec{v}$ och $\vec{v}'$ bildar samma vinkel med $\vec{n}$:

θ eller $\pi - \theta$ och $\vec{v}$ eller $-\vec{v}$ spelar ingen roll

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1-2+3}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}'}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}'|} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{v}' = |\vec{n}|\cdot|\vec{v}'|\cdot\frac{2}{\sqrt{42}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}|\vec{v}'|$$

sök riktningsvektorn med längd $|\vec{v}'| = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{v}' = 1 \\ |\vec{v}'|^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} v_1' + 2v_2' + 3v_3' = 1 \\ v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

vi har nu tre obekanta och tre ekvationer:

$$\begin{cases} 5v_1' + 2v_2' - 3v_3' = 0 & (\text{ty } \vec{v}' = \vec{OP} \text{ där } P \in \pi' : 5x + 2y - 3z = 0) \\ v_1' + 2v_2' + 3v_3' = 1 & (\text{ty } \vec{n}\cdot\vec{v}' = 1) \\ v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2 = \frac{3}{4} & (\text{ty } |\vec{v}'| = \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases}$$

lös först den linjära delen:

$$\begin{cases} v_1' + 2v_2' + 3v_3' = 1 \\ 5v_1' + 2v_2' - 3v_3' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' + 2v_2' + 3v_3' = 1 \\ 8v_2' + 18v_3' = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_3' = t \\ v_2' = \frac{1}{8}(5-18t) \\ v_1' = 1 - 3t - \frac{2}{8}(5-18t) = \frac{1}{4}(6t-1) \end{cases}$$

använd nu den kvadratiska ekvationen, insättning ger:

$$\frac{1}{16}(6t-1)^2 + \frac{1}{64}(5-18t)^2 + t^2 = \frac{3}{4}$$

$$\left[\frac{9}{4} + \frac{81}{16} + 1\right]t^2 - \left[\frac{3}{4} + \frac{45}{16}\right]t + \left[\frac{1}{16} + \frac{25}{64} - \frac{3}{4}\right] = 0$$

$$\frac{133}{16}t^2 - \frac{57}{16}t - \frac{19}{64} = 0$$

$$t^2 - \frac{3}{7}t - \frac{1}{28} = 0$$

$$t = \frac{3}{14} \pm \sqrt{\frac{9}{14^2} + \frac{7}{28\cdot 7}} = \frac{3 \pm 4}{14} = \frac{1}{2} \text{ eller } -\frac{1}{14}$$

$t_1 = \frac{1}{2}: \begin{cases} v_1' = \frac{1}{4}\left(\frac{6}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \\ v_2' = \frac{1}{8}\left(5 - \frac{18}{2}\right) = -\frac{1}{2} \\ v_3' = \frac{1}{2} \end{cases}$

vi finner $\frac{1}{2}\vec{v}$, alltså motsvarar denna lösning den infallande linjen.

$t = -\frac{1}{14}: \begin{cases} v_1' = \frac{1}{4}\left(-\frac{6}{14} - 1\right) = -\frac{5}{14} \\ v_2' = \frac{1}{8}\left(5 + \frac{18}{14}\right) = \frac{11}{14} \\ v_3' = -\frac{1}{14} \end{cases}$

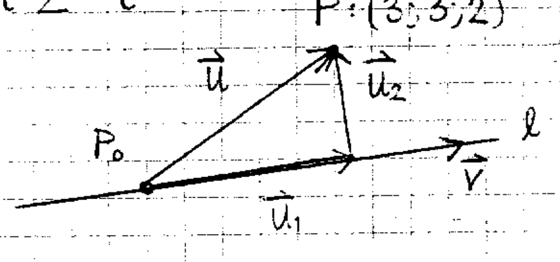
$\vec{v}' = -\frac{1}{14}(5; -11; 1)$

välj istället $(5;-11;1)$ som riktningsvektor för

spegling sker enligt l': $(x;y;z) = t(5;-11;1)$ □

4.39 $l: \begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ 2x - y - 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ 3y + 3z = 6 \end{cases}$

$l: \begin{cases} x = \frac{1}{2}[5 - t - 2(2-t)] = \frac{1}{2}(1+t) \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow (x;y;z) = (\frac{1}{2}(1+t); 2-t;$



$\vec{v}$ riktningsvektor för l

$\vec{v} = (\frac{1}{2}; -1; 1)$

P_0 godtycklig punkt på linjen, välj $(t=0)$ $P_0: (\frac{1}{2}; 2; 0)$

vi söker $d = |\vec{u}_2|$

$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\vec{u} = \overrightarrow{P_0P} = (3 - \frac{1}{2}; 3-2; 2-0) = (\frac{5}{2}; 1; 2)$

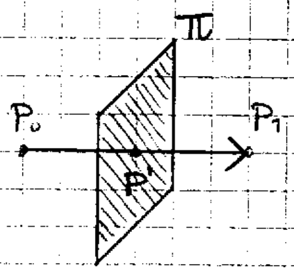
$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2} - 1\cdot 1 + 2\cdot 1}{\frac{1}{4} + 1 + 1}\vec{v} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}}\vec{v} = (\frac{1}{2}; -1; 1)$

$\vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1 = (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}; 1+1; 2-1) = (2; 2; 1)$

$d = |\vec{u}_2| = \sqrt{4+4+1} = 3$

avståndet från $(3;3;2)$ till l är 3 □

4.42



$P_0:(1;3;4)$, $P_1:(3;-1;8)$

$\overrightarrow{P_0P_1}=(3-1;-1-3;8-4)=(2;-4;4)$

$\overrightarrow{P_0P_1}$ normal till planet π

$$P'\in\pi:\quad \overrightarrow{P_0P'}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_1}$$
$$=\tfrac{1}{2}(2;-4;4)=(1;-2;2)$$
$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0P'}$$
$$=(1;3;4)+(1;-2;2)=(2;1;6)$$
$$P':(2;1;6)$$

$$\pi:\ 2x-4y+4z=d$$
$$P'\in\pi \Rightarrow\ 2\cdot2-4\cdot1+4\cdot6=d$$
$$24=d$$
$$\pi:\ x-2y+2z=12 \quad \square$$

5.1c) Beräkna $\vec{u}\times\vec{v}$ där $\vec{u}=(1;0;1)$, $\vec{v}=(1;2;3)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2)\hat{e}_x+(u_3v_1-u_1v_3)\hat{e}_y+(u_1v_2-u_2v_1)\hat{e}_z$$
$$=(0-1\cdot2)\hat{e}_x+(1\cdot1-1\cdot3)\hat{e}_y+(1\cdot2-0)\hat{e}_z$$
$$=(-2;-2;2) \quad \square$$

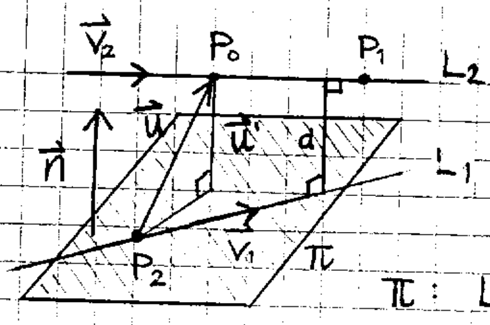
5.10 Avstånd mellan L_1 och L_2?

$$L_1:\begin{cases}x-y+z=0\\2x+y-z=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y+z=0\\3y-3z=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y+z=0\\y-z=-1\end{cases}$$

$$L_1:\begin{cases}x=-t+(t-1)=-1\\y=t-1\\z=t\end{cases}\iff (x;y;z)=(-1;-1;0)+t(0;1;1)$$

$L_2:\ \overrightarrow{P_0P}=t\overrightarrow{P_0P_1}$ där $P_0:(2;0;1)$, $P_1:(-1;3;2)$

$$(x-2;y;z-1)=t(-3;3;1)$$
$$(x;y;z)=(2;0;1)+t(-3;3;1)$$



P_0, P_1 givna på L_2

P_2 godtycklig punkt på L_1

π: $L_1 \parallel \pi$, $L_2 \parallel \pi$ och $P_2 \in \pi$

$L_1 \parallel \pi$ och $L_2 \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \perp L_1$ och $\vec{n}_\pi \perp L_2$

$\vec{n} \perp \vec{v}_1$ och $\vec{n} \perp \vec{v}_2$

en vektor vinkelrät mot $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ är $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$:

beräkna med Sarrus regel

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2;-3;3)$$

välj $\vec{n} = (2;3;-3)$

Vi ser i figuren att avståndet mellan L_1 och L_2 är avståndet mellan planet π och L_2, d.

