Föreläsningsanteckningar

TMA660 - Linjär algebra och geometri F

2009

Föreläsare: Maria Roginskaya

Antecknare: Karin Skoglund Keiding

LINJÄR ALGEBRA & GEOMETRI.

Linjära ekvationssystem. — dessa i potens 1.

$$\begin{cases} 4x + 5y + 3z = 6 \\ 0x + 2y + 2z = 2 \\ 4x + 0y + 6z = 4 \end{cases}$$

kan skrivas som utvidgad matris:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

tabell av tal

Radreduceringsmetod.

$$\begin{array}{c c} 1 & \\ 2 & \\ 3 & \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

$$4x + 0y + 6z = 4 \xRightarrow{-1} (4x + 0y + 6z) - (4x + 5y + 3z) = 4 - 6$$

$$\Rightarrow -5y + 3z = -2$$

alltså nu

$$\text{OBS}\quad\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Elementära radoperationer

MAN FÅR:

- multiplicera en rad m. ett tal (skilt från noll)
- byta ordning på 2 rader

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \end{array}\right) \cdot \tfrac{1}{2} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \end{array}\right) + 5 \cdot ②$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \cdot \frac{1}{8} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/4 & 3/4 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/8 \end{array}\right) (-1) \; (-3/4)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/4 & 0 & 39/32 \\ 0 & 1 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 1 & 3/8 \end{array}\right) (-5/4) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7/16 \\ 0 & 1 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 1 & 3/8 \end{array}\right)$$

alltså $\begin{cases} x = 7/16 \\ y = 5/8 \\ z = 3/8 \end{cases}$

UNDANTAG:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

konstigt, vad hände här?

är ju: $\begin{cases} x \quad\quad + 2w = 2 \\ \quad y \quad + w = 4 \\ \quad\quad z + w = 2 \\ \quad\quad\quad\;\; \underbrace{0 = 3}_{\text{aj.}} \end{cases}$

inga (x, y, z, w) gör att systemet är uppfyllt. (dvs att alla likheterna är sanna)

systemet är **OLÖSBART**

(eller egentligen lösbart, men lösningen är omöjlig!)

nr. II

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{\underline{1}} & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & \underline{\underline{1}} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{1}} & 1 & 2 \end{array}\right)$$

positioner

inga problem!

$0 = 0$

jajjemån.

$$\begin{cases} x + 2w = 2 \\ y + w = 4 \\ w + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - 2w \\ y = 4 - w \\ z = 2 - w \\ w = w \end{cases}$$

också då,

vilket w SOM HELST ger en lösning!

(dvs. det blir lika många lösningar som tal i $\mathbb{R}$)

nr. III

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilka (x, y, z, w) uppfyller ekvationssystemet?

$$\begin{cases} x + w = 2 \\ z + w = 3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{y, w \text{ godtyckliga}}$

$x = 2 - w$

$z = 3 - w$

kan även skriva som

$(2 - w, y, 3 - w, w)$

Lösningar på PARAMETERFORM:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = s \\ z = 3 - t \\ w = t \end{cases}$$

där $\underbrace{t, s}_{\text{kallas parametrar.}}$ är godtyckliga

snyggare med externa variabler oftast

DEF.

Matris är en tabell av tal.

DEF.

Matris $n \times m$ är en system av nm tal (a_{jk})

där $1 \leq j \leq n$

$1 \leq k \leq m$

DEF.

