LINJÄR ALGEBRA OCH GEOMETRI

2011 LP1

MED: MARIA ROGINSKAYA
AV: MILICA BIJELOVIĆ

Linjära Ekvationssystem

TMA660 → 11/12

Sal 74 TM

maria@chalmers.se

Ex| $xC_2H_5OH + yO_2 = zC_2O + vH_2O$

$$C: 2x = 2z \qquad O: x + 2y = z + v \qquad H: 6x = 2v \qquad \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ x + 2y - z - v = 0 \\ 6x - 2v = 0 \end{cases}$$

Vad är lösningen till ett ekvationssystem?

Ex| $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ (dvs alla tal som uppfyller ekvationen)

Def. Lösning av ett ekvationssystem med n-variabler är <u>alla</u> sammansättningar av n tal som uppfyller <u>alla</u> ekvationer i systemet.

Obs! Det kan vara mer än en lösning, och då vill vi ha <u>alla</u>.

För att hitta lösningen till ett system kan vi istället betrakta ett <u>ekvivalent system</u>.

Dvs vi vill betrakta ett system med samma lösning.

Ex| $x = 2 \not\Leftarrow x^2 = 4$

Def. Två system av linjära ekvationer kallas ekvivalenta om man kan få en av de från den andra med hjälp av elementära (radreducerings)operationer

a) Addera en multipel av en rad till en annan.

b) Multiplicera en ekvation med ett tal

c) Byta plats på två ekvationer

Ex|
$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+2z=5 \\ y+z=3 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=4 \\ z=1 \\ y+z=3 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=4 \\ y+z=3 \\ z=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

utvidgad matris för systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&4 \\ 1&1&2&5 \\ 0&1&1&3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&4 \\ 0&0&1&1 \\ 0&1&1&3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&4 \\ 0&1&1&3 \\ 0&0&1&1 \end{array}\right)$$

trappstegsmatris (trappform)

Ex|
$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+2y-2z=2 \\ y-z=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&2 \\ 2&2&-2&2 \\ 0&1&-1&0 \end{array}\right) \cdot\tfrac{1}{2} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&2 \\ 1&1&-1&1 \\ 0&1&-1&0 \end{array}\right) -1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&2 \\ 0&-1&0&-1 \\ 0&1&-1&0 \end{array}\right) \cdot -1$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&2 \\ 0&1&0&1 \\ 0&1&-1&0 \end{array}\right) -1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&2 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&-1&-1 \end{array}\right) \cdot -1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&2 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&0&3 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&1 \end{array}\right) -2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&1 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&1 \end{array}\right) \begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2&0&-2&0&0 \\ 1&2&-1&-1&0 \\ 6&0&0&-2&0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\tfrac{1}{2} \\ \\ \cdot\tfrac{1}{2} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&-1&0&0 \\ 1&2&-1&-1&0 \\ 3&0&0&-1&0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ -3 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&-1&0&0 \\ 0&2&0&-1&0 \\ 0&0&3&-1&0 \end{array}\right)$$

frivariabel

pivot element

pivot kolumn

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2y - v = 0 \\ 3z - v = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 3z - v = 0 \\ v = t \\ z = \frac{t}{3} \end{array}$$

lösning på parametrisk form
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{3}t \\ v = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ex|
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1&1&2 \\ 1&1&3 \end{array}\right) -1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1&1&2 \\ 0&0&1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x+y=2 \\ 0+0=1 \end{cases}$$

lösning existerar ej

pivotelement

a) Ekvationssystem har ingen lösning om den i reducerad form har pivot element i sista kolumnen

b) Ekvationssystem har en lösning om den i reducerad form har pivot element i varje kolumn utom den sista (i utvidgad form)

c) Ekvationssystem har oändligt många lösningar om det finns en fri variabel

Sats: Endast möjligheter a) b) och c) finns

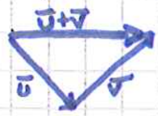
Bevis. Om det finns pivotelement i sista kolumnen ⇒ a)
Om det inte finns pivotelement i sista kolumnen ⇒ alla kolumner har pivotelement ⇒ b); minst en kolumn har pivotelement ⇒ c)

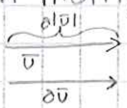
Följesats. Ett system av linjära ekvationer har en, oändligt många eller ingen lösning.

GEOMETRISKA VEKTORER   KAP. 2

"Def" Vektorer har riktning och längd
Undantag: Nollvektor har $\left\{\begin{matrix}\text{ingen}\\ \text{alla}\end{matrix}\right\}$ riktningar

Man kan addera och multiplicera vektorer med tal (skalärer)

Def 1)


Def 2)


Om a är noll så är $a\bar{u}$ nollvektorn

Om a är ett positivt tal så är $a\bar{u}$ vektorn som har samma riktning som $\bar{u}$ och längden $a|\bar{u}|$

Om a är ett negativt tal så är $a\bar{u}$ en vektor med längden $|a|\cdot|\bar{u}|$ och riktningen motsatt till $\bar{u}$

- Räknelagar (s23)

(I) $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$ kommutativa lagen
$\bar{u}+(\bar{v}+\bar{\omega})=(\bar{u}+\bar{v})+\bar{\omega}$ associativa lagen
$\bar{u}+\bar{0}=\bar{u}$

(II) $\lambda(\mu\bar{u})=(\lambda\mu)\bar{u}$
$1\cdot\bar{u}=\bar{u}$
$0\cdot\bar{u}=\bar{0}$
$\lambda\cdot\bar{0}=\bar{0}$

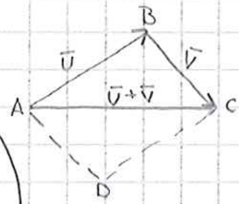
(III) $\left.\begin{matrix}(\lambda+\mu)\cdot\bar{u}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{u}\\ \lambda(\bar{u}+\bar{v})=\lambda\bar{u}+\lambda\bar{v}\end{matrix}\right\}$ distributiva lagen

$\boxed{\text{Bevis.}}$

$\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$

Betrakta $\bar{u}+\bar{v}$

(Kontrollera själv fallen då bilden är annorlunda dvs $\bar{u}\parallel\bar{v}$, och $\bar{u}=0$ eller $\bar{v}=0$)



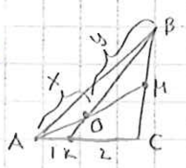
Beteckna slutpunkter som A, B, C (på bilden)
Rita linjen A parallellt med BC och genom C parallellt med AB. Betrakta skärningspunkt D
ABCD är en parallellogram så
$|\overrightarrow{AD}|=|\bar{v}|$ och $|\overrightarrow{DC}|=|\bar{u}|$, så $\overrightarrow{AD}=\bar{v}$, $\overrightarrow{DC}=\bar{u}$
Alltså $\overrightarrow{AC}=\bar{v}+\bar{u}\,(=\bar{u}+\bar{v})$

- Tillämpningar av räknelagar

Ex) Hitta en medelpunkt mellan två punkter

$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Ex)



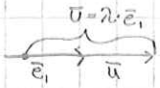
Betrakta
$\bar{u}=\overrightarrow{CA}$
$\bar{v}=\overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\bar{v}$
$\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\bar{u}$
$\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CK}=\overset{(!)}{-\bar{v}}+\frac{2}{3}\bar{u}$
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-\bar{u}+\frac{1}{2}\bar{v}$

$\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AO}=\bar{u}+x\cdot\overrightarrow{AM}=\bar{u}+x(-\bar{u}+\frac{1}{2}\bar{v})$
$\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BO}=\bar{v}+y\cdot\overrightarrow{BK}=\bar{v}+y(-\bar{v}+\frac{2}{3}\bar{u})$

$\bar{u}+x(-\bar{u}+\frac{1}{2}\bar{v})=\bar{v}+y(-\bar{v}+\frac{2}{3}\bar{u})$
$\bar{u}-x\bar{u}+\frac{1}{2}x\bar{v}=\bar{v}-y\bar{v}+\frac{2}{3}y\bar{u}$
$\bar{u}-x\bar{u}-\frac{2}{3}y\bar{u}=\bar{v}-y\bar{v}-\frac{1}{2}x\bar{v}$
$(1-x-\frac{2}{3}y)\bar{u}=(1-y-\frac{1}{2}x)\bar{v}=\bar{0}$ (för $\bar{v}\nparallel\bar{u}$)
$\begin{cases}1-x-\frac{2}{3}y=0 & \bar{u}\neq\bar{0}\\ 1-y-\frac{1}{2}x=0 & \bar{v}\neq\bar{0}\end{cases}$

$x + \frac{2}{3}y = 1$
$\frac{1}{2}x + y = 1$

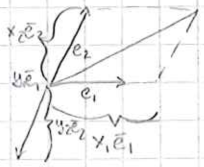
$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{array}\right)$ $y = \frac{3}{4}$ $x = 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = 1 - \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$



Lemma 1 Om $\bar{e}$ inte är en noll vektor på en linje så kan varje vektor $\bar{u}$ på linjen skrivas som $\bar{u} = \lambda\bar{e}$
Dvs sambandet $\bar{u} \leftrightarrow \lambda$ är entydligt

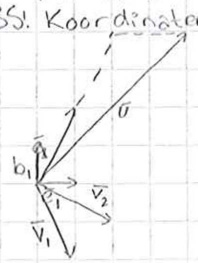
Sats 2 Om $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ inte är parallella, inte noll vektorer så kan varje vektor $\bar{u}$ i planet skrivas som $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$
Där talen x_1, x_2 är entydligt bestämda

Sats 3



Om $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ inte ligger i samma plan eller är nollvektorer
$\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$
OBS! Vektorerna $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ kan väljas (nästan) hur som helst

Def 1 Talen x_1, x_2, x_3 kallas koordinater av $\bar{u}$ i rummet i bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ då
$\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$
($\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ kallas en bas i rummet om de inte ligger i samma plan)
OBS. Koordinater bestäms inte av en vektor utan man ska ha infört en bas.



$\bar{u} = 2e_1 + 2e_2$ $\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ $\bar{b}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{u} = 2b_1 + 2b_1 = 2\overbrace{(1\cdot\bar{b}_1 + 0\cdot\bar{b}_2)}^{e_1} + 2\overbrace{(1\cdot\bar{b}_1 + 2\bar{b}_2)}^{e_2}$
$\bar{u} = (2,2)_{\mathcal{E}}$ $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ $= 4\bar{b}_1 + 4\bar{b}_2 = (4,4)_{\mathcal{B}}$
$V = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$
$\bar{u} = (-4, 4)_V$ $\bar{e}_1 = (1,0)_{\mathcal{B}}$
$\bar{e}_2 = (1,2)_{\mathcal{B}}$

OBS! Om vi arbetar i bas $\overbrace{\bar{e}_1, \bar{e}_2}^{\mathcal{E}}$ bli koordinaterna av
$\bar{e}_1 = (1,0)_{\mathcal{E}}$
$\bar{e}_2 = (0,1)_{\mathcal{E}}$

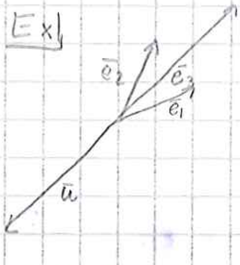
Sats Operationer med vektorer (addition och multiplikation med ett tal) motsvarar till operationer med koordinater
dvs. $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{E}}$ och $\bar{v} = (y_1, y_2, y_3)_{\mathcal{E}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Så
$$\boxed{\begin{aligned} \bar{u}+\bar{v} &= (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)_{\mathcal{E}} \\ \lambda\cdot\bar{u} &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)_{\mathcal{E}} \end{aligned}}$$

Bevis $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{E}}$ där $\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$
betyder $\bar{v} = (y_1, y_2, y_3) \Rightarrow \bar{v} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3$
$\bar{u}+\bar{v} = (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) + (y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3) = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3$
$\bar{u}+\bar{v} = (x_1+y_1)\bar{e}_1 + (x_2+y_2)\bar{e}_2 + (x_3+y_3)\bar{e}_3 = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)_{\mathcal{E}}$

$\bar{v}_1 = (1,-2)_{\mathcal{B}}$ $\bar{u} = (x,y)_V$
$\bar{v}_2 = (2,-1)_{\mathcal{B}}$ $\bar{u} = x\cdot\bar{v}_1 + y\bar{v}_2 = x(1\bar{b}_1 - 2\cdot\bar{b}_2) + y(2\bar{b}_1 - \bar{b}_2)$
$= (x+2y)\bar{b}_1 + (-2x-y)\bar{b}_2 = (x+2y, -2x-y)_{\mathcal{B}}$
Vi har redan räknat ut att
$\bar{u} = (4,4)_{\mathcal{B}}$
Så $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -2x - y = 4 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$
$x = -4$ $y = 4$