$d = |\vec{u}'|$

$\vec{u}'$ är projektionen av $\vec{u} = \overrightarrow{P_2P_0}$ på normalen till π, $\vec{n}$

P_2: välj $(t=0)$ $(-1;-1;0) \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{P_2P_0} = (2+1;1;1)$

$= (3;1;1)$

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{3\cdot 2 + 1\cdot 3 - 1\cdot 3}{4+9+9}\vec{n} = \frac{6}{22}\vec{n} = \left(\frac{6}{11}; \frac{9}{11}; -\frac{9}{11}\right)$$

$$d = |\vec{u}'| = \sqrt{\frac{36+81+81}{11^2}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$$

Avståndet mellan L_1 och L_2 är $\frac{3\sqrt{22}}{11}$ $\square$

9.1 b) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot (-\sin\varphi)$

$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$

$= 1$

9.1 d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= 3(1\cdot 1 - 0\cdot 3) - 2(3\cdot 1 - 1\cdot 3) + 2(3\cdot 0 - 1\cdot 1)$

$= 3 - 2 = 1$

9.3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+1 \\ 3-2 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

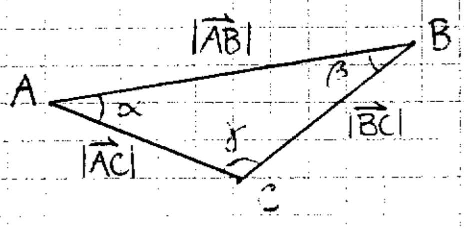
$\left.\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 3\cdot 2 = -5 \\ \det B &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - (-2)\cdot 1 = 8 \end{aligned}\right\} \det A + \det B = -5 + 8 = 3$

$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot 3 - 1\cdot 3 = 9$

$\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Detta gäller i allmänhet (men inte alltid).

4.13 $A: (1;0;2)$, $B: (0;-1;1)$, $C: (2;1;2)$



$\vec{AB} = (0-1; -1-0; 1-2) = (-1; -1; -1)$

$\vec{AC} = (2-1; 1-0; 2-2) = (1; 1; 0)$

$\vec{BC} = (2-0; 1-(-1); 2-1) = (2; 2; 1)$

sidornas längd: $|\vec{AB}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$|\vec{AC}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$|\vec{BC}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

vinklar:

$\cos\alpha = \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \dfrac{-1-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \simeq 144{,}7^\circ$

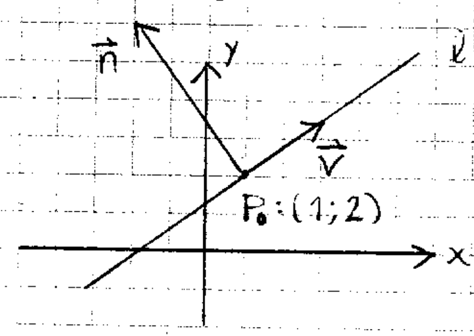
$$\cos\beta = \cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{-\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{BC}|} = \frac{1\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 1}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

$$\beta = \arccos\frac{5\sqrt{3}}{9} \simeq 15{,}8^\circ$$

$$\cos\gamma = \cos(\vec{CB}\cdot\vec{CA}) = \frac{\vec{BC}\cdot\vec{AC}}{|\vec{BC}|\cdot|\vec{AC}|} = \frac{1\cdot 2+1\cdot 2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\gamma = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} \simeq 19{,}5^\circ$$

4.18a)



$\vec{n} = (-3;4)$

$P_0 \in l$

$\vec{n} \perp l$

$\vec{v}$ riktningsvektor för l

$\vec{n} \perp l \iff \vec{n} \perp \vec{v}$

$\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$

$\vec{v} = (v_1; v_2)$: $-3v_1 + 4v_2 = 0$

välj $v_1 = 4$, $v_2 = 3$

l : $\vec{P_0P} = t\vec{v}$

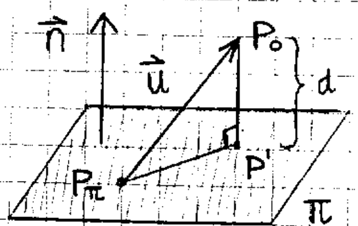
$(x-1; y-2) = t(4;3)$

$$\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2+3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = x-1 \\ 3t = y-2 \end{cases} \Rightarrow 3(x-1) = 4(y-2)$$

$3x - 3 = 4y - 8$

l : $3x - 4y + 5 = 0$ □

4.25 b)



$P_0 : (1;1;-1)$

$\pi : 2x+2y-z=3 \Rightarrow \vec{n} = (2;2;-1)$

Avståndet från P_0 till π motsvaras av längden av $\vec{u} = \vec{P_\pi P_0}$:s projektion på normalen : $d = |\vec{P'P_0}|$

P_π godtycklig punkt på π, välj $P_\pi : (0;0;-3)$

$\vec{u} = \vec{P_\pi P_0} = (1-0;\ 1-0;\ -1-(-3)) = (1;1;2)$

$$\overrightarrow{P'P_0} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{1\cdot 2 + 1\cdot 2 - 2\cdot 1}{4+4+1}\vec{n} = \frac{2}{9}(2;2;-1) = \left(\frac{4}{9};\frac{4}{9};-\frac{2}{9}\right)$$

$$d = |\overrightarrow{P'P_0}| = \sqrt{\frac{16}{81}+\frac{16}{81}+\frac{4}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \square$$

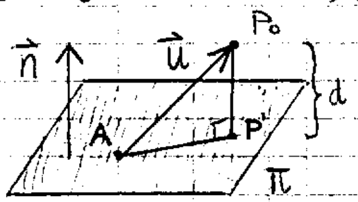
4.25c) $P_0:(1;2;1)$, $A:(1;0;0)$, $B:(1;1;0)$, $C:(0;0;1)$

Avstånd mellan P_0 och π, där $A,B,C \in \pi$

$\pi: \ \overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$

$$(x-1;y;z) = s(0;1;0) + t(-1;0;1)$$

$$\begin{cases} x-1 = -t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} -z &= x-1 \\ x+z-1 &= 0 \end{aligned}$$



$\pi: x+z-1=0 \Rightarrow \vec{n} = (1;0;1)$

[se uppgift 4.25 b)]

$\vec{u} = \overrightarrow{AP_0} = (1-1;2-0;1-0) = (0;2;1)$

$$\overrightarrow{P'P_0} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{0\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 1}{1+1}\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{n} = \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$$

$$d = |\overrightarrow{P'P_0}| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \square$$

4.26 Beräkna avståndet mellan $\pi_1: x-2y-4z=5$ och $\pi_2: x-2y-4z=6$

Välj en punkt $P_1 \in \pi_1$ och beräkna avståndet till π_2. Planen är parallella (samma normalriktning), så avståndet mellan P_1 och π_2 är detsamma som avståndet mellan π_1 och π_2. Om planen inte varit parallella hade de skurit varandra och avståndet skulle alltså vara noll.

välj $P_1 : (5;0;0)$ och $P_2 : (6;0;0) \in \pi_2$

$\vec{n} = (1;-2;-4)$

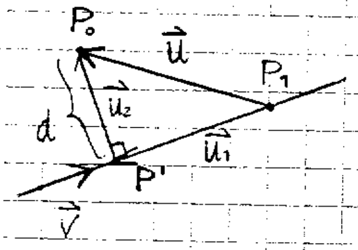
Lösning som i uppgift 4.25:

$P' \in \pi_1$: ortogonal projektion av P_2 på π_1

$\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (1;0;0)$

$$\overrightarrow{P'P_2} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{1}{1+4+16}\vec{n} = \frac{1}{21}(1;-2;-4)$$

$$d = |\overrightarrow{P'P_2}| = \frac{1}{21}\sqrt{1+4+16} = \frac{\sqrt{21}}{21} \quad \square$$



$P_0 : (1;0;1)$

$l : x-1 = y = 2z \;\; = 2t$

$(x;y;z) = (1+2t;2t;t)$

välj $P_1 \in l$, $P_1 : (1;0;0)$

avstånd $d = |\vec{u}_2|$ där $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_0}$ och $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$

P' ortogonal projektion av P_0

$\overrightarrow{P'P_0} = \vec{u}_2$

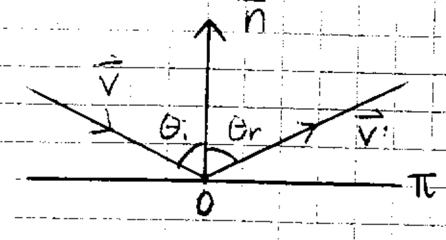
$\overrightarrow{P_1P_0} = (1-1;0;1) = (0;0;1)$, $\vec{v} = (2;2;1)$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 1}{4+4+1}\vec{v} = \left(\frac{2}{9};\frac{2}{9};\frac{1}{9}\right)$$

$$\vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1 = (0;0;1) - \left(\frac{2}{9};\frac{2}{9};\frac{1}{9}\right) = \left(-\frac{2}{9};-\frac{2}{9};\frac{8}{9}\right)$$

$$d = |\vec{u}_2| = \frac{\sqrt{4+4+64}}{9} = \frac{6\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \square$$

4.37



optik:

- $\theta_i = \theta_r$
- $\vec{v}, \vec{n}, \vec{v}'$ i samma plan : π'

$l : \vec{v}' = (1;-1;-1) \Rightarrow (x;y;z) = t(1;-1;-1)$

$\pi : 2x + y - 3z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2;1;-3)$

linjen l skär planet i $O:(0;0;0)$

planet π' bestäms av $\vec{n}, \vec{v}'$ och O, $\vec{v}$ i π':

$$(x;y;z) = s\vec{n} + t\vec{v}' \iff \begin{cases} x = 2s + t \\ y = 1s - t \\ z = -3s - t \end{cases}$$

$$\pi': \begin{cases} 2s + t = x \\ -3t = 2y - x \\ t = 2z - 3x \end{cases} \implies \begin{array}{l} -(2y - x) = 3(2z + 3x) \\ -2y + x = 6z + 9x \end{array}$$

$$\pi': 8x + 2y + 6z = 0$$

$$4x + y + 3z = 0$$

$\vec{v} = \vec{OP}$ där $P \in \pi'$

$\vec{v}$ och $\vec{v}'$ bildar samma vinkel med $\vec{n}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}'}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}'|} = \frac{2\cdot 1 - 1\cdot 1 + 3\cdot 1}{\sqrt{4+1+9}\,\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{v} = |\vec{n}|\cdot|\vec{v}|\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}|\vec{v}|$$

sök riktningsvektorn med längd $|\vec{v}| = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{v} = 1 \\ |\vec{v}|^2 = \frac{3}{16} \end{cases} \iff \begin{cases} 2v_1 + v_2 - 3v_3 = 1 \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \frac{3}{16} \end{cases}$$

vi har nu tre ekvationer och tre obekanta:

$$\begin{cases} 4v_1 + v_2 + 3v_3 = 0 \\ 2v_1 + v_2 - 3v_3 = 1 \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \frac{3}{16} \end{cases}$$

lös först den linjära delen:

41

$$\begin{cases} 4v_1 + v_2 + 3v_3 = 0 \\ 2v_1 + v_2 - 3v_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4v_1 + v_2 + 3v_3 = 0 \\ \quad -v_2 + 9v_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_3 = t \\ v_2 = 9t + 2 \\ v_1 = \frac{1}{4}[-3t - (9t+2)] = -3t - \frac{1}{2} \end{cases}$$

använd nu den kvadratiska ekvationen, insättning

$$(-3t - \tfrac{1}{2})^2 + (9t+2)^2 + t^2 = \tfrac{3}{16}$$

$$[9 + 81 + 1]t^2 + [3 + 36]t + [\tfrac{1}{4} + 4 - \tfrac{3}{16}] = 0$$

$$91t^2 + 39t + \frac{65}{16} = 0$$

$$t^2 + \frac{3}{7}t + \frac{5}{112} = 0$$

$$t = -\frac{3}{14} \pm \sqrt{\frac{9}{196} - \frac{8{,}75}{196}}$$

$$= \frac{-6 \pm 1}{28}$$

$$\begin{cases} t_1 = -\frac{1}{4} \\ t_2 = -\frac{5}{28} \end{cases}$$

$$t = -\frac{1}{4}: \quad \begin{cases} v_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ v_2 = -\frac{9}{4} + 2 = -\frac{1}{4} \\ v_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Men detta motsvarar den reflekterade strålen.

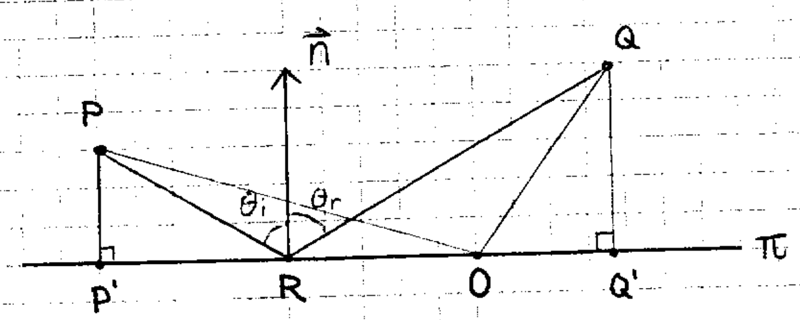
$$t = -\frac{5}{28}: \quad \begin{cases} v_1 = \frac{15}{28} - \frac{1}{2} = \frac{1}{28} \\ v_2 = -\frac{45}{28} + 2 = \frac{11}{28} \\ v_3 = -\frac{5}{28} \end{cases}$$

efter förlängning med 28: välj $(1; 11; -5)$

Vi söker inte en linje, utan en riktning och väljer då en vektor sådan att $\vec{n}\cdot\vec{v}'$ och $\vec{n}\cdot\vec{v}$ har olika tecken (reflektion: se figur).

$\vec{n}\cdot\vec{v} > 0$ men $\vec{n}\cdot(1;11;-5) > 0$ också

Den sökta riktningen för $\vec{v}$ infallande stråle är alltså $(-1;-11;5)$. □



$\pi: x-2y-2z=0$

$\Rightarrow \vec{n}=(1;-2;-2)$

$P:(3;-2;-1)$

$Q:(4;-1;-6)$

optik: $\theta_i=\theta_r$

likformighet hos trianglarna RPP' och RQQ' ger

$$\frac{|\overrightarrow{PP'}|}{|\overrightarrow{RP'}|}=\frac{|\overrightarrow{QQ'}|}{|\overrightarrow{RQ'}|} \Rightarrow \overrightarrow{P'R}=\frac{|\overrightarrow{PP'}|}{|\overrightarrow{QQ'}|}\overrightarrow{RQ'} \Rightarrow \overrightarrow{P'R}=\frac{1}{1+\frac{|\overrightarrow{QQ'}|}{|\overrightarrow{PP'}|}}\overrightarrow{P'Q'}$$

där R är den sökta punkten, P' och Q' ortogonala projektionerna av P och Q i π.

Vi ser att $O:(0;0;0)\in\pi$ och utnyttjar detta för att hitta P' och Q' med projektionsformeln:

$$\overrightarrow{P'P}=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}=\frac{(3;-2;-1)\cdot(1;-2;-2)}{1+4+4}\vec{n}=\frac{3+4+2}{9}\vec{n}=(1;-2;-2)$$

$$\overrightarrow{Q'Q}=\frac{\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}=\frac{(4;-1;-6)\cdot(1;-2;-2)}{1+4+4}\vec{n}=\frac{4+2+12}{9}\vec{n}=(2;-4;-4)$$

$$\left.\begin{array}{l}|\overrightarrow{P'P}|=\sqrt{1+4+4}=3\\ |\overrightarrow{Q'Q}|=\sqrt{4+16+16}=6\end{array}\right\} \quad \frac{|\overrightarrow{QQ'}|}{|\overrightarrow{PP'}|}=2 \Rightarrow \overrightarrow{P'R}=\frac{1}{3}\overrightarrow{P'Q'}$$

Vi har nu vad vi behöver för att hitta punkten R genom vektoraddition:

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}+\overrightarrow{P'R}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}+\frac{1}{3}\overrightarrow{P'Q'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{P'P}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QQ'})$$

$$=(3;-2;-1)+(-1;2;2)+\frac{1}{3}(1-3+4-2;\ -2+2-1+4;\ -2+1-6+4)$$

$$=(2;1;0)$$

Strålen speglas i punkten $R:(2;1;0)$. □

5.1 d) Beräkna $\vec{u}\times\vec{v}$ där $\vec{u}=(2;6;-3)$, $\vec{v}=(0;2;3)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2)\hat{e}_x+(u_3v_1-u_1v_3)\hat{e}_y+(u_1v_2-u_2v_1)\hat{e}_z$$

$$=(6\cdot 3-(-3)\cdot 2)\hat{e}_x+((-3)\cdot 0-2\cdot 3)\hat{e}_y+(2\cdot 2-6\cdot 0)\hat{e}_z$$

$$=(24;-6;4)$$ □

5.5 Förenkla $(\vec{u}+\vec{v})\cdot[(\vec{u}+2\vec{v})\times(\vec{u}-2\vec{v})]$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot[\underbrace{(\vec{u}+2\vec{v})\times(\vec{u}-2\vec{v})}]=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(4\vec{v}\times\vec{u})$$

$$\underbrace{\vec{u}\times\vec{u}}_{=0}\underbrace{-2\vec{u}\times\vec{v}+2\vec{v}\times\vec{u}}-\underbrace{4\vec{v}\times\vec{v}}_{=0}$$

$$+2\vec{v}\times\vec{u}+2\vec{v}\times\vec{u}$$

$$=4[\vec{u}\cdot\underbrace{(\vec{v}\times\vec{u})}+\vec{v}\cdot\underbrace{(\vec{v}\times\vec{u})}]=0$$

$\perp$ mot $\vec{u}$ och $\vec{v}$ □

$\perp$ mot $\vec{v}$ och $\vec{u}$

alternativ lösning: resonemang

Resultatet av vektorprodukten kommer att vara en vektor vinkelrät mot $\vec{u}$ och $\vec{v}$. Skalär-multiplikation med en linjärkombination av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ ger därför noll.