En matris A är en funktion:

$$A : (j,k) \quad \left.1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq m\right\} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{reella tal}} \quad \underbrace{(\mathbb{C})}_{\text{komplexa tal}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad [n] = \{ j : 1 \leq j \leq n \}$$

$$[n,m] = \left\{ (j,k) : \begin{matrix} 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m \end{matrix} \right\}$$

$$A(j,k) = (A)_{jk} = a_{jk}$$

rad kolumn

$$a_j^k b_k^s = \sum_k a_j^k b_k^s$$

ifall så här betyder summa

DEF.

matris multiplikation $(AB)_{jk}$

dvs. funktion av par av matriser $n \times m$ och $m \times s$ som har värdemängd matriser $n \times s$

$$= \sum_{\ell = i}^{m} (A)_{j\ell} (B)_{\ell k}$$

alltså:

$$\begin{array}{c c c} & & j \\ i & \begin{pmatrix} a & b & c \\ & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d & & \\ e & & \\ f & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{pmatrix} \cdot & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f$

DEF.

En kolumnvektor är en matris $\underset{\text{rad}}{n} \times \underset{\text{kolumn}}{1}$.

dess dimension är $\underline{\underline{n}}$

multiplicera kolumnvektor med radvektor, ger enbart 1 tal!

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix}$$

DEF.

En matris A^T är transponatmatris till A

dvs så att

$$A(i,j) = A^T(j,i)$$

kan även t.ex skrivas

$$\left(A^T := A' := A^*\right)$$

alltså t.ex. om

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

så är A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

EGENSKAPER av matris multiplikation.

① $AB \neq BA$ i allmänna fallet.

ibland går det ej alls.

t.ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ej samma.

2×2 2×2

måste vara samma för att kunna multiplicera.

medans

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

om $AB = BA$ säger man att A $\boxed{\text{kommuterar}}$ med B.

② $(AB)C = A(BC)$ $\boxed{\text{associativ lag}}$

$:=$ betyder definition!

exempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix} \end{array}$$

2×2

2×3 stämmer! 3×2

ges genom:

$$(AB)_{11} = \sum_{l=1}^{3} A_{1l} B_{l1} = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 = 58$$

$$(AB)_{12} = \sum_{l=1}^{3} A_{1l} B_{l2} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 = 64$$

$$(AB)_{21} = \sum_{l=1}^{3} A_{2l} B_{l1} = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 = 139$$

$$(AB)_{22} = \sum_{l=1}^{3} A_{2l} B_{l2} = 8 \cdot 4 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 = 154$$

formellt.

③ $(AB)^T = B^T A^T$ $\quad ((\overline{A})(|B))^T = (\overline{B^T})(|A^T)$

rad kolumn

④ det finns en enhetsmatris

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ kan skrivas } \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

om A är en matris $n \times m$

$$I_n \times A = A$$

$$A \times I_n = A$$

alltså ger samma!

5

DEF

Vi säger att A är $\boxed{\text{inverterbar}}$ om A är en kvadratmatris (dvs. antal rader = antal kolumner ex. 2×2, 3×3) och det finns A^{-1} sådant att

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$$

då kallas A^{-1} inversmatris till A.

OBS: EJ alla matriser är inverterbara.

6 om A är inverterbar är även A^{-1} inverterbar och $(A^{-1})^{-1} = A$

7 det finns inte mer än 1 inversmatris till A.

tillämpning:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 \quad + x_3 = 9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & 2x_2 & 3x_3 \\ 0x_1 & x_2 & 2x_3 \\ x_1 & 0x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \overset{\text{vektor}}{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}}$$

$$\Longleftrightarrow \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}} \Longleftrightarrow A\bar{x} = B$$

så betecknar man ibland.

om nu A^{-1} finns så

$$\Longleftrightarrow A^{-1}(A\bar{x}) = A^{-1}B$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I_n}\bar{x} = A^{-1}B$$

$$\bar{x} = A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

och då kan man alltså få en lösning.

Metod att finna inversmatris:

en matris $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ställ upp med

$$(A \mid I_n)$$

\ identitetsmatris här

alltså,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

och radreducera nu så att "vänstra" matrisen istället blir I_n!