Ex|



$\bar u = 0 \cdot \bar e_1 + 0 \cdot \bar e_2 - 1 \bar e_3$

$\bar u = -1 \bar e_1 - 1 \cdot \bar e_2 + 0 \cdot \bar e_3$

$(-1, -1, 0)$

$\bar e_3 = \bar e_1 + \bar e_2$

Def| Om vi har ett system (samling) av vektorer kallas det oberoende om ingen av vektorerna kan skrivas som linjär kombination av andra.
Om en vektor går att skriva som linjär kombinatio av andra, så kallas det linjärt beroende (hela systemet!) (
t.ex $\bar e_3 = \bar e_1 + \bar e_2$ så är $(\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3)$ linjärt beroende
$\bar e_4 = \bar e_1 - 2\bar e_2$, så är systemet $(\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3, \bar e_4)$ linjärt beroende

Def| Bas är ett linjärt oberoende system $(\bar e_1, \dots, \bar e_n)$ sådan att alla vektorer (på linje, planet, rummet) går att uttrycka som linjär kombination av basvektorer.
($n=1$, $n=2$, $n=3$)

Sats| Ett system $(\bar e_1, \dots, \bar e_n)$ är linjärt beroende om och endast om likheten
$$a_1 \bar e_1 + a_2 \bar e_2 + \dots + a_n \bar e_n = 0$$
Uppfylls endast då $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

(linjärt)

Bevis| Systemet är l. oberoende $\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$
Låt $a_k \neq 0$, då $\bar e_k = -\frac{a_1}{a_k}\bar e_1 - \frac{a_2}{a_k}\bar e_2 - \dots - \frac{a_n}{a_k}\bar e_n$
så systemet är l. beroende (?!)
$\Leftarrow$ Låt systemet vara l. beroende då det finns k:
$\bar e_k = b_1 \bar e_1 + \dots + b_n \bar e_n$.
så $-b_1 \bar e_1 - \dots - b_{k-1}\bar e_{k-1} + \bar e_k - b_{k+1}\bar e_{k+1} \dots - b_n \bar e_n = 0$
dvs $a_1 = -b_1$
$a_k = 1 \neq 0$ (?!)
$a_n = -b_n$

Varje system som innehåller en nollvektor är linjärt beroende

Sats| I en bas har alla vektorer entydiga koordinater

Bevis| Låt $u = (x_1, \dots, x_n)_B = (y_1, \dots, y_n)_B$
$\bar u = x_1 \bar b_1 + \dots + x_n \bar b_n = y_1 \bar b_1 + \dots + y_n \bar b_n$
$(x_1 - y_1)\bar b_1 + \dots + (x_n - y_n)\bar b_n = \bar 0$, B är bas
$\Rightarrow x_1 - y_1 = 0$, dvs $x_1 = y_1$

Vektorer, som är element i ett vektorrum.
Vektorrum + bas $\Rightarrow$ koordinater för varje vektor
Rum/plan bestående av punkter + origo $O \Rightarrow$ vektorer ($\overline{OP}$ identifieras med en punkt P)
Om vi dessutom väljer en bas så får vi koordinaterna för $\overline{OP}$ och därmed punkten P.

Dvs. man kan identifiera punkter i rum med triplar av tal (koordinater)
— " — ett plan med par av tal (koordinater)

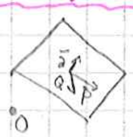
Ekvationer (för koordinater) av linjer och plan i rum och linjer i plan

PARAMETRISK BESKRIVNING AV ETT PLAN

$\overline{QP} = s \cdot \bar a + t \cdot \bar b$

$\overline{OP} = s\bar a + t\bar b + \overline{OQ}$

$\overline{OQ} + \overline{QP}$



Dvs. I termer av koordinater till P (betecknar de (x,y,z))
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$
där $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ är koordinaterna
vektor av $\bar a$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ vektor $\bar b$, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ är koordinater av punkt Q

Ex Ekvation av planet som går genom punkten $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ med riktningsvektorerna $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ i parametrisk form av

$$\begin{cases} x = s+1 \\ y = t-s+2 \\ z = 2t+s+3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0\cdot t + 1\cdot s + 1 \\ y = 1\cdot t + (-1)s + 2 \\ z = 2\cdot t + 1\cdot s + 3 \end{cases} \quad \text{där } s, t \in \mathbb{R}$$

Obs! Vektorerna $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ är också riktningsvektorer för samma plan

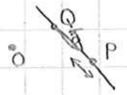
$$\begin{cases} x = t+s+1 \\ y = -s+2 \\ z = 3t+s+3 \end{cases} \quad \text{Beskriver samma plan som} \quad \begin{cases} x = s+1 \\ y = t-s+2 \\ z = 2t+s+3 \end{cases}$$

> dvs samma plan kan beskrivas av olika (ekvivalenta) ekvationssystem

s. 54 ex. 10

Ekvationen av en linje i parametrisk form:

$$\overline{QP} = t\cdot\bar{a}$$
$$\overline{OP} = t\cdot\bar{a} + \overline{OQ}$$



$$\begin{cases} x = a_1\cdot t + x_0 \\ y = a_2\cdot t + y_0 \\ z = a_3\cdot t + z_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ex. Skriv en ekvation (i parametrisk form) av linjen som går genom punkterna:

$$Q: \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad R: \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Riktningsvektor till linjen $\overline{RQ}$: $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = -2t-1 \\ y = t+1 \\ z = -t+1 \end{cases}$$

Om $\overline{RQ}$ är en riktningsvektor så är $-2\overline{RQ}$ också en riktningsvektor.
Linjen genom $R\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ med riktningsvektor $\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$

$$(1)\begin{cases} x = 4t+1 \\ y = -2t \\ z = 2t+2 \end{cases} \quad \text{är ekvivalent med (beskriver samma linje som)} \quad (2)\begin{cases} x = -2t-1 \\ y = t+1 \\ z = -t+1 \end{cases}$$

> För att kontrollera att två ekvationer är ekvivalenta kan vi läsa av "geometrisk betydelse"
> dvs att i (1) har vi riktningsvektor $\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$
> i (2) har vi riktningsvektor $\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$
>
> Vi inser att $\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$
>
> $\Rightarrow$ Riktningsvektorerna är parallella.

Dessutom går (1) genom $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$
För att kontrollera om (2) går genom $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ försöker vi lösa:

$$\begin{cases} 1 = -2t+1 \\ 0 = t+1 \\ 2 = -t+1 \end{cases} \Rightarrow t = -1 \text{ är en lösning}$$

Alltså både (1) och (2) beskriver linjen som går genom $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ och har samma riktning. Dvs. (1) och (2) är samma linje.

Ett annat sätt: Om

$$\begin{cases} x = 4t+1 \\ y = -2t \\ z = 2t+2 \end{cases} \text{ där } t \in \mathbb{R} \text{ av samma mängd punkter som } \begin{cases} x = -2s-1 \\ y = s+1 \\ z = -s+1 \end{cases} \text{ där } s \in \mathbb{R}$$

Det blir samma mängd om $(t \leftrightarrow s)$ det finns en bijektion mellan s och t

$$\begin{cases} (x:)\ 4t+1 = -2s-1 \Leftrightarrow s = -2t-1 \\ (y:)\ -2t = s+1 \Leftrightarrow s = -2t-1 \\ (z:)\ 2t+2 = -s+1 \Leftrightarrow s = -2t-1 \end{cases}$$

dvs $s = -2t-1$ är en bijektion som går om (2) till (1)

Andra formen av ekvationer av linjer/plan. Betrakta:

$$\begin{cases} x = -2t-1 \\ y = t+1 \\ z = -t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-x-1}{2} \\ t = y-2 \\ t = -z+1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1} (= t) \quad \text{där } t \in \mathbb{R}$$

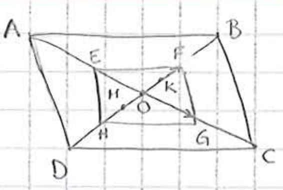
Eftersom t är ett godtyckligt reellt tal kan vi välja det till $\frac{x+1}{-2}$, då blir det samtidigt $\frac{y-1}{1}$ och $\frac{z-1}{-1}$ om $\boxed{\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}}$ ← affin form av ekvationen

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}}$$

är affin form av ekvationen till linjen som har riktningsvektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ och går genom punkten $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

Obs! $a_1 \neq 0$ $a_2 \neq 0$ $a_3 \neq 0$

Man kan använda koordinatekvationer för att beskriva linjer och plan.
Ekvationer i parametrisk form. (Omparametrisering)
Affin form av linjens ekvation



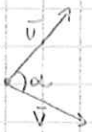
$\bar{u} = \overline{OF}$
$v = \overline{OG}$

1 a) $\bar{u} - \overline{OF}$ b) $\bar{v} - \overline{OG}$ c) $\bar{u} + \bar{v} - \overline{HG}$ o $\overline{EF}$
d) $\bar{u} - \bar{v} - \overline{HE}$ $\overline{FG}$ e) $2\bar{u} + 2\bar{v} - \overline{DC}$ o $\overline{AB}$

2 a) $2\bar{u} - \bar{v}$ - $\overline{DE}$ (eller $\overline{GB}$)
b) $\bar{u} + 2\bar{v}$, $\overline{AF}$ (eller $\overline{HC}$)
c) $\bar{v} - \frac{1}{2}\bar{u}$, $\overline{EM}$ (eller $\overline{KG}$)

Skalärprodukt s. 63

Skalärprodukt "tar" ett par av vektorer och ger ett tal



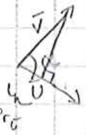
$$\boxed{\begin{array}{l} (\bar{u}, \bar{v}) = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\alpha \\ \text{om } \bar{u} \perp \bar{v} = 0 \\ (\bar{u}, \bar{v}) > 0 \text{ då } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ (\bar{u}, \bar{v}) < 0 \text{ då } \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ (\bar{u}, \bar{u}) = |\bar{u}|^2 \end{array}}$$

Räknelagar (egenskaper) för skalärprodukter

(I) $(\bar{u}, \bar{u}) = |\bar{u}|^2$
(II) $(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v}, \bar{u})$
(III) $(\bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{v}) = (\bar{u}_1, \bar{v}) + (\bar{u}_2, \bar{v}_1)$
(IV) $(\lambda\bar{u}, \bar{v}) = \lambda(\bar{u}, \bar{v})$

(I Bevis) $(\bar{u}, \bar{u}) = |\bar{u}| \cdot |\bar{u}| \cdot \cos 0 = |\bar{u}|^2$

Vinkelrätt projektion



$(\bar{u}, \bar{v}) = |\bar{u}| \cdot (|\bar{v}| \cdot \cos\alpha)$

längden av vinkelrätt projektion av $\bar{v}$ på $\bar{u}$

För att göra om den till vektor multiplicerar vi med enhetsvektor i riktning $\bar{u}$

$$Pr_{\bar{u}}(\bar{v}) = \frac{(\bar{u}, \bar{v})}{|\bar{u}|} \cdot \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{(\bar{u}, \bar{v})}{|\bar{u}|^2} \bar{u} = \frac{(\bar{u}, \bar{v})}{(\bar{u}, \bar{u})} \bar{u}$$

(OBS! FÖRKORTNING FÖRBJUDEN!)

Def! En bas $(e_1, \ldots, e_n)$ kallas ortonormal om $(\bar{e}_j, \bar{e}_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$

Uttrycket av skalärprodukt i koordinater i ON-bas

$\bar{u} = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{E}}$

$\bar{v} = (y_1, y_2, y_3)_{\mathcal{E}}$

$(\bar{u}, \bar{v}) = (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3, y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3) =$
$= x_1y_1(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + x_2y_1(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + x_3y_1(\bar{e}_3, \bar{e}_1) + x_1y_2(\bar{e}_1, \bar{e}_3) + x_1y_2(\bar{e}_2, \bar{e}_2) + x_3y_2(\bar{e}_3, \bar{e}_2) + x_2y_3(\bar{e}_2, \bar{e}_3)$
$+ x_3y_3(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = \boxed{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}$

Ex I Hitta projektionen av en vektor $\bar{v}_1 \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ på riktning av vektorn $\bar{u} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ (ON-bas)

$$\boxed{Pr_{\bar{u}}(\bar{v}) = \frac{(\bar{u},\bar{v})}{(\bar{u},\bar{u})}\cdot\bar{u}} = \frac{2(-1)+1\cdot1+1\cdot0}{(-1)(-1)+1\cdot1+1\cdot1}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\-1/3\end{pmatrix}$$

Ex II Hitta projektionen av en vektor $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ på riktning av vektorn $\bar{u} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\boxed{Pr_{\bar{u}}(\bar{v}) = \frac{(\bar{u},\bar{v})}{(\bar{u},\bar{u})}\bar{v}} = \frac{(-1)\cdot1+1\cdot0+1\cdot0}{(-1)\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot1}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\-1/3\end{pmatrix}$$

$Pr_{\bar{u}}(v_1) = Pr_{\bar{u}}(v_2)$ för att $\bar{v}_1 - \bar{v}_2 \perp \bar{u}$

Om $\overline{OP_1}$ projekteras till samma vektor som $\overline{OP_2}$ betyder det att P_1 och P_2 ligger i samma plan som är vinkelrätt mot $\bar{u}$ och går genom Q, där $Pr_{\bar{u}}(\overline{OP_1}) = \overline{OQ}$

Normalform av ekvation för ett plan

$$Pr_{\bar{u}}(\bar{v}_1) = Pr_{\bar{u}}(\bar{v}_2) \iff \frac{(\bar{u},\bar{v}_1)}{(\bar{u},\bar{u})}\bar{u} = \frac{(\bar{u},\bar{v}_2)}{(\bar{u},\bar{u})}\bar{u} \iff \frac{(\bar{u},v_1)}{(\bar{u},\bar{u})} \iff (\bar{u},\bar{v}_1) = (\bar{u},\bar{v}_2)$$

$ax_1 + bx_2 + cx_3 = -d$ ← konstant

(a,b,c) är koordinater till en vektor som är vinkelrätt mot planet

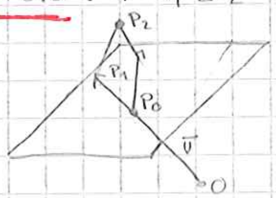
(x_1,x_2,x_3) är koordinater av en punkt i planet.