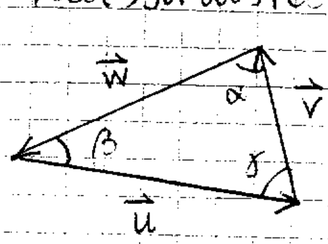
5.6 a) Visa att om $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$ så är $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{w}=\vec{w}\times\vec{u}$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\vec{v}\times(-\vec{u}-\vec{v})=\underbrace{-\vec{v}\times\vec{u}}_{\vec{u}\times\vec{v}}-\underbrace{\vec{v}\times\vec{v}}_{=0}=\vec{u}\times\vec{v}$$

$$\vec{w}\times\vec{u}=(-\vec{u}-\vec{v})\times\vec{u}=\underbrace{-\vec{u}\times\vec{u}}_{=0}\underbrace{-\vec{v}\times\vec{u}}_{\vec{u}\times\vec{v}}=\vec{u}\times\vec{v}$$

□

b) Visa sinusteoremet:



$$\frac{|\vec{u}|}{\sin\alpha}=\frac{|\vec{v}|}{\sin\beta}=\frac{|\vec{w}|}{\sin\gamma}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \sin(\vec{u},\vec{v}) \Rightarrow \sin(\vec{u},\vec{v}) = \frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

$$\sin\alpha = \sin(-\vec{v},\vec{w}) = -\sin(\vec{v},\vec{w})$$

$$\sin\beta = \sin(-\vec{w},\vec{u}) = -\sin(\vec{w},\vec{u})$$

$$\sin\gamma = \sin(-\vec{u},\vec{v}) = -\sin(\vec{u},\vec{v})$$

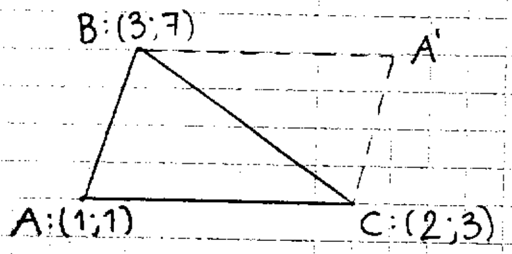
$$\frac{|\vec{u}|}{-\sin(\vec{v},\vec{w})} = \frac{|\vec{v}|}{-\sin(\vec{w},\vec{u})} = \frac{|\vec{w}|}{-\sin(\vec{u},\vec{v})}$$

$$-|\vec{u}|\cdot\frac{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}{|\vec{v}\times\vec{w}|} = -|\vec{v}|\cdot\frac{|\vec{w}|\cdot|\vec{u}|}{|\vec{w}\times\vec{u}|} = -|\vec{w}|\cdot\frac{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

Enligt a) är $|\vec{v}\times\vec{w}| = |\vec{w}\times\vec{u}| = |\vec{u}\times\vec{v}|$, vilket ger påståendet

□

9.5



$\overrightarrow{AB} = (2;6)$

$\overrightarrow{AC} = (1;2)$

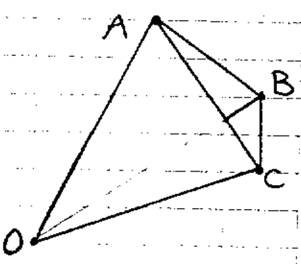
$$A_{ABC} = \frac{1}{2}A_{ABA'C}$$

$$A_{ABA'C} = |V(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})| \quad \text{där} \quad V(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 1\cdot 6 = -2$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|-2| = 1$$

□

9.6 b)



$O:(0;0;0)$

$A:(0;1;2) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (0;1;2)$

$B:(2;0;3) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (2;0;3)$

$C:(1;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = (1;1;1)$

Volymen av den tetraeder vars hörn sammanfaller av vektorerna $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ är $\frac{1}{6}$ av volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna.

$$V_{Te} = |V(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})| \quad \text{där} \quad V(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$V(\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}) = 0\cdot\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= -1(2\cdot1-1\cdot3)+2(2\cdot1-1\cdot0) = 1+4 = 5$$

$V_{pe} = 5 \Rightarrow V = \frac{5}{6}$

Volymen av tetraedern är $\frac{5}{6}$.

$\square$

7.1a)

$$3\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}6 & -3\\ 2 & 9\\ 7 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot1-2\cdot6 & 3\cdot1+2\cdot3\\ 3\cdot2-2\cdot2 & 3\cdot3-2\cdot9\\ 3\cdot1-2\cdot7 & 3\cdot2+2\cdot5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-9 & 9\\ 2 & -9\\ -11 & 16\end{bmatrix}$$

7.2c)

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+0+0+4 & 0-2+0+0 & 2+3\cdot2-3+4\\ 0+0+0+1 & 0-2+0+0 & 0+3\cdot2+0+1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5 & -2 & 9\\ 1 & -2 & 7\end{bmatrix}$$

7.3a)

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix} = 3\cdot1+2\cdot2+1\cdot3 = 10$$

b)

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 6 & 4 & 2\\ 9 & 6 & 3\end{bmatrix}$$

7.5a) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B$

$= A^2 + AB + BA + B^2$

b) $(A+B)(A-B) = A\cdot A - A\cdot B + B\cdot A - B\cdot B = A^2 - AB + BA - B^2$

c) $(A-B)(A+B) = A\cdot A + A\cdot B - B\cdot A - B\cdot B = A^2 + AB - BA - B^2$

7.9b) Lös ekvationssystemet $A\vec{x}=\vec{y}$ för ett allmänt högerled.

$$A\vec{x}=\vec{y} \iff \underbrace{A^{-1}A}_{I}\vec{x}=A^{-1}\vec{y} \iff \vec{x}=A^{-1}\vec{y}$$

$$\begin{cases} x_1+x_3 = y_1 \\ x_1+x_2 = y_2 \\ 2x_1+x_2+x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_3 = y_1 \\ x_2-x_3 = y_2-y_1 \\ x_2-x_3 = y_3-2y_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1+x_3 = y_1 \\ x_2-x_3 = y_2-y_1 \\ 0 = (y_3-2y_1)-(y_2-y_1) \end{cases}$$

Entydig lösning saknas $\iff$ matrisen saknar invers.

c) Annan metod för att räkna fram inversen:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \text{invers: } \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

7.11 A och B givna, $AC=B \iff \underbrace{A^{-1}A}_{I}C=A^{-1}B$

$$C=A^{-1}B$$

C är entydigt bestämd ty A^{-1} är entydigt bestämd. Räkna först ut inversen till A: A^{-1}, multiplicera sedan med B (tänk på ordningen på matriserna).

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} (a_1) = (a) \\ (b_1) = (b) - (a) \\ (c_1) = (c) + (a) \\ (d_1) = (d) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} (a_2) = (a_1) \\ (b_2) = (b_1) \\ (c_2) = (b_1) - (c_1) \\ (d_2) = 2 \times (b_1) - (d_1) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} (a_3) = (a_2) \\ (b_3) = (b_2) \\ (c_3) = (c_2)/2 \\ (d_3) = (d_2) - (c_2) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} (a_4) = (a_3) + (b_4) \\ (b_4) = (b_3) - (c_4) \\ (c_4) = (c_3) + (d_3) \\ (d_4) = (d_3) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} (a_5) = (a_4) - (d_4) \\ (b_5) = (b_4) \\ (c_5) = (c_4) \\ (d_5) = (d_4) \end{array}$$

$$C = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-3+3+6 & 0+3-3+2 & -1-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-2 & 0-3+0+4 \\ 0-1+1+3 & 0+1-1+1 & 0-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1 & 0-1+0+2 \\ -1+3-1-3 & 0-3+1-1 & 1+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1 & 0+3+0-2 \\ 0+2-2-3 & 0-2+2-1 & 0+1-1+1 & 0+2+0-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$$

7.13 A kvadratisk ; $A^2 + A + I = 0$

a) Visa att A är inverterbar och ange inversen.

$$A^2 + A + I = 0 \iff I = -A^2 - A$$
$$= \underbrace{-(A+I)}_{A^{-1}}A$$

b) Visa att $A^3 = I$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A\underbrace{(-A-I)}_{A^{-1}} = A^{-1}A = I$$

7.27

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ 0 = 1 - 1 - 1 - 1 = -2 \ ! \end{cases}$$

Lösning saknas!

b)

$$A^tA=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1&1&1\\1&1+1&1\\1&1&1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&3&1&-1&2&0\\0&1&3&-1&0&2\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&0&8&-2&-2&6\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&0&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{array}\right]\Rightarrow(A^tA)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}$$

c)

$$A^ty=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1\\1+1\\1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$$

$$A^tAX=A^ty\iff(A^tA)^{-1}A^tAX=(A^tA)^{-1}A^ty$$

$$X=(A^tA)^{-1}A^ty$$

$$X=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}6-2-2\\-2+6-2\\-2-2+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$\square$

7.30 Sätt upp ett koefficientschema och förenkla:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&1&1&1&1&1&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&1&1&1\\1&1&-1&2&0&0&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&0&1&0&-1&-1\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&1&1&1\\0&0&2&-1&1&1&-1\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \square$$

7.3c
$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & a & b & c & d & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & ab & ac & ad & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & ab & 1+b^2 & bc & bd & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & ac & bc & 1+c^2 & cd & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & ad & bd & cd & 1+d^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & a & b & c & d & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2+1 & -a & -b & -c & -d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}_{A^{-1}} \qquad \square$$

(51)

9.12 a) Visa att $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ om A inverterbar.

$I = A^{-1}A$

$\det I = \det(A^{-1}A)$ använd produktregeln

$1 = \det A^{-1} \cdot \det A$ alltså är $\det A \neq 0$, $\det A^{-1} \neq 0$

$\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ $\square$

b) Visa att $\det A = \pm 1$ om A ortogonal.