Ex I Hitta en ekvation av planet som går genom punkten $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ och är vinkelrätt mot riktning $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + d = C \quad (\pi \perp \bar{u})$

$1 - 2\cdot0 + 3(1) + d = 0 \Rightarrow -2 + d = 0 \Rightarrow d = 2$

Svar: $\pi: x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2 = 0$



$\overline{OP_1} = Pr_{\bar{u}}(\overline{OP_2}) \qquad P_2 = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$|\overline{P_1P_0}| = \text{avståndet } (P_2, \pi)$

$= |\overline{OP_1} - \overline{OP_0}|$

$$= \left|\frac{(\overline{OP_2},\bar{u})}{|u|^2}\bar{u} - \overbrace{\frac{(\overline{OP_0},\bar{u})}{|u|^2}\bar{u}}^{OP_0}\right| = \left|\frac{(\overline{OP_2},\bar{u})}{|\bar{u}|^2} - \frac{(OP_0,\bar{u})}{|\bar{u}|^2}\right||\bar{u}|$$

$$= \left|\frac{(OP_2,\bar{u}) - (OP_0,\bar{u})}{|\bar{u}|}\right|$$

$$= \left|\frac{ay_1 + by_2 + cy_3 + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| \quad \text{där } \pi: ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

ON-bas: En bas av vektorer av längd 1 som är vinkelrätta till varandra

Skalärprodukt i ON-bas: $\bar{u} = (x_1,x_2,x_3)$, $\bar{v} = (y_1,y_2,y_3)$ $\quad (\bar{u},\bar{v}) = x_1y_1 + x_2\cdot y_2 + x_3\cdot y_3$

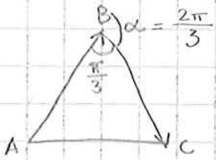
Projektion av en vektor på en riktning given av en annan vektor

$$\boxed{Pr_{\bar{u}}(\bar{v}) = \frac{(\bar{u},\bar{v})}{(\bar{u},\bar{u})}\bar{u}}$$

Normalform av ekvationen av:

$ax + by + cz + d = 0$	plan i rummet
$ax + by + d = 0$	linje i planet

Ex $\triangle ABC$ är en liksidig triangel med sidolängd a. Hitta $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$



$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos\alpha$$
$$= a \cdot a \cdot \cos\alpha = -\frac{a^2}{2}$$

Ex Är basen $\underset{\bar{e}_1}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{\bar{e}_2}{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}, \underset{\bar{e}_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$ en ON-bas?

$$\left(\underset{\bar{e}_1}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{\bar{e}_1}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}\right) = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2 \neq 1$$

Nej!

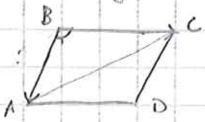
Ex Är basen $\bar{e}_1 \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2\end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = 0 \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = 0$$

$$(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = 0 \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
$$(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0 \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0\right) = 0$$
$$(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$

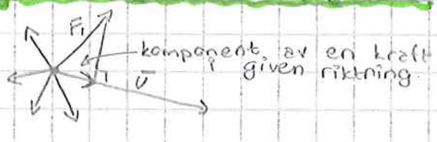
JA, DET ÄR EN ON-BAS

Ex ABCD är en parallellogram $|AB| = 2$, $|BC| = 3$ $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$.
Hitta längden av $|AC|$



$$|AC| = |\overline{AC}| = |\overline{BC} - \overline{BA}| = \sqrt{(\overline{BC} - \overline{BA}, \overline{BC} - \overline{BA})}$$
$$(\overline{BC} - \overline{BA}, \overline{BC} - \overline{BA}) = (\overline{BC}, \overline{BC} - \overline{BA}) - (\overline{BA}, \overline{BC} - \overline{BA})$$
$$= (\overline{BC}, \overline{BC}) - (\overline{BC}, \overline{BA}) - (\overline{BA}, \overline{BC}) + (\overline{BA}, \overline{BA})$$
$$= |BC|^2 \underbrace{- 2|BC||BA| \cdot \cos\frac{\pi}{3}} + |BA|^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 7$$

Projektion (vinkelrätt projektion) s. 65



Ex
$$\mathcal{E} = \left(\bar{e}_1 = \begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

OBS! PROJEKTIONSFORMELN GÄLLER ENDAST FÖR ON-BAS

koordinater av $\bar{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ i $\mathcal{E}$ kan beräknas som $(\bar{v}, \bar{e}_1), (\bar{v}, \bar{e}_2), (\bar{v}, \bar{e}_3)$

$$Pr_{\bar{e}_1}(\bar{v}) = \frac{(\bar{v}, \bar{e}_1)}{|e_1|^2} \cdot \bar{e}_1 = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} \cdot \bar{e}_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1$$
$$Pr_{\bar{e}_2}(\bar{v}) = \frac{(\bar{v}, \bar{e}_2)}{|e_2|^2} \bar{e}_2 = \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} \cdot \bar{e}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2$$
$$Pr_{\bar{e}_3}(\bar{v}) = \frac{(\bar{v}, \bar{e}_3)}{|e_3|^2} \bar{e}_3 = 1 \cdot \bar{e}_3$$
$$\bar{v} = Pr_{\bar{e}_1}(\bar{v}) + Pr_{\bar{e}_2}(\bar{v}) + Pr_{\bar{e}_3}(\bar{v}) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2 + \bar{e}_3$$

Ekvationer av ett plan i normal form

Ex Skriv en ekvation av planet som har normalvektor $(1,2,3)$ och går genom origo

Svar: $\pi: x + 2y + 3z = 0$

Ex Hitta en normalvektor till $\pi: 2x - y + z + 2 = 0$
Svar: $(2, -1, 1)$

Ex Hitta vinkeln mellan plan π_1 $2x-y+z+2=0$ och π_2 $x+y-z+3=0$

Vinkeln mellan plan är samma som vinkeln mellan deras normalriktningar

En normalvektor till π_1 är $\bar{n}_1=(2,-1,1)$

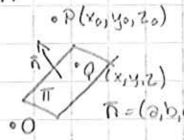
π_2 är $\bar{n}_2=(1,1,-1)$

$$(\bar{n}_1,\bar{n}_2)=\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2\cdot\cos\alpha$$
$$0=\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2\cdot\cos\alpha$$
$$\cos\alpha=0$$
$$\alpha=\frac{\pi}{2}$$ så planen är vinkelräta

Avståndet till ett plan

Ex $P=(-1,2,1)$

$\pi = x+2y+z+4=0$



$\bar{n}=(a,b,c)=(1,2,1)$

$$Pr_{\bar{n}}(\overline{OP})=\frac{(\overline{OP},\bar{n})}{|\bar{n}|^2}\bar{n}=\frac{ax_0+by_0+cz_0}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$O\in\pi \Rightarrow ax+by+cz+d=0$

$$Pr_{\bar{n}}(\overline{OQ})=\frac{(\overline{OQ},\bar{n})}{|\bar{n}|^2}\bar{n}=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}$$

$$d(\pi,P)=|Pr_n(\overline{OP})-Pr_n(\overline{OQ})|=\left|\frac{ax_0+by_0+cz_0}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}-\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{ax_0+by_0+cz_0\underbrace{-(ax+by+cz)}_{-d}}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\frac{ax_0+by_0+cz_0-(ax+by+cz)}{a^2+b^2+c^2}\right|\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0-(ax+by+cz)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|x_0+2y_0+z_0+4|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}=\frac{|-1+4+1+4|}{\sqrt{6}}=\frac{8}{\sqrt{6}}=\frac{8\sqrt{6}}{6}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

VEKTORPRODUKT Kap-5

Def Vektorprodukt $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

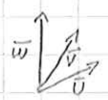
$(\bar{u},\bar{v})\to\bar{u}\times\bar{v}$, där $\bar{u}\times\bar{v}$ är en vektor s.a

a) $\bar{u}\times\bar{v}$ är vinkelrätt till planet spänt av $\bar{u}$ och $\bar{v}$

b) $|\bar{u}\times\bar{v}|$ är lika med arean av en parallellogram med sidorna u och v

c) systemet $(\bar{u},\bar{v},\bar{u}\times\bar{v})$ är <u>positivt orienterat</u>*

* Ett linjärt oberoende system av vektorer $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ kallas positivt orienterat om man placerar höger hands palm längs $\bar{u}$ vektor, så att fingrarna viks mot $\bar{v}$ vektorn, då går tummen åt samma sida som $\bar{w}$.



Egenskaper (Räknelagar) av kryssprodukt

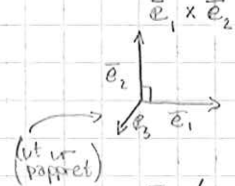
a) $\bar{u}\times\bar{u}=\bar{0}$ ($\bar{u}\times\bar{v}=\bar{0}$ om och endast om $\bar{u}\parallel\bar{v}$)

b) $\bar{u}\times\bar{v}=-\bar{v}\times\bar{u}$

c) $(\lambda\bar{u}+\beta\bar{v})\times\bar{w}=\lambda(\bar{u}\times\bar{w})+\beta(\bar{v}\times\bar{w})$

Inför ON-bas $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ som är positivt orienterat

$\bar{e}_1\times\bar{e}_2=\bar{e}_3$, $\bar{e}_2\times\bar{e}_3=\bar{e}_1$, $\bar{e}_1\times\bar{e}_3=-\bar{e}_2$, $\bar{e}_3\times\bar{e}_2=-\bar{e}_1$, $\bar{e}_2\times\bar{e}_1=-\bar{e}_3$



$\bar{u}=(u_1,u_2,u_3)=u_1\bar{e}_1+u_2\bar{e}_2+u_3\bar{e}_3$

$\bar{v}=(v_1,v_2,v_3)=v_1\bar{e}_1+v_2\bar{e}_2+v_3\bar{e}_3$

$\bar{u}\times\bar{v}=(u_1\bar{e}_1+u_2\bar{e}_2+u_3\bar{e}_3)\times(v_1\bar{e}_1+v_2\bar{e}_2+v_3\bar{e}_3)$

$=u_1v_1\bar{e}_1\times\bar{e}_1+u_1v_2\bar{e}_1\times\bar{e}_2+u_1v_3\bar{e}_2\times\bar{e}_1+u_2v_1\bar{e}_2\times\bar{e}_1+u_2v_2\bar{e}_2\times\bar{e}_2+u_2v_3\bar{e}_2\times\bar{e}_3+$
$u_3v_1\bar{e}_3\times\bar{e}_1+u_3v_2\bar{e}_3\times\bar{e}_2+u_3v_3\bar{e}_3\times\bar{e}_3=u_1v_2\bar{e}_3-u_1v_3\bar{e}_2-u_2v_1\bar{e}_3+u_2v_3\bar{e}_1+$
$u_3v_1\bar{e}_2-u_3v_2\bar{e}_1=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1)$

Def $\bar{u}\times\bar{v}$

Memoreringsregel: $\begin{pmatrix} \overset{+}{\bar{e}_1} & \overset{+}{\bar{e}_2} & \overset{+}{\bar{e}_3} & \overset{-}{\bar{e}_1} & \overset{-}{\bar{e}_2} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{pmatrix}$

Def. $\boxed{\bar{u}\times\bar{v} = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)}$

Bevis: a) $u \parallel v \Rightarrow v_1 = \lambda u_1,\ v_2 = \lambda u_2,\ v_3 = \lambda u_3$

$(u_2(\lambda u_3) - u_3(\lambda u_2),\ u_3(\lambda u_1) - u_1(\lambda u_3),\ u_1(\lambda u_2) - u_2(\lambda u_1)) = (0,0,0)$

b) $u\times v = \ldots = -v\times u$

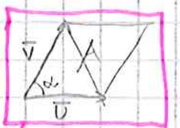
c) $(\lambda u + \beta v)\times w = ((\lambda u_2 + \beta v_2)w_3 - (\lambda u_3 + \beta v_3)\cdot w_2, \ldots) = \lambda(u_2\cdot w_3 - u_3 w_2, \ldots)$
$+ \beta(v_2 w_3 - v_3 w_2, \ldots)$
$= \lambda\bar{u}\times\bar{w} + \beta\bar{v}\times\bar{w}$

Bevis att algebraisk definition medför geometrisk definition

a) $\bar{u}\times\bar{v} \perp \bar{u},\bar{v}$

$(\bar{u}\times\bar{v},\bar{u}) = \left(\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0$

b) $|\bar{u}\times\bar{v}|$ = Arean av



$A = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\sin\alpha$
$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

s. 91

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{(\bar{u},\bar{v})}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(\bar{u},\bar{v})^2}{|\bar{u}|^2\cdot|\bar{v}|^2}}$

$A = |u|\cdot|v|\sqrt{1 - \frac{(\bar{u},\bar{v})^2}{|\bar{u}|^2\cdot|\bar{v}|^2}} = \sqrt{|u|^2\cdot|v|^2 - (\bar{u},\bar{v})^2} =$

$= \sqrt{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2}$

$= \sqrt{(u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2}$

c) Orientering av $(\bar{u},\bar{v},\bar{u}\times\bar{v})$ är positiv

$\Psi : (\bar{u},\bar{v},\bar{w}) \to \begin{cases} +1 & \text{om } (\bar{u},\bar{v},\bar{w}) \text{ är positivt orienterad} \\ -1 & \text{— || — negativt orienterad} \\ \text{ej def} & \text{om } (\bar{u},\bar{v},\bar{w}) \text{ är linjärt aberoende} \end{cases}$

Ψ är kontinuerlig

Betrakta $\Psi(\bar{u},\bar{v},\bar{u}\times\bar{v})$ Om vi ändrar $\bar{u}$ och $\bar{v}$ "bara lite", ändras $\bar{u}\times\bar{v}$ också "lite"

$\Psi(\bar{u},\bar{v})$ är kontinuerlig som en sammansättning av två kontinuerliga

$(\Psi\circ((\bar{u},\bar{v}) \to (\bar{u},\bar{v},\bar{u}\times\bar{v})))$

Vrid $(\bar{u},\bar{v})$ kontinuerligt till $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$, men undvik att få ett par av parallella.

$\Psi(\bar{u},\bar{v}) = \Psi(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ (eftersom vi inte kan hoppa från "+1" till "−1")

$= \Psi(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_1\times\bar{e}_2) = \Psi(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3) = +1$

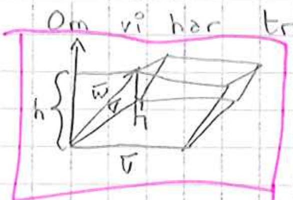
$\bar{e}_1\times\bar{e}_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{algebraisk} \\ \text{def}}}{=} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = (0\cdot0 - 0\cdot1,\ 0\cdot0 - 0\cdot0,\ 1 - 0\cdot0) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \bar{e}_3$

Eftersom algebraisk definition ger samma vektor som geometrisk definition och den geometriska definitionen inte beror på val av en bas så beror inte heller vektorprodukten på valet av bas.

Tillämpningar:

Om vi har två riktningsvektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ till ett plan, kan vi få en normalvektor som $\bar{u}\times\bar{v}$

Om vi har tre vektorer $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$, så kan vi beräkna volymen av en parallellipiped



$\text{Vol} = \text{höjd}\cdot\text{"arean bas"} = Pr_{\bar{u}\times\bar{v}}(\bar{w})\cdot|\bar{u}\times\bar{v}| = \left|\frac{(\bar{u}\times\bar{v},\bar{w})}{|u\times v|^2}\bar{u}\times\bar{v}\right|\cdot|\bar{u}\times\bar{v}| = \boxed{|(\bar{u}\times\bar{v},\bar{w})|}$

s. 85

VEKTORRUM $\mathbb{R}^n$ kap 6

Def $\mathbb{R}^n$ består av n-tiplar av (reella) tal med följande operationer:

"+" $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$ **Ex** $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

"$\alpha\cdot$" $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$ **Ex** $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$, $(-2)\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

VEKTORRUM

Def $(V, +, \cdot)$ är ett vektorrum, där V är en mängd, "+" är bi-operation ("+" $\underbrace{V \times V}$ $\to V$) "$\cdot$" är operation på $\mathbb{R} \times V$ ("$\cdot$" $\mathbb{R}\times V \to V$) sådana att

(u,v) där $u \in V$, $v \in V$ dvs "alla möjliga tal"

a) $v+u = u+v$
b) $(v+u)+w = v+(u+w)$
c) $\exists\ 0 \in V: \ \forall v \in V \quad 0+v = v$
d) $\forall v \in V \ \exists (-v): \ v+(-v) = 0$
e) $\alpha\cdot(\beta\cdot v) = (\alpha\cdot\beta)\cdot v \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
f) $(\alpha+\beta)v = \alpha\cdot v + \beta\cdot v \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
g) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
h) $1\cdot u = u$

Skalärprodukt i $\mathbb{R}^n$

$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$

Obs! Vektorprodukt finns endast i $\mathbb{R}^3$ som kan identifieras med det geometriska rummet!

Om baser (Iden)

Def Givet vektorer $v_1, \dots, v_k$ kallar vi $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$ en linjär kombination av vektorer $v_1, \dots, v_k$ med koefficienterna $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

Ex $\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$, så är $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en linjär kombination av (v_1, v_2, v_3)

(med t.ex koefficienter $(1,0,0)$ eller $(0, \frac{1}{2}, 0)$, eller...)
medan $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ inte är en linjär kombination av v_1, v_2, v_3

mängden av alla linjära kombinationer

Def Mängd av alla linjära kombinationer av $(v_1, \dots, v_k)$ kallas linjärt hölje av $(v_1, \dots, v_k)$ och betecknas som $\operatorname{spann}(\{v_1, \dots, v_k\})$.

Def Delrum är en delmängd i ett vektorrum V, som är ett vektorrum m.a.p samma operationer

Obs! Det enda som krävs är att operationerna är definierade. dvs summan av två vektorer i delrummet ska vara i delrummet. Och multiplar av en vektor i delrummet ska vara i delrummet.

Ex $Y \subset \mathbb{R}^2$
$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}, \text{där } t \in \mathbb{R} \right\}$ är ett delrum: $\begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_2 \\ 2t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1+t_2 \\ 2t_1+2t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1+t_2 \\ 2(t_1+t_2) \end{pmatrix}$, $t_1+t_2 \in \mathbb{R}$
$(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in Y)$

$\underset{\in Y}{\alpha \cdot \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \alpha t \\ 2\alpha t \end{pmatrix} = \underset{\in Y}{\begin{pmatrix} \alpha t \\ 2(\alpha t) \end{pmatrix}}$, $\alpha\, t \in \mathbb{R}$

$W \subset \mathbb{R}^2$
$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ är inte ett delrum i $\mathbb{R}^2$ (inte ett vektorrum)
Betrakta $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in W$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \notin W$

Sats $\boxed{\text{Låt } v_1,\dots,v_k \in V \quad \text{Spann}(v_1,\dots,v_k) \text{ är ett delrum i } V.}$

Bevis Låt $u_1, u_2 \in \text{spann}(v_1,\dots,v_k)$

a) $u_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

$u_2 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k$

$u_1 + u_2 = \underset{\in \mathbb{R}}{(\alpha_1+\beta_1)} v_1 + \dots + \underset{\in \mathbb{R}}{(\alpha_k+\beta_k)} v_k \quad \in \text{spann}(v_1,\dots,v_k)$

b) Låt $\alpha \in \mathbb{R} \quad u \in \text{spann}(v_1,\dots,v_k)$

$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

$\alpha u = \underset{\in \mathbb{R}}{(\alpha\cdot\alpha_1)} v_1 + \dots + \underset{\in \mathbb{R}}{(\alpha\alpha_k)} v_k \quad \in \text{spann}(v_1,\dots,v_k)$

Def $(u_1,\dots,u_n)$ är en bas i V om

a) $(u_1,\dots,u_n)$ är ett linjärt oberoende system

b) $\text{spann}(u_1,\dots,u_n) = V$

Def Ett system av vektorer kallas linjärt oberoende om → s.100

$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$

har endast lösning $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

(Eller $u_j \notin \text{spann}(u_1,\dots,u_{j-1},u_{j+1},\dots,u_n)$ för alla j)

Observation: $(u_1,\dots,u_n)$ är linjärt beroende om och endast om $\exists j$:

$\text{spann}(u_1,\dots,u_{j-1},u_j,u_{j+1},\dots,u_n) = \text{spann}(u_1,\dots,u_{j-1},u_{j+1},\dots,u_n)$

Bevis $\Leftarrow$ Om $\text{spann}(u_1,\dots,u_{j-1},u_j,u_{j+1},\dots,u_n) = \text{spann}(u_1,\dots,u_{j-1},u_{j+1},\dots,u_n)$

$u_j \in \text{spann}(u_1,\dots,u_{j-1},u_j,u_{j+1},\dots,u_n) = \text{spann}(u_1,\dots,u_{j-1},u_{j+1},\dots,u_n)$

$\hookrightarrow (0,\dots,0,\underset{j}{1},0,\dots,0)$ (andra def. att systemet är linjärt beroende)

På detta sätt är en bas minsta sammansättning av vektorer som har givet linjärt hölje (du kan lägga till men inte ta bort)

Sats Två baser i ett vektorrum har samma antal vektorer

Bevis Betrakta $\mathcal{B}_1 = (u_1,\dots,u_n)$ som är två baser i V

$\mathcal{B}_2 = (v_1,\dots,v_m)$

Låt $n<m$ $\quad v_1,\dots,v_m \in V$, så vi har $v_1 = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(1)} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}, \dots, v_m = \begin{pmatrix} v_1^{(m)} \\ \vdots \\ v_n^{(m)} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$

Ställ upp vektorer som en matris

$\begin{pmatrix} v_1^{(1)} & & v_1^{(m)} \\ \vdots & & \vdots \\ v_n^{(1)} & & v_n^{(m)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gaussredusera}} \begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & * \end{pmatrix}$

Det finns max n pivotelement, så det finns minst en kolonn utan pivotelement. Låt det vara sista (annars byt ordning från början). Som en utvidgad matris motsvarar detta ett lösbart system.

Dvs. det finns $x_1,\dots,x_{m-1}$ sådana att

$\begin{cases} v_1^{(1)} \cdot x_1 + \dots + v_1^{(m-1)} \cdot x_{m-1} = v_1^{(m)} \\ \vdots \\ v_n^{(1)} \cdot x_1 + \dots + v_n^{(m-1)} \cdot x_{m-1} = v_n^{(m)} \end{cases} \iff x_1 \cdot \bar{v}_1 + \dots + x_{m-1} \bar{v}_{m-1} = \bar{v}_m \Rightarrow (\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_m)$ är linjärt beroende (?!) $\mathcal{B}_2$ är en bas?!

Alltså måste $n \geq m$, Likadant $m \geq n$ $\boxed{\text{Så } n=m}$

Def Antal av vektorer i en bas i ett vektorrum V kallas dimention av V

Om vi väljer en bas i n-dimentionellt vektorrum V, anger den identifiering med $\mathbb{R}^n$

Ex Ange en bas för $\text{spann}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ där $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Betrakta $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, så (u_1,u_2) är en bas i $\text{spann}(u_1,u_2,u_3,u_4)$

(u_2,u_3) är också en bas

Sats Varje linjärt oberoende system av n-vektorer i n-dimensionellt rum är en bas

Bevis Låt $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ vara linjärt oberoende, och vi har en bas $(v_1, \dots, v_n)$.
$\text{spann}(v_1, \dots, v_n) = V$ är det en bas. Om inte så finns det ett k: $u_k \notin \text{spann}(v_1, \dots, v_n)$
Ta $v_{n+1} = u_k$ observera att $(v_1, \dots, v_{n+1})$ är linjärt oberoende
$(v_1, \dots, v_{n+1})$ är en bas i V så $n+1 = n$ (?!)