$I = A^t A$

$\det I = \det(A^t A)$

$1 = \det A^t \cdot \det A$

men vi vet att $\det A^t = \det A$:

$1 = (\det A)^2$

$\Rightarrow \det A = \pm 1$ $\square$

c) A inverterbar $\Leftrightarrow$ A^2 inverterbar

Vi vet att A^{-1} existerar:

$A^{-1}A = I$

multiplicera från höger med A:

$A^{-1}A \cdot A = I \cdot A \Leftrightarrow A^{-1}A^2 = A$

multiplicera från vänster med A^{-1}:

$A^{-1}A^{-1}A^2 = \underbrace{A^{-1}A}_{I} \Leftrightarrow \underbrace{(A^{-1})^2}_{(A^2)^{-1}} A^2 = I$

A^2 är inverterbar med inversen $(A^{-1})^2$ $\square$

andra hållet:

$(A^2)^{-1}A^2 = I$

$\underbrace{(A^2)^{-1}A}_{A^{-1}} \cdot A = I$

om $(A^2)^{-1}$ finns så finns även

$A^{-1} = (A^2)^{-1}A$ $\square$

9.13 $\det(S^{-1}AS) = \det S^{-1} \cdot \det A \cdot \det S$

$= (\det S)^{-1} \cdot \det A \cdot \det S$

$= \det A$

52

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -5 \cdot (2 \cdot 8 - 6 \cdot 4) = -40$$

utveckla efter den andra raden

$\det(S^{-1}AS) = -40$ □

9.17 b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = -5 \end{cases}$ Lös med Cramers regel

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -5$

$A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\det(Y, A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 19$

$\det(A_1, Y) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -16$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det(Y, A_2)}{\det A} = \dfrac{19}{-5} = -\dfrac{19}{5} \\ x_2 = \dfrac{\det(A_1, Y)}{\det A} = \dfrac{-16}{-5} = \dfrac{16}{5} \end{cases}$$ □

9.22 a) A inverterbar?

A inverterbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ huvudsatsen för determinanter

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1 \cdot 4 - 3 \cdot 1) = 2 \neq 0$$

utveckling efter den andra raden

A är inverterbar. □

b) A inverterbar?

det $A \neq 0$?

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 7 - 5 \cdot 3) + (1 \cdot 7 - 5 \cdot 1) = 2 \cdot (-1) + 2$$

$$= 0$$

A är inte inverterbar. $\square$

9.24 $AX = 0$ har icke-triviala lösningar $\Leftrightarrow$ det $A = 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2-a & 3 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 1 & 5 & 4-a \end{vmatrix} = (4-a) \cdot [(2-a)(1-a) - 2 \cdot 3]$$

utveckla efter sista kolonnen

$$= (4-a)[2 - 3a + a^2 - 6]$$

$$= (4-a)[a^2 - 3a - 4]$$

$$= (4-a)(a-4)(a+1)$$

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

$a = 4$:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ 7x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}$$

$a=-1$:

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2 \hphantom{+5x_3}=0\\ 2x_1+2x_2 \hphantom{+5x_3}=0\\ x_1+5x_2+5x_3=0\end{cases} \iff \begin{cases} x_1+x_2=0\\ x_1+5x_2+5x_3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=t\\ x_2=-t\\ x_3=\frac{4}{5}t\end{cases}$$

□

9.31 c)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2\\ -2 & 0 & 1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -2 & 0 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & -5 & 0 & 4 & 2\end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -9 & 2 & 7\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -9 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 11 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 11\cdot 1 = 11$$

□

9.35
$$\begin{vmatrix}1&a&0&0&\cdots&0\\0&1&a&0&\cdots&0\\0&0&1&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0\cdots&1&a\\a&1&0&0\cdots0&0&0\end{vmatrix}\begin{array}{l}1\\2\\3\\\vdots\\n-1\\n\end{array} \overset{3}{=} \text{utveckla efter första kolonnen}$$

$$1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&a&0&\cdots&0\\0&1&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0\cdots&1&a\\1&0&0\cdots&0&0\end{vmatrix}}_{\text{utveckla efter första kolonnen}}+(-1)^{n+1}a\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}a&0&0&\cdots&0\\1&a&0&\cdots&0\\0&1&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0\cdots&1&a\end{vmatrix}\begin{array}{l}1\\2\\3\\\vdots\\n-1\end{array}}_{=a^{n-1}}=$$

$$1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&a&0&\cdots&0\\0&1&a&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&1&a\\0&0&0&0&0\end{vmatrix}}_{\substack{\text{utveckla efter sista raden:}\\=0}}+(-1)^{n}\cdot1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}a&0&0&\cdots&0\\1&a&0&\cdots&0\\0&1&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0\cdots&1&a\end{vmatrix}\begin{array}{l}1\\2\\\\\vdots\\n-2\end{array}}_{=a^{n-2}}+a^{n}(-1)^{n}$$

$$=(-1)^{n}\cdot a^{n-2}+a^{n}(-1)^{n+1}$$

$$=(-1)^{n+1}\left[a^{n}-a^{n-2}\right]$$

□

9.44 a) $\det AB=\det A+\det B$?

$\det AB=\det A\cdot\det B\neq\det A+\det B$: falskt!

b) $\det(A+B)=\det A+\det B$?

(se uppgift 9.3) : falskt!

944 c) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$?

antag påståendet sant:

$(A^{-1}+B^{-1})(A+B) = I$ fy $A^{-1}+B^{-1}$ invers till $A+B$

$A^{-1}(A+B) + B^{-1}(A+B) = I$

$\underbrace{A^{-1}A}_{I} + A^{-1}B + B^{-1}A + \underbrace{B^{-1}B}_{I} = I$

$A^{-1}B + B^{-1}A = -I$ men detta är ej sant i allmänhet

Påståendet är alltså falskt!

jämför med $a, b \in \mathbb{R}$:

$(a+b)^{-1} \neq a^{-1} + b^{-1}$ i allmänhet

d) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$?

antag påståendet sant : $(A^{-1})^t$ invers till A^t

$(A^{-1})^t A^t = I$ men $B^tA^t = (AB)^t$

$[A(A^{-1})]^t = I$

$(\underbrace{AA^{-1}}_{I})^t = I$

$I^t = I$: OK

Påståendet är alltså sant.

e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$?

$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} = -\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$: falskt!

f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$?

Påståendet ges av symmetriegenskaperna hos den skalära trippelprodukten.

g) $\det A = 0 \Rightarrow AX = B$ saknar lösning för alla B?

Falskt! Tag t.ex:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $AX = B$ har lösning $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

h) $AX = 0$ har endast trivial lösning $\Rightarrow \det A \neq 0$

Påståendet (och dess omvändning) ges av huvudsatsen.

9.54 a) A är en reell 3×3-matris : $A^2 = -I$

$\det(A^2) = \det(-I)$

$(\det A)^2 = \det(-I)$

$-I$ är också 3×3 : $\det(-I) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$\det A \in \mathbb{R}$

men det finns inget reellt tal sådant att dess kvadrat är -1 : antagandet om A är falskt!

Det existerar ingen sådan matris. $\square$

b) A är en reell 4×4-matris : $A^2 = -I$

För en 4×4 - $(-I)$ - matris är determinanten 1 :

$$\det(-I) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

(alternativt synsätt : bryt ut en faktor (-1) från ett jämnt antal (4) rader / kolonner)

Det finns alltså ett reellt tal som uppfyller:

$\det(A^2) = \det(-I)$

$(\det A)^2 = 1$

$\det A = 1$

Vi har alltså inga direkta hinder för existens, utan letar efter en matris som uppfyller kraven.

Kvalificerad gissning: tag en enhetsmatris och kasta om basvektorerna för $\mathbb{R}^4$, byt tecken på någon.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inte så dumt gissat, men vi ser att vi inte kan få ett diagonalelem −1 om vi har ett diagonalelement skilt från 0 i A.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att med en −1:a får vi i båda fallen bara två −1:or. Försök med två teckenbyten...

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Bingo!

Eftersom vi hittat ett exempel på en matris som uppfyller kraven, så finns naturligtvis någon sådan matris... □

48
$$\begin{cases} (2+a)x + y - (1-2a)z = 1+3a \\ 2x + (1+a)y - z = 1+3a \\ (4-4a)x + 2y - (2+3a)z = 2-4a \\ (6-4a)x + (3+a)y - (3+3a)z = 3-a \end{cases}$$

Vi ser att rad 4 fås genom att addera raderna 2 och 3. Kvar blir ett system med tre ekvationer och tre obekanta.

(59)

$AX = Y$ har entydig lösning $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

För att hitta de värden på a som ger oändligt många lösningar för vilka [illegible] : $\det A = 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2+a & 1 & -1+2a \\ 2 & 1+a & -1 \\ 4-4a & 2 & -2-3a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -a & 2a \\ 2 & 1+a & -1 \\ 4-4a & 2 & -2-3a \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1+a & -1 \\ 4-4a & 2 & -2-3a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & a & 1 \\ 4-4a & 2 & -2-3a \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 5-a & 1 & -3a \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & a & 1 \\ 5-a & 1 & -3a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & -1 \\ 5-a & 1 & 3a \end{vmatrix} =$$

$$a \cdot \left\{ 1 \cdot \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & 3a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5-a & 3a \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ 5-a & 1 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= a\{(3a^2+1) - (6a-5+a^2) + 2(2-5a+a^2)\}$$

$$= a(5a^2 - 15a)$$

$$= 5a^2(a-3)$$

$\det A = 0 \Leftrightarrow a = 0$ eller $a = 3$

$a = 0$:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ 4x + 2y - 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 2s + t - 1 \end{cases}$$

$a = 3$:

$$\begin{cases} 5x + y + 5z = 10 \\ 2x + 4y - z = 10 \\ -8x + 2y - 11z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 2y + 10z = 20 \\ \quad -18y + 15z = -30 \\ \quad 18y - 15z = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + y + 5z = 10 \\ \quad 6y - 5z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - (-2+6t) - t = 4 - 7t \\ y = 5t \\ z = -2 + 6t \end{cases} \quad \square$$

A.2f) $(1-i)^4 = 1 \cdot (1)^4 \cdot (-i)^0 + 4 \cdot (1)^3 \cdot (-i)^1 + 6 \cdot (1)^2 \cdot (-i)^2 + 4 \cdot (1)^1 \cdot (-i)^3 + 1 \cdot (1)^0 \cdot (-i$