Def En matris $n \times m$ är "en tabell" av tal som har n rader och m kolonner

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1m} \\ & & & \\ a_{n1} & & & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} = (a_i^j)_{i,j=1}^{n,m}$$

s.116

$$\boxed{A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}}$$ där A och B är matriser $n \times m$ Obs! Matriserna måste ha samma storlek

Ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$ ej definierat

$$\boxed{\lambda A = (\lambda \cdot a_{ij})_{ij}^{n,m} \quad \text{där } A = (a_{ij})_{ij=1}^{n,m}}$$

Ex $2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}\right)_{i,k=1}^{n,l}}$$ där $\underset{n \times m}{A = (a_{ij})_{ij=1}^{n,m}}$, $\underset{m \times l}{B = (b_{jk})_{j,k=1}^{m,l}}$ OBS

Ex $\underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) + 2(-1) + 3(-1) & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 1\cdot(-1) + (-1)(-1) + 0(-1) & 1\cdot 1 + (-1\cdot 1) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

$\underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{3 \times 3}{\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{AB \neq BA}$$

Vektorer och matriser

En (kolonn) vektor är en matris $(n \times 1)$
En matris kan betraktas som bestående av kolonnvektorer

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (b_1, b_2)$ där $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Egenskap $A \cdot B = (A \cdot b_1 \ \ A \cdot b_2 \ \dots \ A \cdot b_l)$ $\qquad B = (b_1, b_2 \dots b_l)$

Matriser och system av ekvationer

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1m} \\ & \\ a_{n1} & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_n \end{pmatrix}$, dvs $A \cdot X = B$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix}$, A = matris av systemet

matris $\neq$ utvidgad matris

Ex
$$(*) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisen av systemet (*) $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ utvidgad matris av systemet (*)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{utvidgad}} \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{matris}} \begin{cases} x + 2y + 3z = ? \\ x - y = ? \end{cases}$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} n \qquad I_n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{I \cdot A = A}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Systemet som ser ut som $IX = B$ är enkelt att lösa: $X = IX = B$

$AX = B$

Om det finns en matris C: $CA = I$ så

$C \cdot (AX) = (CA) \cdot X = IX = X$ Lösningen är då $X = CB$

Def! En kvadratisk matris A $(n \times n)$ kallas inverterbar om det finns C $(n \times n)$ sådan att $C \cdot A = A \cdot C = I$

→ s.128

Matrisen kallas då <u>invers</u> matris till A och betecknas A^{-1}

Inversmatris genom Gausselimination

$$\left(\underset{n \times n}{A} \,\middle|\, \underset{n \times n}{I_n} \right) \sim \left(I_n \,\middle|\, A^{-1} \right)$$

Bevis! **Def!** Elementära matriser

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda a_{21} & a_{32} + \lambda a_{22} & a_{33} + \lambda a_{23} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

motsvarar elementär rad operation (addera multipel av andragrad till tredje)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow$$

motsvarar elementär radreducering (multiplikation av en rad med ett tal)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

motsvarar elementär radreducering (byte av två rader)

$$(A | I) \sim (I | C)$$

$$(E_1 A | E_1 I) \sim (E_2 E_1 A | E_2 E_1 I) \sim \ldots \sim (\underbrace{E_n \ldots E_1 A}_{I} | \underbrace{E_n \ldots E_1 I}_{C})$$

$(A | I) \sim (I | C)$ $\quad CA = I \Rightarrow C$ är invers till A

Ex! $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Hitta inversmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

Kontroll

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$$

Transponat matriser

$A^T = (a_{ji})$ om $A = (a_{ij})$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$(A+B)^T = A^T + B^T$
$(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Bevis $(A \cdot B)_{ij} = \sum_{m=1}^{n} a_{mi} b_{mj}$

$((A \cdot B)^T)_{ji} = (A \cdot B)_{ij} = \sum_{m=1}^{n} a_{im} b_{mj} = \sum_{m=1}^{n} (A^T)_{mi} \cdot (B^T)_{jm} = \sum_{m=1}^{n} (B^T)_{jm} \cdot (A^T)_{mi} = (B^T \cdot A^T)_{ji}$

$\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$

Homogena ekvationssystem

$A \cdot X = 0$ Om A har invers $X = A^{-1}AX = A^{-1}0 = 0 \Rightarrow$ Det finns entydlig lösning
matris vektor

$X = 0$ är alltid en lösning på en homogen ekvation
$A \cdot 0 = 0$
Lösningar till $AX = 0$ utgör ett delrum i $\mathbb{R}^n$

Bevis a) Låt $AX = 0$ och $AY = 0$ då $A(X+Y) = AX + A \cdot Y = 0 + 0 = 0$
b) Låt $AX = 0$, $t \in \mathbb{R}$ $A(tX) = t \cdot AX = t \cdot 0 = 0$

Def $\{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\}$ - kallas nollrum av A

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Hitta en bas i nollrum

$AX = 0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{matrix}$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t \right.$

Svar: En bas till nollrum är $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ Hitta en bas i nollrum

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = t - 3s \\ y = -2t + 2s \\ z = t \\ w = s \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s$

Obs! Dimension av nollrum är antalet fria variabler i matrisen.

Tillämpning
Om vi löser ett ekvationssystem $AX = B$ så kan alla lösningar skrivas som $X = X_n + X_p$ där X_p är en (fix) lösning och x_n är ett element i nollrum av A

För kvadratiska matriser $\begin{cases} \text{Om inverterbar } X_n = \{0\} \Rightarrow \text{entydlig lösning} \\ \text{Inte inverterbar } X_n \text{ är "äkta" delrum} \Leftrightarrow \infty \text{ många lösningar} \end{cases}$

Kolonnrum
$\underset{n \times m}{A} : \underset{\text{nollrum}}{\mathbb{R}^m} \to \underset{\text{kolonnrum}}{\mathbb{R}^n}$

$AX = B$
Def $\{B : AX = B \text{ för någon } X \in \mathbb{R}^m\}$ - kallas kolonnrum
$\subseteq \mathbb{R}^n$

Bevis (Att kolonnrum är delrum i $\mathbb{R}^n$)

a) Låt $B_1, B_2 \in Col(A)$
$\Rightarrow \exists X, Y \in \mathbb{R}^m : AX = B_1 \;,\; AY = B_2$
Då $A(X+Y) = (B_1 + B_2) \in Col(A)$

b) Låt $B \in Col(A)$ $t \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \exists X \in \mathbb{R}^m : AX = B$
Då $A(tX) = t(AX) = t \cdot B \in Col(A)$

$A = (A_1, A_2, \ldots A_m)$ kolonner

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} = \underbrace{A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_mx_m}_{\text{linjär kombination av kolonnvektorer}}$$

Def Kolonnrum är alla linjära kombinationer av kolonnvektorer
dvs som en bas för kolonnrum kan vi ta en största linjärt oberoende system av av kolonnvektorer.

Ex) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $Col(A) \subset \mathbb{R}^3$ Hitta en bas

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ En bas i kolonnrum är pivot kolonner.
"bas" linjärt beroende

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

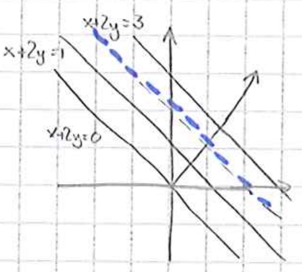
Sats Om A är $n \times m$ matris så är $\dim(Col(A)) + \dim(Noll(A)) = m$

Bevis
$\boxed{\begin{array}{l} A \to (\text{Gausselimination}) \to \text{varje kolonn är antingen fri eller pivotkolonn} \\ \text{Antal av fria kolonner är } \dim(Noll(A)) \\ \text{Antal av pivotkolonner är } \dim(Col(A)) \end{array}}$

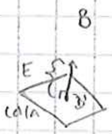
Def $\boxed{rang(A) = \dim(Col(A))}$ (man kan också titta på max storlek på en inverterbar delmatris i A)

MINSTAKVADRAT METODEN

$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$



$\underset{Col(A)}{AX} = B = B' + \underset{fel}{E}$



Dvs den "bästa lösningen" är att välja $B' \in Col(A)$ sådant att $\overline{BB'} \perp Col(A)$
$E \perp Col(A) \Leftrightarrow E \perp A_j$ där $A = (A_1 \ldots A_m)$ dvs $(E, A_j) = 0$ $E^T A_j = 0$ eller $A_j^T E = 0$

$(A_j)\left(E\right) = (0)$

$A^T \cdot E = 0$

Betrakta $AX = B' + E$, multiplicera den från vänster med A^T
$A^T A X = A^T B' + A^T E$
$A^T A X = A^T B' \Leftarrow AX = B'$ $\qquad B = B' + E \Leftrightarrow A^T B = A^T B' + A^T E \Leftrightarrow A^T B = A^T B'$

Exempel

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=3 \\ x+2y=-2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -10 & -10 \\ 2 & 12 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -10 & -10 \\ 0 & 32 & 32 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -10 & -10 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}$$

Sätter $x=0$ $y=1$ i ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1\cdot 0+2\cdot 1=1 \\ 1\cdot 0+2\cdot 1=3 \\ 1\cdot 0-2\cdot 1=-2 \end{cases} \qquad \underset{B'}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}} \cong \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

betrakta felet $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B-B'$, $E=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$

Felvektorn $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ har längden $\sqrt{2}$

Betrakta andra x,y t.ex $x=1$, $y=0$

$$\begin{cases} 1\cong 1 \\ 1\cong 3 \\ 1\cong -2 \end{cases}$$ felvektorn är $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dess längd är $\sqrt{13}$

Ex

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \qquad \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cong \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\bar{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x+2y=2$
t.ex
$x=0$ $y=1$
$x=2$ $y=0$

$$\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}\begin{cases} 2\cong 1 \\ 2\cong 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x=2 \\ y=0 \end{array}\begin{cases} 2\cong 1 \\ 2\cong 3 \end{cases}$$

SAMMANFATTNING

I LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM
- Matriser och utvidgade matriser av ekvationssystem
- Radreducering / elementära operationer
- Trappstegsmatris, pivotelement / kolonn, fri kolonn / variabel
- Lösning (inga, en, oändligt många), kunna skriva lösningen i parametrisk vektorform

II VEKTORRUM
- Definition
- Räknelagar

III GEOMETRISKA VEKTORER (PLAN OCH RUM)
- Affinrum = geometriska vektorer + punkter
- Standardbas (ON) koordinater för vektorer och punkter
- Skalärprodukt, normal ekvation för plan i rum : $ax+by+cz=d$
  linje i rum : $ax+by=c$
- Parametrisk form för linje och plan i plan/rum
- Vektorprodukt (Obs! endast i rummet)

Om riktningsvektor till ett plan är $\bar{v},\bar{u}$, och den går genom punkt P
$R=P+t\bar{u}+s\bar{v}$, där $t,s\in\mathbb{R}$

allmän punkt på planet

$\bar{u}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\bar{v}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x=3+2t+3s \\ y=1-2t+s \\ z=-1+5t+2s \end{cases}$

IV Matriser

- Definition
- Operationer $A+B$, $\alpha \cdot A$, $A \cdot B$, A^T
- Räknelagar radreducering ⟺ multiplikation med elementära matriser
- Inversmatris, tillämpning till att lösa system av ekvationer
- Linjärekvationssystem ⟺ $AX=B$
- $Col(A)$, $Noll(A)$ (kolonnrum, nollrum) rang

V Baser i vektorrum

- I ett rum kan det finnas många baser. koordinater ⟺ bas
- Sats: Alla baser i ett rum har samma antal av vektorer Dvs vi kan tala om dimension av ett vektorrum.
- Linjära kombinationer, spann (linjärt hölje)
- Linjärt oberoende/beroende system bas = linjärt oberoende + spänner hela rummet

VI Minstakvadratmetoden

- Lösa $AX \cong B$ då det inte går att lösa som ekvationssystem
  - Börjar med en gissning. Är X_1 bättre gissning än X_2

$AX_1 - B \neq 0 \quad AX_2 - B \neq 0$ ja om $|AX_1 - B| < |AX_2 - B|$

$AX^* = B' \Rightarrow A^T A X^* = A^T B' = A^T B \Rightarrow$ löser

$A^T(B'-B) = 0$

$A^T B' - A^T B = 0 \Rightarrow A^T B' = A^T B$

Motsatsbevis: Låt $\tilde{X}$ vara falsk lösning. Då $A\tilde{X} \neq B'$ beteckna $A\hat{X} = \tilde{B}$

$A^T A \hat{X} = A^T \tilde{B} = A^T B \Rightarrow A^T(\tilde{B} - B) = 0$

$\hat{X}$ är en lösning till $A^T A X = A^T B$

Men det finns endast ett B' som ligger närmast B i $Col(A)$. Så $\tilde{B} = B'$

- Veta hur man gör minstakvadratmetoden
- Geometrisk betydelse, minimerar $|AX - B|$

Linjära avbildningar

Avbildning = funktion

$f(x) \longrightarrow f'(x) = a = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f(x+h) - f(x) \simeq ah$

Def Linjära avbildningar är funktione från ett vektorrum till ett (annat) vektorrum. som bevarar vektorstruktur.

Dvs. a) $L(\bar{u} + \bar{v}) = L(\bar{u}) + L(\bar{v})$
b) $L(\alpha \cdot \bar{u}) = \alpha L(\bar{u})$

Egenskap för linjär avbildning

$L(\bar{0}) = \bar{0}$

Bevis: $L(\bar{0}) = L(\bar{v} + (-1)\bar{v}) = L(\bar{v}) + L((-1) \cdot \bar{v}) = \underbrace{L(\bar{v})}_{\bar{v}} + (-1)\underbrace{L(\bar{v})}_{\bar{v}} = \bar{v} + (-1) \cdot \bar{v} = \bar{0}$

Ex ① $\pi: x + 2y + 3z = 1$

$P: \bar{v} \to Pr_{\pi}(\bar{v})$ vinkelrät projektion

$P(0) \in \pi$, men $\bar{0} \notin \pi$, så $P(\bar{0}) \neq \bar{0}$ (alltså är det inte en linjär avbildning)

② $R: \bar{x} \to \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}$ om $\bar{x} \neq 0$

$\bar{x} \to 0$ om $\bar{x} = 0$

$R(2\bar{x}) = \frac{2\bar{x}}{|2\bar{x}|} = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \neq 2R(\bar{x})$ Detta är inte en linjär avbildning

③ $Pr_{\bar{v}}(\bar{u}) = \frac{(\bar{u}, \bar{v})}{|\bar{v}|^2} v$

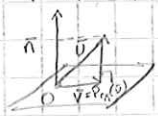
a) $Pr_v(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = \frac{(\bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{v})}{|v|^2} v = \frac{(\bar{u}_1, \bar{v}) + (\bar{u}_2, \bar{v})}{|v|^2} v = \frac{(\bar{u}_1, \bar{v})}{|v|^2} v + \frac{(\bar{u}_2, \bar{v})}{|v|^2} v = Pr_v(u_1) + Pr_v(u_2)$

b) $Pr_v(\alpha \bar{u}) = \frac{(\alpha \bar{u}, \bar{v})}{|v|^2} v = \alpha \frac{(\bar{u}, \bar{v})}{|v|^2} v = \alpha Pr_v(\bar{u})$

Eftersom a) och b) uppfylls så är $Pr_{\bar{v}}$ en linjär avbildning

Rotationer kring origo är linjära avbildningar

Ex Vinkelrätt projektion på planet $\pi: x+2y+3z=0$



$$Pr_{\pi}(\bar{v}) = \bar{v} - Pr_{\bar{n}}(\bar{v})$$

a) $Pr_{\pi}(\bar{v}_1+\bar{v}_2) = (\bar{v}_1+\bar{v}_2) - Pr_{\bar{n}}(\bar{v}_1+\bar{v}_2) = \bar{v}_1+\bar{v}_2 - Pr_{\bar{n}}(\bar{v}_1) - Pr_{\bar{n}}(\bar{v}_2) = \bar{v}_1 - Pr_{\pi}(\bar{v}_1) + \bar{v}_2 - Pr_{\pi}(\bar{v}_2) =$
$= Pr_{\pi}(\bar{v}_1) + Pr_{\pi}(\bar{v}_2)$

b) $Pr_{\pi}(\alpha\bar{v}) = \alpha\bar{v} - Pr_{\bar{n}}(\alpha\bar{v}) = \alpha\bar{v} - \alpha Pr_{\bar{n}}(\bar{v}) = \alpha(\bar{v} - Pr_{\bar{n}}(\bar{v})) = \alpha Pr_{\pi}(\bar{v})$

Så Pr_{π} är en linjär avbildning.

Sats Linjär kombination av två linjära avbildningar från X till Y är linjär avbildning

Grafen av linjär avbildning är ett delrum i $\mathbb{R}^{n+m}$

$$(\bar{v}, \underset{\text{graf}}{\underset{\cap}{L(\bar{v})}}) + (\bar{u}, \underset{\text{graf}}{\underset{\cap}{L(\bar{u})}}) = (\bar{v}+\bar{u}, L(\bar{v})+L(\bar{u})) = (\bar{v}+\bar{u}, \underset{\text{graf}}{\underset{\cap}{L(\bar{v}+\bar{u})}})$$

$$\alpha(\bar{v}, L(\bar{v})) = (\alpha\bar{v}, \alpha L(\bar{v})) = (\alpha\bar{v}, \underset{\text{graf}}{\underset{\cap}{L(\alpha\bar{v})}})$$

Från och med nu betraktar vi vektorrum + bas

$$\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\wr\wr}{(X, B_1)}} \text{ och } \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\wr\wr}{(Y, B_2)}}$$

$$L(\bar{u}) = L(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n) = x_1 \underset{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}_{B_2}}{\underset{\shortparallel}{L(\bar{e}_1)}} + \dots + x_n \underset{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{1m}\end{pmatrix}_{B_2}}{\underset{\shortparallel}{L(\bar{e}_n)}}$$

$\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$

$B_1 = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$

Om $L(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{B_2}, \dots, L(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{mn} \end{pmatrix}_{B_2}$

så avbildar Linjära avbildningen L vektor $u = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$
till AX (i bas B_2)
där $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\left(\bar{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B_1}\right)$

Linjära avbildningar $\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\wr\wr}{(X, B_1)}} \to \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\wr\wr}{(Y, B_2)}} \Leftrightarrow$ Matriser $m \times n$

$$\boxed{\text{Följesats} \quad \dim(\mathrm{Lin}(X,Y)) = \dim(X) \cdot \dim(Y)}$$

Ex $\bar{u} \to Pr_{\bar{v}}(\bar{u})$ Hitta matrisen till avbildningen om $B_1 = B_2$ är standard bas i $\mathbb{R}^3$
$\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Pr_{\bar{v}}(\bar{e}_1) \dfrac{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix} \cdot \begin{smallmatrix}1\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

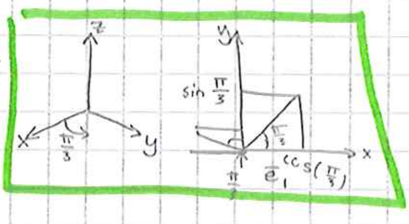
$Pr_{\bar{v}}(\bar{e}_2) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

$Pr_{\bar{v}}(\bar{e}_3) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Tillämpning. Hitta $Pr_{\bar{v}}(\bar{u})$ där $\bar{u} = (1, 2, 3)$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Ex Rotera $\mathbb{R}^3$ kring z-axeln med vinkel $\alpha = \frac{\pi}{3}$
Detta är en linjär avbildning.



a) Hitta dess matris.

$$L(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L(\bar{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alltså avbildningsmatris (i standard bas)

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

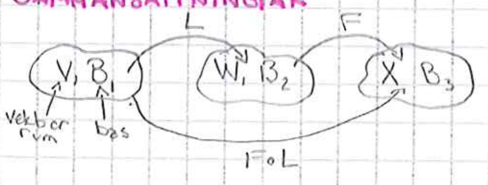
b) Hitta koordinater av vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ rotera kring z-axeln med vinkeln $\frac{\pi}{3}$

$$L(\bar{v}) = A \cdot \bar{v} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Repetition

1) En del av funktionerna från ett vektorrum till ett vektorrum är linjära.
2) Givet bas i både definitionsrum och målrum kan man identifiera linjära avbildningar med en matris.
(man brukar identifiera matriser $n \times m$ med linjära avbildningar från $\mathbb{R}^m$ till $\mathbb{R}^n$)

Sammansättningar



Sats • Sammansättning av linjära avbildningar är en linjär avbildning
• Om L har matris A i B_1, B_2 och F har matris B i baserna B_2, B_3 så har $F \circ L$ matrisen $B \cdot A$ i baserna B_1, B_3

Bevis • Summa: $F \circ L(\bar{u} + \bar{v})$ $\quad \bar{u}, \bar{v} \in V$

$$F(L(\bar{u}+\bar{v})) \underset{L\text{-lin}}{=} F(\underbrace{L(\bar{u})}_{\in W} + \underbrace{L(\bar{v})}_{\in W}) \underset{F\text{-lin}}{=} F(L(\bar{u})) + F(L(\bar{v})) = F \circ L(\bar{u}) + F \circ L(\bar{v})$$

Multiplikation med ett tal: $F \circ L(\alpha \bar{u}) \underset{L\text{-lin}}{=} F(\alpha L(\bar{u})) = \alpha F(L(\bar{u})) = \alpha\, F \circ L(\bar{u})$
$\alpha \in \mathbb{R}, \bar{u} \in V$

• $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ Om L har matrisen A, $L(e_1) = a_{11} b_1 + a_{21} b_2 + \dots + a_{m1} b_m$
$B_2 = (b_1, \dots, b_m)$
$B_3 = (f_1, \dots, f_k)$ $\qquad \vdots$
$L(e_n) = a_{1n} b_1 + \dots + a_{mn} b_m$

B är matris för F $\quad F(b_1) = b_{11} f_1 + b_{21} f_2 + \dots + b_{k1} f_k$
$\vdots$
$F(b_m) = b_{1m} f_1 + \dots + b_{km} f_k$

Eftersom matrismultiplikation görs med "rad · kolonn" måste A och B byta plats.

$$F \circ L(e_1) = F(L(e_1)) = F(a_{11} b_1 + \dots + a_{m1} b_m) = a_{11} F(b_1) + \dots + a_{m1} F(b_m)$$
$$= a_{11}(b_{11} f_1 + \dots + b_{k1} f_k) + \dots + a_{m1}(b_{1m} f_1 + \dots + b_{km} f_k)$$
$$= (\underset{(A)}{a_{11}} \underset{(B)}{b_{11}} + a_{21} \cdot b_{12} + \dots + a_{m1} \cdot b_{1m}) f_1 + \dots + (\underset{(A)}{a_{11}} \underset{(B)}{b_{k1}} + \dots + a_{m1} b_{km}) f_k = (B \cdot A)_{11} f_1 + \dots + (B \cdot A)_{k1} f_k$$

Alltså $(F \circ L)_{ij} = (B \cdot A)_{ij}$

$$L(\bar{u}) = (Ax)_{B_2} \text{ där } v = (x)_{B_1}, \quad F \circ L(\bar{u}) = F(L(\bar{u})) = F((Ax)_{B_2}) = (B \cdot (Ax)_{B_2})_{B_3}$$

L är spegling kring $x = y$ av $\mathbb{R}^2$
F är rotation med α kring origo (av $\mathbb{R}^2$)
Matrisen till $F \circ L = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$

BASBYTEN

$$(V, B_1) \xrightarrow{Id: V \to V} (V, B_2)$$

Identitetsavbildning (Id) är linjär men matrisen $(Id)_{(V,B_1)(V,B_2)}$ är inte en identitetsmatris. Den har som kolonner $(e_1)_{B_2}, \dots, (e_n)_{B_2}$

$B_1 = (e_1, \dots, e_n)$
$B_2 = (b_1, \dots, b_n)$

Ex Om $B_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, B_2 är standardbas $(Id)_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\2 & 1 & 1\\3 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Betrakta $(Id)_{B_1,B_2} \cdot (Id)_{B_2,B_1} = (Id \circ Id)_{B_1,B_1} = Id \left(\overset{Ex}{=} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$

Ex Basbyte matris från B_2 (standard bas) till $B_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ är inversen till $\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\3&0&1\end{pmatrix}$

Dvs. $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\3&0&1&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&3&-1&-2&1&0\\0&3&-2&-3&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&3&-1&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&3&-1&-2&1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&3&0&-1&2&-1\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$

Alltså för att byta från standard bas till $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ ska vi multiplicera med

Ex Betrakta $B_1 = \left(\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right)$, $B_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Hitta basbyte matris.