$= 1 - 4i - 6 + 4i + 1 = -4$

(binomialsatsen / Pascals triangel :
$$\begin{matrix} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{matrix}$$
)

A.4c) enligt definitionen av division för komplexa tal:

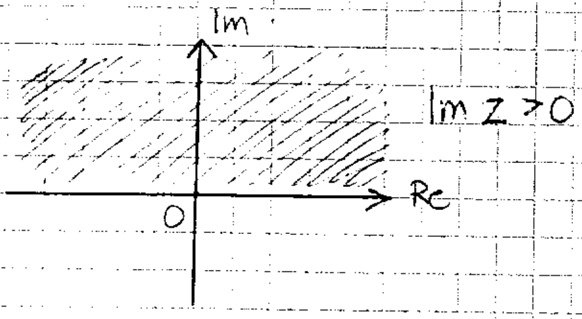
$$\frac{3-4i}{1+i} = \underbrace{\frac{(3-4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}}_{\text{förlängning med konjugatet}} = \underbrace{\frac{3-3i-4i-4}{1^2+1^2}}_{\text{ty } i^2=-1} = \frac{-1-7i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$$

A.5 b) $\left|\frac{3+i}{4+3i}\right| = \frac{|3+i|}{|4+3i|} = \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

A.10c) $\operatorname{Im} z > 0$

$z = x + iy \iff \operatorname{Im} z = y$

$\operatorname{Im} z > 0 \iff y > 0$

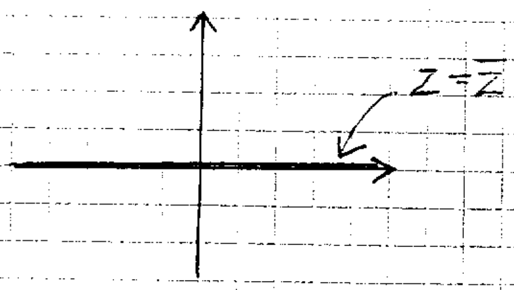


e) $z = \bar{z}$

$z = x + iy \iff \bar{z} = x - iy$

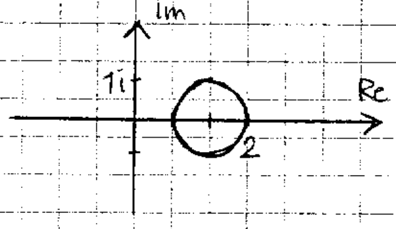
$z = \bar{z} \iff x + iy = x - iy$

$y = 0$



alternativ metod: $\bar{z}$ är speglingen av z i den reella axeln. $\{z : z = \bar{z}\}$ [illegible] de tal som är sin egen spegelbild, dvs som ligger på den reella axeln.

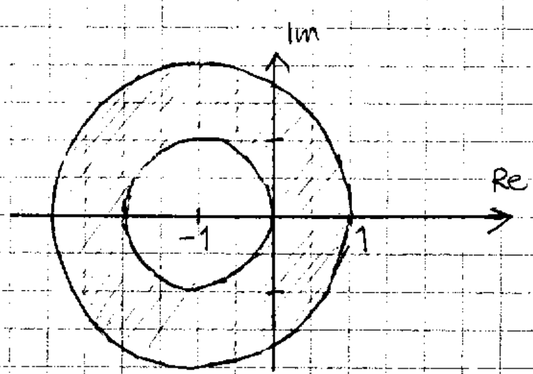
A.12 c) $\{z : |z-2|=1\} \Leftrightarrow$ de punkter z som ligger på avståndet 1 från punkten $z_0=2$ dvs cirkeln med radie 1 och centrum i 2



e) $\{z : 1 \le |z+1| \le 2\} \Leftrightarrow$ de punkter z som uppfyller

$$\begin{cases} |z-(-1)| \ge 1 \\ |z-(-1)| \le 2 \end{cases}$$

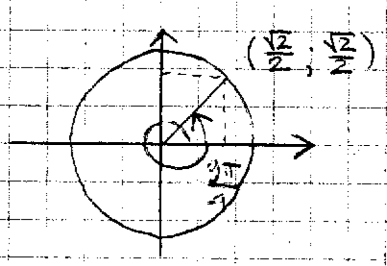
dvs området mellan två cirk. med radie 1 resp. 2 och centrum i $z_0 = -1$



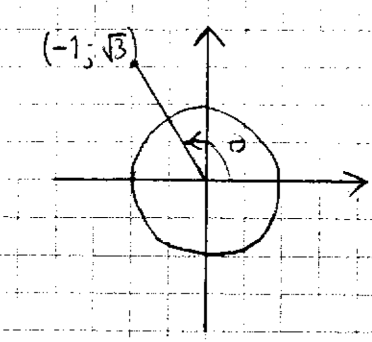
A.18 c) $\begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg z = \frac{9\pi}{4} \end{cases}$

$z = |z| e^{i \arg z} = \sqrt{2}\, \underbrace{e^{i\frac{9\pi}{4}}}_{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= \sqrt{2}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = 1 + i$



A.19 e)



$|z| = \sqrt{1^2 + 3} = 2$

$\theta = \arg z$

vi känner igen $\frac{1}{2}z$ som en punkt på enhetscirkeln:

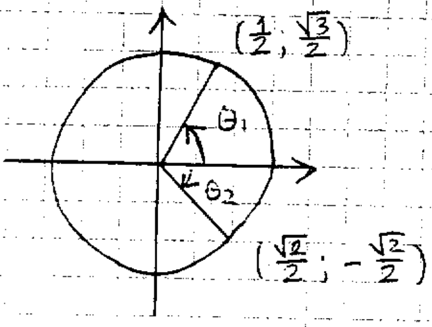
$\frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ och $\arg(z) = \arg(\frac{1}{2}z)$

$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \arg z = \frac{2\pi}{3} + 2k$

z på polär form : $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

A.24 $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{(2-2i)^3}$

$$\arg z = \arg(1+i\sqrt{3}) - \arg(2-2i)^3$$
$$= \arg\left(\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\arg\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}-i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



$$\theta_1 = \arg\left(\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$\theta_2 = \arg\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}-i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi$$

$$\arg z = \frac{\pi}{3} - 3\cdot\left(\frac{-\pi}{4}\right) + 2k'\pi$$
$$= \frac{13\pi}{12} + 2k'\pi \quad \square$$

A.26 c) $z = \dfrac{1}{1+2i\omega} = \dfrac{1-2i\omega}{(1+2i\omega)(1-2i\omega)} = \dfrac{1-2i\omega}{1+4\omega^2} = \dfrac{1}{1+4\omega^2} - i\dfrac{2\omega}{1+4\omega^2}$

$$\begin{cases} \arg z = \theta + 2k\pi \\ |z| = r \end{cases} \iff z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\begin{cases} r\cos\theta = \dfrac{1}{1+4\omega^2} \\ r\sin\theta = -\dfrac{2\omega}{1+4\omega^2} \end{cases} \iff \tan\theta = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{-\frac{2\omega}{1+4\omega^2}}{\frac{1}{1+4\omega^2}} = -2\omega$$

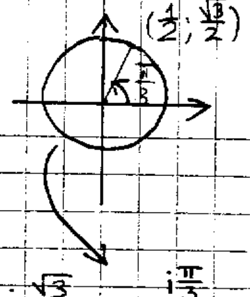
Vi ser att $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{1+4\omega^2} > 0 \ \forall \omega \in \mathbb{R}$ och $\arg z$ kommer därför att ligga i intervallet $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Då gäller $\tan\theta = -2\omega \iff \theta = \arctan(-2\omega)$
$= -\arctan 2\omega$

Alla $\arg z$ ges av $\arg z = -\arctan 2\omega + 2k\pi$.

Välj $k=0$: ett argument är $-\arctan 2\omega$.

$\square$



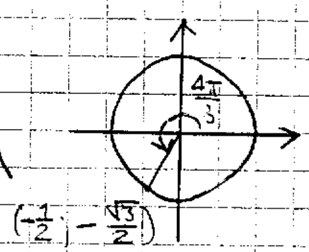
A.27 $z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$

Vi använder att $(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}$.