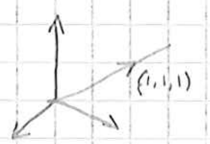
$$(\mathbb{R}^3, B_1) \xrightarrow[\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&0&0\\1&1&2\end{pmatrix}]{Id} (\mathbb{R}^3, \text{standard bas}) \xrightarrow[\begin{pmatrix}-1/3&-1/3&2/3\\-1/3&2/3&-1/3\\1&1&-1\end{pmatrix}]{Id} (\mathbb{R}^3, B_2), \qquad (Id)_{B_1,B_2}$$

$$\begin{pmatrix}-1/3&-1/3&2/3\\-1/3&2/3&-1/3\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&0&0\\1&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3&2/3&1/3\\4/3&-1/3&-5/3\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Är basbytematris från $\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right)$ till $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

> Allmänt kan man skriva basbytematris från B_1 till B_2 som $B^{-1} \cdot A$ där A har basvektorer i standard bas från B_1 som kolonner
> B ——— || ——— || ——— || ——— B_2 ——— ||

Ex Hitta matris i standard bas för rotation med $\frac{\pi}{4}$ kring $x=y=z$



> Idéen: Vi kan göra basbyte, så att b_3 går längs $x=y=z$ så blir rotationen enkel

$$(\mathbb{R}^3, \text{st.b}) \xrightarrow{Id} (\mathbb{R}^3, B) \xrightarrow{\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}} (\mathbb{R}^3, B) \xrightarrow{Id} (\mathbb{R}^3, \text{st.b}), \qquad ?$$

Vilken bas ska vi ta?
För att kunna använda vanliga formler för skalärprodukt och därmed avstånd och vinklar, måste nya basen vara ON

$b_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Big/ \left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$ ← så att den går längs rotationsaxeln och har längd 1

$b_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad b_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \Big/ \left|\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} \qquad b_2 = b_3 \times b_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boxed{(Id) \cdot (R) \cdot (Id)^{-1}}$$

LINJÄRA AVBILDNINGAR (GEOMETRISK BETYDELSE)

$$(V, B_1) \xrightarrow[A]{L} (W, B_2)$$

Avbildning = funktion

Definitionsmängd för $L: V$
Målmängd för $L: W$
Värdemängd för $L: L(V) = \{L(v) : v \in V\} \subset W$

Värdemängd för $L: (Col(A))_{B_2}$ där $A = (L)_{B_1, B_2}$
Påminnelse: $(Col(A))_{B_2}$ är ett delrum i W

Sats Värdemängd av en linjär avbildning är delrum i målmängd

Bevis Låt $\bar{u}, \bar{v} \in \underbrace{L(V)}_{\subset W}$, Då finns det $\bar{x}, \bar{y} \in V$ $L(\bar{x}) = \bar{u}$ och $L(\bar{y}) = \bar{v}$

Då $L(\bar{x} + \bar{y}) = L(\bar{x}) + L(\bar{y}) = \bar{u} + \bar{v} \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in L(V)$

Alltså summan av två vektorer i $L(V)$ ligger i $L(V)$
Låt $\bar{v} \in L(V)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, då $L(\underbrace{\alpha \bar{v}}_{V}) = \alpha L(\bar{v}) \in L(V)$

Dvs multiplar av en vektor i $L(V)$ ligger i $L(V)$ så $L(V)$ är delrum av W

$\sin^{-1}(0) = 0 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
Urbild av $\bar{0}$ vid en linjär avbildning är $(Nol(A))_{B_1}$

Sats 1. Linjär avbildning är injektiv omm $Nol(A) = \{\bar{0}\}$
2. Linjär avbildning är surjektiv omm $Col(A) = W$

Bevis 2) $(Col(A))_{B_2} = L(V) = W$ omm L är surjektiv
1) $(Nol(A))_{B_1} = L^{-1}(0)$ måste bestå av ett element, men $L(\bar{0}) = \bar{0}$, så $\bar{0}$ måste vara detta element
Låt L ej vara injektiv. Då finns $\bar{v}, \bar{u} \in V$ sådana att $L(\bar{u}) = L(\bar{v})$
Betrakta $L(\bar{u} - \bar{v}) = L(\bar{u}) - L(\bar{v}) = \bar{0}$
Alltså $L^{-1}(0) \ni \bar{u} - \bar{v} \neq 0$ (?!) $L^{-1}(\bar{0}) = (Nol(A))_{B_1} = \{\bar{0}\}$

Sats Dimension av $Nol(A)$, och dimension av $Col(A)$ ändras ej vid basbyte

Hur ser basbyte ut för matriser?

$$\begin{tikzcd}
V, B_1 \arrow[r, "L"', "A"] & W, B_2 \arrow[d, "S_2"', "Id"] \\
V, B_1' \arrow[u, "S_1", "Id"'] \arrow[r, "L", "B"'] & W, B_2'
\end{tikzcd}$$

$\boxed{B = S_2 A S_1}$ $(S_1 A S_2)$

Om $B = S_2 A S_1$ där S_2, S_1 är basbyte matriser
så är $\boxed{\begin{array}{l} dim(Col(B)) = dim(Col(A)) \\ dim(Noll(B)) = dim(Noll(B)) \end{array}}$

Linjär algebras huvudsats

Följande påståenden är ekvivalenta
a) A är matris till linjär avbildning som är $\overbrace{\text{injektiv och surjektiv}}^{\text{bijektiv}}$
b) A är kvadratisk matris $n \times n$ och $Nol(A) = \{0\}$
c) A är kvadratisk matris $n \times n$ och $Col(A) = \mathbb{R}^n$
d) — " — " — " — " — dess kolonner är linjärt oberoende
e) — " — " — " — " — " — " — spänner upp $\mathbb{R}^n$
f) A är inverterbar
g) A går att radreducera till identitetsmatris
h) A är en basbytesmatris
i) A är $n \times n$ matris där alla kolonner är pivotkolonner

k) $Det(A) \neq 0$

Bevis! $b \Leftrightarrow d$ $Nol(A) = \bar{o} \Leftrightarrow Ax = \bar{o}$ har endast lösning $x = 0$
$\Leftrightarrow x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = 0$ har endast lösning $x = 0$ där $A = (A_1 \ldots A_n)$
$\Leftrightarrow A_1, \ldots, A_n$ är linjärt oberoende

$c \Leftrightarrow e$ $Col(A) = span(A_1, \ldots, A_n) = \mathbb{R}^n$
$f \Leftarrow g$ det följer från algoritmen för att hitta invers
$g \Leftrightarrow i$ "$\Rightarrow$" definition "$\Leftarrow$" fortsätta radreducera

Eftersom A är injektiv linjärt oberoende system. Eftersom A är surjektiv så avbildas det som spänner upp hela rummet till något som spänner upp hela rummet. Så bas avbildas till en bas bl.a standardbas $a \Rightarrow h$
$a \Rightarrow e$,

Hittills har vi visat ($a \Rightarrow b, c, d, e, f, g, h$)
$h \Leftrightarrow i \Leftrightarrow d \Leftrightarrow b$
$b \Rightarrow a$ $Nol(A) = \{0\} \Rightarrow A$ är injektiv
$b \Rightarrow ?$ så $Ax = b$ om vi radreducerar har den aldrig pivotelement i sista kolonnen (de finns max n pivot kolonner)
dvs A är surjektiv så $d \Rightarrow a$

Nu $a \Leftrightarrow g \Leftrightarrow i \Leftrightarrow d \Leftrightarrow b$
$c \Rightarrow$ A är surjektiv A har n kolonner som är n-dimensionella vektorer.
P.g.a följesatsen till dimensionsatsen är kolonnerna en bas i $\mathbb{R}^n$

Nu $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c \Leftrightarrow d \Leftrightarrow e \Leftrightarrow g \Leftrightarrow i$ (återstår $h \Rightarrow ?$; $f \Rightarrow ?$)
A är kvadratisk (det går från ett rum till sig själv)
kolonner i A är koordinater av gamla basen i nya basen
så de är linjärt oberoende
$h \Rightarrow d$
A är inverterbar, så $Ax = b$ har lösning $x = A^{-1}b$, så $Col(A) = \mathbb{R}^n$
$f \Rightarrow c$

Def Determinant av matris är ett tal $|A|$ som har följande egenskaper.
1) Om B är matris som man får från A genom att ta multipel av en rad från andra så $|B| = |A|$
2) Om B är en matris som man får från A genom att byta ordning på två rader så $|B| = -|A|$
3) Om B är en matris som man får från A genom ett göngra en rad med ett tal α $|B| = \alpha |A|$
4) $|I_d| = 1$

DETERMINANTER

Def: det(A) är ett tal som tillskrivs en kvadratisk matris och som har följande egenskaper:
1) Om man lägger en multipel av en rad till en annan rad ändras determinanten inte
2) Om man byter ordning på två rader byter determinanten tecken
3) Om man multiplicerar en rad med α, multipliceras determinanten med α
4) $\det(I) = I$

Obs! Från 3 följer att om en rad består av 0 så är $\det(A) = 0$
Från 2 följer att om två rader är samma, så är $\det(A) = 0$

Permutationer

Def permutation $p:[1,\dots,n] \to [1,\dots,n]$ är en bijektion från $[1,\dots,n] \to [1,\dots,n]$
$p([1,\dots,n]) \to [p_1,\dots,p_n]$

Ex
- $p_1 = [2\ 1\ 3]$ (av tre tal)
- $p_2 = [4\ 1\ 2\ 3]$ (av fyra tal)
- $p_3 = [1\ 2\ 3\ 4]$ (permutation av fyra tal)

$$p_1: \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \qquad p_2: \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \qquad p_2 \circ p_1: \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{array}$$

$$p_2: \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{array}$$

Def. Signaturen av en permutation $\sigma(p) = (-1)^{\tilde{p}}$ där $\tilde{p}$ är antal av tal p som står i fel ordning

Ex
1. $p_1 = [2\ 1\ 3]$ $\tilde{p} = 1$, så $\sigma(p) = (-1)^{\tilde{p}} = -1$
2. $p_2 = [4, 1, 2, 3]$ $\tilde{p} = 3$, så $\sigma(p_2) = (-1)^3 = -1$
3. $p_3 = [1\ 2\ 3\ 4]$ $\tilde{p} = 0$, så $\sigma(p_3) = (-1)^0 = 1$
4. $p_4 = [4\ 3\ 2\ 1]$ $\tilde{p} = 6$, så $\sigma(p_4) = (-1)^6 = 1$

Sats Om vi kan få p_2 från p_1 genom att byta plats på två tal, så
$\sigma(p_2) = \sigma(p_1)$

Ex $p_1 = [4\ 1\ 2\ 3]$
$p_2 = [4\ 3\ 2\ 1]$
$\sigma(p_2) = -\sigma(p_1)$

Bevis Lemma. Om vi kan få p_2 från p_1 genom att byta plats på två närstående tal så $\sigma(p_2) = -\sigma(p_1)$

Bevis av lemma. Vi har bytt plats på p_k och p_{k+1}, där
$\tilde{p}_1 = [\underbrace{p_1 \dots p_n}_{p_k p_{k+1}}]$

Om $p_k < p_{k+1}$, paret (p_k, p_{k+1}) räknades ej som fel ordnat i $\tilde{p}_1$, men det räknas som felordnat i $\tilde{p}_2$
Om ett par $p_{k+1} < p_k$, så räknades (p_k, p_{k+1}) som felordnat i $\tilde{p}$, men ej i $\tilde{p}_2$
Alla andra felordnade / icke felordnade par ändres inte $\tilde{p}(\tilde{p}_1) = \tilde{p}(\tilde{p}_2) \pm 1$
så $\sigma(\tilde{p}_1) = (-1)^{\tilde{p}(\tilde{p}_1)} = (-1)^{\tilde{p}(\tilde{p}_1)} \cdot (-1) = -\sigma(\tilde{p}_2)$

Bevis av satsen:
$[p_1 \dots \underbrace{p_k \dots\dots p_{k+m+1}}_{m+1} \dots\dots]$

Med avstånd menas talen emellan

Ex $[4\ 1\ 2\ 3] \to [4\ 2\ 1\ 3] \to [4\ 2\ 3\ 1] \to [4\ 3\ 2\ 1]$

Dvs byte av tal på avstånd m kan skrivas som $2m+1$ byte av närstående tal. Så vi byter tecken udda antal gånger $\sigma(p_1) = -\sigma(p_2)$

Def Determinant av en matris A är

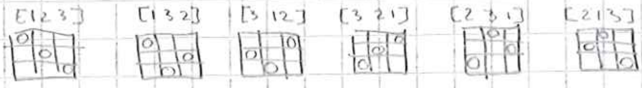
$$\det(A) = \sum_{p=[p_1 \dots p_n]} \sigma(p)\, a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

Ex $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3$

Varje produkt i summan innehåller exakt ett element från varje rad och exakt ett element från varje kolonn.
Om vi byter kolonner med rader ändras inte summan.
$\det(A) = \det(A^T)$

Ex $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 1\cdot5\cdot9 + 1\cdot6\cdot8 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 + 2\cdot6\cdot7 - 2\cdot4\cdot9$

[1 2 3] [1 3 2] [3 1 2] [3 2 1] [2 3 1] [2 1 3]



Egenskaper:

3) Multiplicering av en rad med α, multiplicerar determinant med α
Bevis: Varje produkt i summan (som är determinant) innehåller exakt ett element från multiplicerade raden, därmed multipliceras med α

2) Om vi byter 2 rader

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ a_{k1} & & a_{kn} \\ a_{m1} & & a_{mn} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & & a'_{1n} \\ a'_{k1} & & a'_{kn} \\ a'_{m1} & & a'_{mn} \\ a'_{n1} & & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = a'_{ij}$ om inte $i = k$ eller m
$a_{kj} = a'_{mj}$
$a_{mj} = a'_{kj}$

bara de med '

$$\det(A') = \sum_{p'} \sigma(p')\, a'_{1p_1} \cdots a'_{np_n} = \sum_{p'} \sigma(p')\, a_{1p_1}\, a'_{kp'_k} \cdots a'_{mp'_m} \cdots a_{1p_m} =$$

Vi får p från p' genom att byta plats på p'_k och p'_m

$$= \sum_{p'} \sigma(p')\, a_{1p} \cdots \underbrace{a_{mp'_k}}_{k\text{-plats}} \cdots \underbrace{a_{kp'_m}}_{m\text{-plats}} \cdots a_{np_n} = \sum_{p'} \sigma(p')\, a_{1p_1} \cdots a_{np_m} \cdots a_{kp_k} \cdots a_{np_n}$$

$$= \sum_{p} -\sigma(p)\, a_{1p_1} \cdots a_{np_n} = \det(A)$$

1) Om vi adderar en multipel av en rad till en annan rad ändras inte determinanten

$$\det(A') = \sum_p \sigma(p)\, a_{1p_1} \cdots \underbrace{(a_{mp_m} + a_{kp_m})}_{m\text{-plats}} \cdots a_{np_n} =$$

$$= \sum_p \sigma(p)\, a_{1p_1} \cdots a_{np_n} + \sum_p \sigma(p)\, a_{1p_1} \cdots \underbrace{(\alpha a_k)}_{m\text{-plats}} \cdots a_{np_n} + \alpha \underbrace{\det(A'')}_{=0} = \det(A)$$

0 för att A'' har två likadana rader.