Skriv först $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ på polär form, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$z=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{100}=e^{i\frac{100\pi}{3}}=e^{i\frac{4\pi}{3}+i\cdot 16\cdot 2\pi}=e^{i\frac{4\pi}{3}}\underbrace{e^{2\pi i\cdot 16}}_{=1}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\square$$

$$\frac{100\pi}{3}=32\pi+\frac{4\pi}{3}=16\cdot 2\pi+\frac{4\pi}{3}$$



A.28 de Moivres formel:

$$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}\quad\forall n\in\mathbb{Z}$$

skriv om på rektangulär form:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

I vårt fall gäller $n=4$. Utveckla vänsterledet m.h.a binomialsatsen:

$$VL=(\cos\theta)^4+4(\cos\theta)^3(i\sin\theta)+6(\cos\theta)^2(i\sin\theta)^2+$$
$$+4(\cos\theta)(i\sin\theta)^3+(i\sin\theta)^4$$
$$=\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta+i4\cos^3\theta\sin\theta$$
$$-i4\cos\theta\sin^3\theta$$

Identifiera real- och imaginärdel i VL och HL:

$$\begin{cases}\cos 4\theta=\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta\\ \sin 4\theta=4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\end{cases}\quad\square$$

A.34 e) $z=3-i$

$$e^z=e^{3-i}=e^3e^{-i}=e^3(\cos 1-i\sin 1)$$

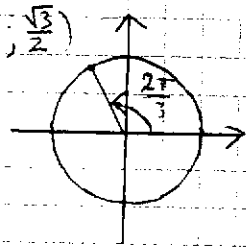
A.35a) $x \longmapsto \dfrac{1+ix}{1-ix} = \dfrac{(1+ix)^2}{(1-ix)(1+ix)} = \dfrac{1+2ix-x^2}{1+x^2} = \underbrace{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}_{\text{realdel}} + i\underbrace{\dfrac{2x}{1+x^2}}_{\text{imaginärdel}}$

A.41 d) $z^3 = -1 + i\sqrt{3}$

Skriv HL på polär form:

$-1+i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



idem för VL: $z = re^{i\theta} \iff z^3 = r^3 e^{i3\theta}$

$$r^3 e^{i3\theta} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \iff \begin{cases} r^3 = 2 \\ 3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

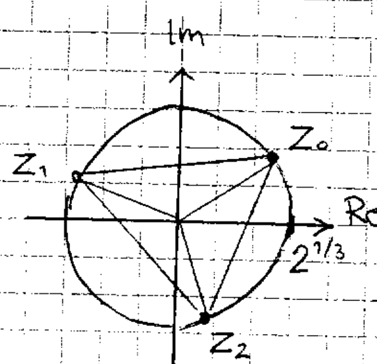
$$\begin{cases} r = \sqrt[3]{2} = 2^{1/3} \\ \theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Rötter fås för 3 konsekutiva värden på k.

Välj $k = 0, 1, 2$:

$z_k = 2^{1/3} e^{i\frac{2\pi(1+3k)}{9}}$

$$\begin{cases} z_0 = 2^{1/3} e^{i\frac{2\pi}{9}} \\ z_1 = 2^{1/3} e^{i\frac{8\pi}{9}} \\ z_2 = 2^{1/3} e^{i\frac{14\pi}{9}} \end{cases}$$



f) $z^4 = -1$

Skriv HL på polär form:

$-1 = e^{i\pi}$

idem för VL:

$z = re^{i\theta} \iff z^4 = r^4 e^{i4\theta}$

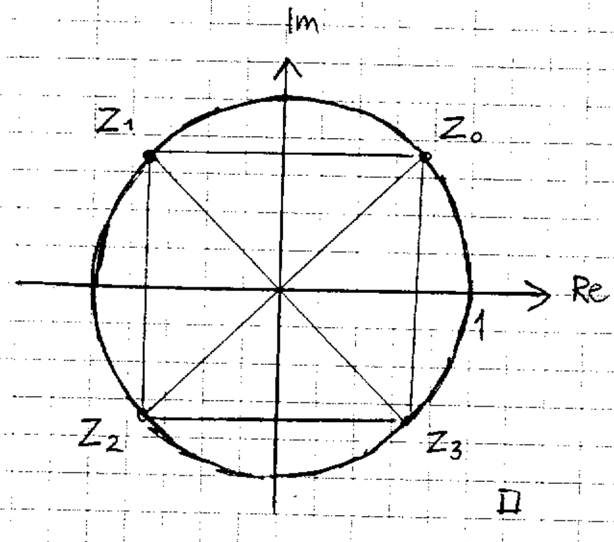
$$r^4 e^{i4\theta} = e^{i\pi} \iff \begin{cases} r^4 = 1 & \text{obs! } r \in \mathbb{R} \\ 4\theta = \pi + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Olika rötter fås för 4 konsekutiva värden på k.

Välj $k = 0, 1, 2, 3$:

$$z_k = e^{i\frac{(1+2k)\pi}{4}}$$



$$\begin{cases} z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

□

A.33 $\{z_0 = 0,\ z_1 = 2,\ z_2 = 2+i,\ z_3 = i\}$

avbildas på

$\{z_0',\ z_1' = 7+i,\ z_2',\ z_3'\}$

Avbildningen bestäms av multiplikation med $\frac{7+i}{2}$

$z_0' = z_0 \cdot \frac{7+i}{2} = 0$

$z_2' = z_2 \cdot \frac{7+i}{2} = \frac{1}{2}(2+i)(7+i) = \frac{14}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{2+7}{2} = \frac{13}{2} + \frac{9}{2}i$

$z_3' = z_3 \cdot \frac{7+i}{2} = \frac{1}{2} i \cdot (7+i) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$

A.39 a) $z^2 + 2iz - 1 + 2i = 0$

Kvadratkomplettering ger: $(z+i)^2 = -2i$

Sätt $z + i = a + ib$ (variabelbyte):

$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$

Identifiera real- och imaginärdelar → 2 ekvationer:

$$(z+i)^2=(a+ib)^2=a^2-b^2+i2ab=-2i \iff \begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=-2 \end{cases}$$

Vi får två lösningar: $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ och $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

som ger två rötter: $\begin{cases} z_1+i=1-i \\ z_2+i=-1+i \end{cases} \iff \begin{cases} z_1=1-2i \\ z_2=-1 \end{cases}$

1.59 d) Rotation med vinkeln $\theta \iff$ multiplikation med $e^{i\theta}$

vektorn $(1;2)$ identifieras med talet $z=1+2i$

$ze^{i\theta}=(1+2i)(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos\theta-2\sin\theta+i\{2\cos\theta+\sin\theta\}$

på vektorform: $(\cos\theta-2\sin\theta;\ 2\cos\theta+\sin\theta)$

1.64 $z^4-2z^3-(5+i)z^2+(6+i)z+6i=0$ (E)

Antag existens av minst en reell rot, $z=a\in\mathbb{R}$:

$a^4-2a^3-5a^2-ia^2+6a+ia+6i=0$

$a^4-2a^3-5a^2+6a+i\{-a^2+a+6\}=0+0i$

Identifiera real- och imaginärdelar:

a rot till ekvationen $\iff$ a satisfierar $\begin{cases} a^4-2a^3-5a^2+6a=0 & (1) \\ -a^2+a+6=0 & (2) \end{cases}$

$a^2-a-6=0 \iff a=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{24}{4}}=\frac{1\pm5}{2}=3$ eller -2.

Kolla om dessa värden på a satisfierar (1):

$3^4-2\cdot3^3-5\cdot3^2+6\cdot3=81-54-45+18=0$

$(-2)^4-2(-2)^3-5(-2)^2+6(-2)=16+16-20-12=0$

Ekvationen (E) har alltså två reella rötter, $z=3$

och $z=-2$.

Dividera vänsterledet med $(z-3)(z+2)=z^2-z-6$

$$
\begin{array}{l}
 z^2 - z - i \\
z^4 - 2z^3 - (5+i)z^2 + (6+i)z + 6i \;\big|\; z^2 - z - 6 \\
-z^4 + z^3 + 6z^2 \\
\qquad -z^3 + (1-i)z^2 + (6+i)z + 6i \\
\qquad +z^3 - z^2 - 6z \\
\qquad\qquad -iz^2 + iz + 6i \\
\qquad\qquad +iz^2 - iz - 6i \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$(E): (z-3)(z+2)(z^2-z-i)=0$

Lös nu $z^2-z-i=0$

Kvadratkomplettering ger: $(z-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}+i$

Sätt $z-\frac{1}{2} = c+id$ (variabelbyte)

Identifiera real- och imaginärdelar

$$(z-\tfrac{1}{2})^2 = c^2-d^2+2icd = \tfrac{1}{4}+i \iff \begin{cases} c^2-d^2 = \frac{1}{4} & (3) \\ 2cd = 1 & (4) \end{cases}$$

Insättning av (4) i (3):

$$c^2 - \frac{1}{4c^2} = \frac{1}{4} \iff c^4 - \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4} = 0$$

Sätt $f = c^2$: $\quad f^2 - \frac{1}{4}f - \frac{1}{4} = 0 \iff c^2 = f = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64}+\frac{16}{64}}$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$$

Men $c \in \mathbb{R}$ ger $f > 0$ och vi får $c = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{8}}$

Vi använder återigen (3):

$$c^2 - d^2 = \frac{1}{4} \iff d^2 = \frac{\sqrt{17}+1}{8} - \frac{2}{8} = \frac{\sqrt{17}-1}{8}$$

$$d = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}}$$

Vi ser i (4) att c och d har samma tecken:

$$\begin{cases} c = \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{8}} \\ d = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}} \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} c = -\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{8}} \\ d = -\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}} \end{cases}$$

$$z - \frac{1}{2} = c + id \iff z = \frac{1}{2} \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{8}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}} \right)$$

(E) har alltså de 4 rötterna

$z_1 = -2, \quad z_2 = 3$

$$z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{8}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}} \right\} \quad \square$$

A.53 $p(x) = x^5 - x^4 + 4x - 4$

$x = 1$ är uppenbar rot till $p(x) = 0$

Dividera $p(x)$ med $x-1$:

$$\begin{array}{l} x^4 + 4 \\ \hline x^5 - x^4 + 4x - 4 \;\big|\; x-1 \\ -x^5 + x^4 \\ \hline \quad 4x - 4 \\ \quad -4x + 4 \\ \hline \end{array} \implies p(x) = (x-1)(x^4+4)$$

Faktorisera $x^4 + 4$: lös först $x^4 + 4 = 0$

sätt $x^2 = y$: $y^2 + 4 = 0 \iff y = \pm 2i$

Lös nu $x^2 = 2i$: $x = a + ib$

$$x^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 2i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 2 \end{cases}$$

Vi får två lösningar: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ och $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

vilket ger två rötter: $\begin{cases} x_1 = 1 + i \\ x_2 = -1 - i \end{cases}$

Likadant för $x^2 = -2i$: $x = c + id$

$$x^2 = c^2 - d^2 + 2icd = -2i \iff \begin{cases} c^2 - d^2 = 0 \\ 2cd = -2 \end{cases}$$

Lösningar $\begin{cases} c = 1 \\ d = -1 \end{cases}$ och $\begin{cases} c = -1 \\ d = 1 \end{cases} \implies$ rötter: $\begin{cases} x_3 = 1 - i \\ x_4 = -1 + i \end{cases}$

$$p(x) = (x-1)(x-(1+i))(x-(-1-i))(x-(1-i))(x-(-1+i))$$

$$= (x-1)\underbrace{((x-1)-i)((x-1)+i)}_{(x-1)^2 + 1^2}\underbrace{((x+1)+i)((x+1)-i)}_{(x+1)^2 + 1^2}$$

$$p(x) = (x-1)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2) \quad \square$$

A.67 $z^6 - 2z^5 + 3z^4 + 4z^2 - 8z + 12 = 0 \quad (E)$

en rot given: $z = 1 + i\sqrt{2}$

a) Ekvationen har reella koefficienter och $1+i\sqrt{2}$ är rot. Då är även $1-i\sqrt{2}$ rot.

b)
$$\begin{aligned}[z-(1+i\sqrt{2})][z-(1-i\sqrt{2})] &= [(z-1)-i\sqrt{2}][(z-1)+i\sqrt{2}] \\ &= (z-1)^2 + (\sqrt{2})^2 \\ &= z^2 - 2z + 3\end{aligned}$$

z^2-2z+3 delar polynomet

c) Dividera med z^2-2z+3:

$$\begin{array}{l|l}
z^4 + 4 & \\
\hline
z^6 - 2z^5 + 3z^4 + 4z^2 - 8z + 12 & z^2 - 2z + 3 \\
-z^6 + 2z^5 - 3z^4 & \\
\hline
\quad -4z^2 + 8z - 12 & \\
\hline
\quad 0 &
\end{array}$$

$(E): (z^2-2z+3)(z^4+4) = 0$

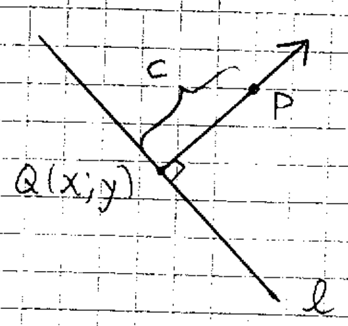
$z^4 + 4 = 0$ har rötterna:

$z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = -1+i$, $z_4 = -1-i$

(se uppgift A.53) $\square$

ordinarie tenta 2000:

1a) avstånd från $P(-1;5)$ till $\ell: 4x+3y-5=0$



$\vec{n} = (4;3)$

$|\vec{n}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

enhetsnormal:

$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$

antag längd (med tecken för "fel håll"): c

$\vec{QP} = c\,\hat{n}$

$\vec{QP} = (-1-x;\, 5-y)$, $c\hat{n} = \left(\frac{4}{5}c; \frac{3}{5}c\right)$

identifiera komponenterna:

$$\begin{cases} -1-x = \frac{4}{5}c \\ 5-y = \frac{3}{5}c \end{cases}$$

Vi vet dessutom att $Q(x;y)$ tillhör linjen:

$$\begin{cases} x = -1-\frac{4}{5}c \\ y = 5-\frac{3}{5}c \\ 4x+3y=5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1-\frac{4}{5}c \\ y = 5-\frac{3}{5}c \\ 3y = 5-4\left(-1-\frac{4}{5}c\right) = 9+\frac{16}{5}c \end{cases}$$

$3\left(5-\frac{3}{5}c\right) = 9+\frac{16}{5}c$

$15-9 = \left(\frac{16}{5}+\frac{9}{5}\right)c$

$c = \frac{6}{25/5} = \frac{6}{5}$ $\square$

1b) Finn planet som är ortogonalt mot $2x-3y+z-4=0$ och som skär det i en linje i yz-planet.

yz-planet: $x=0$

ℓ tillhör de två givna planen: $\ell \begin{cases} 2x-3y+z-4=0 \\ x=0 \end{cases}$

Linjens ekvation på parameterform:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{4}{3} + t \\ z = 3t \end{cases}$$

vi väljer en punkt på linjen $(t=0)$:

$(0; -\frac{4}{3}; 0)$

Med en punkt och två vektorer som är parallella med π kan vi skriva ekvationen på parameterform:

$P(0; -\frac{4}{3}; 0)$

$\vec{v}_1 = (0; 1; 3)$ riktningsvektor till l

$\vec{v}_2 = (2; -3; 1)$ normalvektor till $2x - 3y + z - 4 = 0$

$$\pi : \begin{cases} x = \quad\quad\quad 2s \\ y = -\frac{4}{3} + t - 3s \\ z = \quad\quad 3t + s \end{cases}$$ planets ekvation på parameterform

På affin form : $5x + 3y - z + 4 = 0$

$\square$

2 $$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -8 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 12 & 6 & 1 \\ 29 & -50 & 75 & 43 & \lambda+26 \\ 9 & -12 & 21-\mu & 6 & 6 \\ 32 & -54 & 81 & 45 & 27 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & -12 & -15 & \lambda-3 \\ 0 & 6 & -6-\mu & -12 & -3 \\ 0 & 10 & -15 & -19 & -5 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 3-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{array}\right]$$

- $\lambda \neq 1$: ingen lösning
- $\lambda = 1$: $\rightarrow \mu \neq 3$: $x_3 = x_4 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 0$

  $\rightarrow \mu = 3$: $x_4 = 0$, $x_3 = t$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t$, $x_1 =$

□

3 $2z^3 - 3iz + i - 1 = 0$ har en dubbelrot. Lös ekvationen.

Antag $c \in \mathbb{C}$ dubbelrot, då är polynomet delbart med $(z-c)^2 = z^2 - 2cz + c^2$.

$$\begin{array}{l} \quad 2z + 4c \\ \hline 2z^3 - 3iz + i - 1 \quad \big| \; z^2 - 2cz + c^2 \\ \underline{-2z^3 + 4cz^2 - 2c^2 z} \\ \qquad 4cz^2 - (2c^2 + 3i)z + i - 1 \\ \qquad \underline{-4cz^2 - 8c^2 z \quad + 4c^3} \\ \qquad\qquad (6c^2 - 3i)z - 4c^3 + i - 1 \end{array}$$

Resten är identiskt lika med noll: identifiera koefficienten framför z och konstanttermen.

$$\begin{cases} 6c^2 - 3i = 0 \iff 2c^2 = i \\ 4c^3 + i - 1 = 0 \end{cases}$$

$2c \cdot 2c^2 + i - 1 = 2c \cdot i + i - 1 = 0 \implies c = \frac{1}{2}(1+i)$

Dubbelrot: $z_1 = z_2 = \frac{1}{2}(1+i)$

Sista roten fås genom att sätta kvoten till noll.

$2z + 4 \cdot \frac{1}{2}(1+i) = 0$

$z_3 = -1 - i$

□

4 Utveckla efter den första raden:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Detta är alltså en ekvation på formen $ax+by+cz+d=0$, alltså ekvationen för ett plan.

Vi vill nu visa att de tre punkterna ligger i planet. Sätt in punkternas koordinater som x, y, z:

För (x_1, x_2, x_3):
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Determinanten har två rader lika och (x_1, x_2, x_3) uppfyller alltså ekvationen. $P_1 \in \pi$.

Analogt visas att P_2 och $P_3 \in \pi$.

$\square$

5 a) A är triangulär och vi har därmed att $\det A$ är produkten av diagonalelementen.

$\det A = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ inverterbar.

5b) $$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a^2 & -a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right] \sim \dots \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a^2 & -a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & \cdots & -a & 1
\end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a^2 & -a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
(-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & \cdots & -a & 1
\end{bmatrix}$$

$\square$

6 För triangelns tyngdpunkt, M, gäller:

$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$ för godtycklig punkt O

Välj nu $O=M$:

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{0}$

Låt P vara en godtycklig punkt i triangelns inre.

Bilda summan av kvadraterna på avstånden till triangelns hörn:

$|\vec{PA}|^2+|\vec{PB}|^2+|\vec{PC}|^2 = \vec{PA}\cdot\vec{PA}+\vec{PB}\cdot\vec{PB}+\vec{PC}\cdot\vec{PC}$

Inför nu M: $\vec{PA}=\vec{PM}+\vec{MA}$

$= (\vec{PM}+\vec{MA})\cdot(\vec{PM}+\vec{MA}) + (\vec{PM}+\vec{MB})\cdot(\vec{PM}+\vec{MB}) + (\vec{PM}+\vec{MC})\cdot(\vec{PM}+\vec{MC})$

$= 3\cdot|\vec{PM}|^2 + 2\vec{PM}\cdot\underbrace{(\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC})}_{=0} + |\vec{MA}|^2+|\vec{MB}|^2+|\vec{MC}|^2$

$\geq |\vec{MA}|^2+|\vec{MB}|^2+|\vec{MC}|^2$

Likhet gäller omm $P=M$.

□