4) $\det(I) = \sum_p \sigma(p)\, a_{1p_1} \cdots a_{np_n} = \sigma([1\ 2 \ldots n])\, 1 \ldots 1 = 1$

Ex $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2\cdot3 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot3\cdot1$

Obs! I diagonal matris är (det) produkt av tal på diagonalen

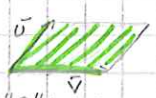
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2\cdot3 = 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot(-5\cdot1 - (-1\cdot1)) = (-3)(-4) = 12$$

Geometrisk betydelse av determinanter

Egenskaper hos determinanter
1. Multipel av en rad till en annan → determinanten ändras inte
2. Multiplicering av en rad med ett tal → determinanten multipliceras med talet
3. Byter ordning på två rader → determinanten byter tecken
4. $\det(I) = 1$

$A: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

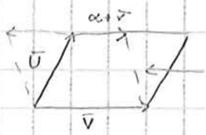


$(\vec{u}, \vec{v}) \to$ area av parallellogram uppbyggt av $\vec{u}$ och $\vec{v}$

Betrakta $A(\vec{u}, \vec{v})$ och $A(\vec{u}, \frac{1}{2}\vec{v})$ $\quad \frac{1}{2}A(\vec{u}, \vec{v}) = A(\vec{u}, \frac{1}{2}\vec{v})$

Allmänt är det klart att $A(\alpha\vec{u}, \vec{v}) = \alpha A(\vec{u}, \vec{v}) = A(\vec{u}, \vec{v})$ (Egenskap 2)

$A(\vec{u} + \alpha\vec{v}, \vec{v})$



höjden ändras inte, basen ändras inte } Arean ändras inte (Egenskap 1)

$A(\vec{u}, \vec{v}) = |\det(\vec{u} \ \vec{v})|$

$\vec{u} = (a, b, 0)$
$v = (c, d, 0)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} e_3 \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$$

Betrakta $V: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \to (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Trippelprodukt / Volym i $\mathbb{R}^3$
uppfyller egenskaper a, b, c, d
så

$$\boxed{\begin{aligned} V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= |\det(\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w})| \\ (\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) &= \det(\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}) \end{aligned}}$$

I högre dimensioner, definierar man volymer som $|\det(A)|$

Dvs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^n$ $\quad V(\{\lambda_1\vec{u}_1 + \dots + \lambda_n\vec{u}_n, \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]\}) = |\det(u_1 \ u_2 \dots u_n)|$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{vmatrix}, \quad \left(a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}\right) = aw_1 + bw_2 + cw_3$$

Ex

- $$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \det \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3 7 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

Sats (utveckling av det efter en rad/kolonn)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

$\underset{\text{för alla } j}{}$ $\quad$ $\underset{\text{för alla } i}{}$

Bevis.

$$\begin{vmatrix} & a_{ij} & \\ & \vdots & \\ & a_{nj} & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & (a_{ij} + 0) & \\ & (0 + a_{2j}) & \\ & \vdots & \\ & (0 + a_{nj}) & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ij} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ij} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{nj} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Ex)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+4} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \, 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (-3) \cdot 3 \cdot (1 - (-4)) + 4((2-1) + 2 \cdot 4) = -9 \cdot 5 + 4 \cdot 9 = -9$$

Sats $\forall_j$ ① $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} \det(A_{ij}) = \begin{cases} \det(A) & k=j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$

$\forall_i$ ② $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{mj} \det(A_{ij}) = \begin{cases} \det(A) & m=i \\ 0 & m \neq i \end{cases}$

Bevis ① $= \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1k} \\ \vdots & \vdots \\ a_{nk} & a_{nk} \end{vmatrix} = 0$ om $k \neq j$

Sats

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} |A_{11}| & |A_{21}| & \dots & |A_{n1}| \\ \vdots \\ |A_{1n}| & \dots & & |A_{nn}| \end{pmatrix}$$

(Platserna i indexet ska vara "fel")

Bevis $A \, \mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \sum a_{ik} (-1)^{j+k} \det(A_{jk}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

DETERMINANTER (sammanfattning)

1. Definition (permutationer, signatur av permutation)
2. Egenskaper av determinant (vid radreducering)
3. Determinant och Linjär Algebras huvudsats
   $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ A är inverterbar $\Leftrightarrow$ kolonner är linjärt oberoende

Sats: rang(A) är den största storleken av delmatrisen i A vars determinant $\neq 0$

4. Determinant genom utveckling efter en rad/kolonn

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$ **sats** $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} \det(A), & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +|A_{11}| & -|A_{21}| & +|A_{31}| & \dots \\ & (-1)^{i+j} |A_{ji}| & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

CRAMERS REGEL

$A\bar{x} = b \qquad B_j = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{pmatrix}$ då $\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{\det(B_1)}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det(B_n)}{\det(A)} \end{pmatrix}$ $\det(A) \neq 0$

Bevis $\det(B_j) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i A_{ij}$

Ekvation k: $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot \frac{1}{\det(A)} \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i A_{ij} \right) =$

$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{kj} (-1)^{i+j} b_i A_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} A_{ij} =$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^{n} b_i \begin{pmatrix} \det(A) & \text{om } k=i \\ 0 & \text{om } k \neq i \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot b_k \cdot \det(A) = b_k$$

Alltså $\begin{pmatrix} \frac{\det(B_1)}{\det(A)} \\ \vdots \end{pmatrix}$ uppfyller ekvationen $k = 1, \dots, n$ dvs det är en lösning och det finns endast en lösning, för att $\det(A) \neq 0$

5. Geometrisk betydelse av determinant

Linjär avbildning (rum + bas) $\Leftrightarrow$ matris

(ändring av volymer om basen är ON)

$\Updownarrow$ determinant

- Beräkna $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$
- Beräkna $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$
- Beräkna $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

- $1\cdot 3 - (-1)\cdot 2 = 3+2 = 5$
- $1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6+5 = 11$
- $(-1)^{3+3}3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 11 = 33$

- Linjär avbildning L är sådan att $L(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $L(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $L(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
  Ett rätblock har volym 8 vad blir volymen av $L(R)$

  L har matris $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$

  $V(L(R)) = |\det(A)|\cdot \mathrm{Vol}(R) = 11\cdot 8 = 88$

- Beräkna $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-2+1) = 1$

- Linjär avbildning $L: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(\mathbb{R}^3, B_1) \to (\mathbb{R}^3, \text{st.b}) \to (\mathbb{R}^3, B_2)$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{S^{-1}}$ $\quad$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{T}$

Avbildningsmatrisen ON-bas (standard)

$T\cdot S^{-1}$, så $\det(TS^{-1})\cdot \mathrm{Vol}(R) =$

$= \dfrac{\det(T)}{\det(S)}\cdot \mathrm{Vol}(R) = \dfrac{11}{1}\cdot 8 = 88$

$x^2 = -1$

$(x, y) \in \mathbb{C}$

$(x, 0) = x \in \mathbb{R}$

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

$z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$ $\qquad z_1\cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + iy_2x_1 + i\cdot i y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$i = 0 + i\cdot 1 \to (0, 1)$

$(0,1)(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1, 0) \leftrightarrow -1$

Om $i > 0 \Rightarrow i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0$ (?!)

Om $i < 0 \Rightarrow -i > 0 \Rightarrow (-i)^2 = -1 > 0$ (?!)

ALGEBRANS HUVUDSATS

Varje polynom (med komplexa eller reella koefficienter) har en (komplex) rot

Ex| $x^2+x+1=0$ har roten $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Nytta: vi kan dela polynom med $(x-x_0)$, där x_0 är en rot (möjligen komplex) och få ett polynom av mindre grad som är enklare

Ex|

$$\begin{array}{l} \quad x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \hline x^2+x+1 \;\big|\; x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x^2+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x \\ \hline \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+1 \\ \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+1 \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

$$x^2+x+1=\left(x-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

Konjugering av komplexa tal

Def| $\overline{x+iy}=x-iy$

Egenskaper: $z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$

$\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)=x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+y_2y_1)=\overline{(z_1\cdot z_2)}$

Sats| Ett polynom med reella koefficienter har komplexa rötter i konjugatpar. (Om polynomet med reell koefficient har komplex rot, som ej är reell, är dess konjugat också en rot)

Bevis| $a_nz^n+\ldots+a_1z+a_0=0$

$\bar{a}_n\bar{z}^n+\ldots+\bar{a}_1\bar{z}+\bar{a}_0=a_n(\bar{z})^n+\ldots+a_1(\bar{z})+a_0=0$

konjugat för ett reelt tal är talet självt

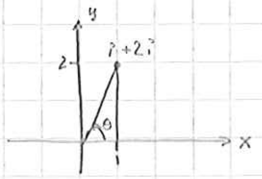
Alltså $\bar{z}$ är en rot   Obs! $(x-z_0)(x-\bar{z}_0)=x^2-\underbrace{(z_0+\bar{z}_0)}_{\in\mathbb{R}}x-\underbrace{|z|^2}_{\in\mathbb{R}}$

Att dela med ett komplext tal

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Ex| $\frac{1+2i}{2+3i}=\frac{(1+2i)(2-3i)}{2^2+3^2}=\frac{2+2\cdot3+i(4-3)}{13}=\frac{8+i}{13}$

Polär form av komplexa tal



komplex tal z har abs. belopp $|z|=r$ (eller ρ) och argument θ (vinkel räknat moturs från positivt reell halvaxel)

$i \Leftrightarrow (1,\frac{\pi}{2})$

$-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(1,\frac{2\pi}{3}\right)$

$\sqrt{2}+i\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(2,\frac{\pi}{4}\right)$

$(r,\theta) \Leftrightarrow r\cdot\cos\theta+ir\sin\theta$

$z_1\cdot z_2=(r_1\cos\theta_1+ir\sin\theta_1)(r_2\cos\theta_2+ir_2\sin\theta_2)=r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2-r_1r_2\sin\theta_1\theta_2+ir_1r_2\sin\theta_1\cos\theta_2+ir_1r_2\sin\theta_2\cos\theta_1$

$=r_1r_2(\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2+\sin\theta_2\cdot\cos\theta_1))$

$=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$

Vid produkt av komplexa tal deras belopp multipliceras och argumenten adderas

Ex1 $(1+i\sqrt{3})^{2011} = \left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{2011}$ Eulers formel $z=e^{\ln r + i\theta}$

$= \left(2\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2011} = 2^{2011}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}\cdot 2011}$ $2011 = k\cdot 6 + 1$

$= 2^{2011}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = 2^{2011}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{2010}(1+i\sqrt{3})$

Ex1 $x^4+x^2+1=0$

$t=x^2 \Rightarrow t^2+t+1=0 \Rightarrow t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $x = r\cdot e^{i\theta}$ $r^2\cdot e^{i2\theta} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)} = t_1$

$r=1$

$2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ $x_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta_2 = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$ $x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$r^2\cdot e^{i2\theta} = e^{i\frac{4\pi}{3}+2k\pi} = t_2$

$x_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Svar på vektorform

Ex $x_1 = (1-3t)/4$

$x_2 = t$

$x_3 = -1/2$

$\longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t}$

Vid gausselimination ska man visa tydligt vad man gör.

Tilde mellan matriserna

$\bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (normalvektor)

π har normalvektor $(1,1,1)$ XY planet har normalvektor $(0,0,1)$

$v(\pi, XY) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \alpha$

$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$