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{byt} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \cdot \tfrac{1}{2} \ \text{byt} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) (-1)$$

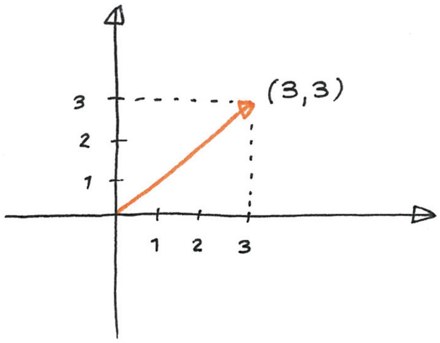
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right) (-1) \ (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

nu är det ju identitetsmatris här!

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

TÄNK PÅ EFTER FÖRELÄSNING:

1. Matris - vad är det?
2. Multiplicera matris
3. Skriva ekvationssystem genom matriser
4. Lösa —"— genom invers!
5. $AB \neq BA$, A^{-1} finns ej alltid.



Def.

Ett vektorrum är en mängd V som har 2 operationer definerat

$$\text{"}+\text{"} : V \times V \longrightarrow V$$
$$(\bar{v}, \bar{u}) \longrightarrow \bar{v} + \bar{u}$$

$$\text{"}\alpha\cdot\text{"} : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
$$(\mathbb{C})$$
$$(\alpha, \bar{v}) \longrightarrow \alpha \cdot \bar{v}$$

ex. $(1,2,3) + (4,5,6) = (5,7,9)$

$10 \cdot (1,2,3) = (10, 20, 30)$

1. $\forall u, v \in V$ — vektor rummet

för alla

$u + v = v + u$ kommutativ

2. $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

3. det finns en nollfaktor $\bar{0}$ sådant att för alla $u \in V$
$\bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$

4. för varje $u \in V$ finns det $(-u) \in V$ så att $\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$

5. $1 \cdot \bar{u} = \bar{u}$ för alla $\bar{u} \in V$

6. om a, b är tal och $\bar{u} \in V$

då $a \cdot (b \cdot \bar{u}) = (a \cdot b) \cdot \bar{u}$

ex. $2(3 \cdot \bar{u}) = 6 \cdot \bar{u}$

7. om a är tal och $\bar{u}, \bar{v} \in V$

då $a \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = a \cdot \bar{u} + a \cdot \bar{v}$ distributiv lag

8. om a, b är tal och $\bar{u} \in V$

då $(a+b)\bar{u} = a\bar{u} + b\bar{u}$

---

exempel på vektorrum:

1. $V = \mathbb{R}$

2. $V = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= (x,y) \\ \bar{v} &= (s,t) \\ a &\in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} \bar{u} + \bar{v} &= (x+s, y+t) \\ a \cdot \bar{u} &= (ax, ay) \end{aligned}$$

---

bevis av egenskap 1

låt $\bar{u} = (x,y)$ $\bar{v} = (s,t)$

då $\underset{\text{vänster}}{VS} = (x,y) + (s,t) = (x+s, y+t)$

$\underset{\text{höger}}{HS} = (s,t) + (x,y) = (s+x, t+y) = (x+s, y+t)$

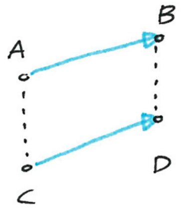
V.S.V

GEOMETRISKA VEKTORER.

vi säger att $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ om

$|AB| = |CD|$ dvs. längd är samma.

och $AB \parallel CD$ parallella.



ABCD är parallellogram (eller degenererat sådant)

$V = \{(AB)\}/\sim$ = "ekvivalens klasser m.a.p $\sim$" med avseende på

$\{1, 2, 3, 4\}$ $\quad 1 \sim 2$] detta är givet just här

$\{1, 2, 3, 4\}/\sim \;=\; \{1, 2\}, \{3\}, \{4\}$ olika ekvivalens

	1	2	3	4
1	×	×		
2	×	×		
3			×	
4				×

dvs $1 \sim 1$ $\quad 1 \sim 2$
$2 \sim 2$ $\quad 2 \sim 1$
$3 \sim 3$
$4 \sim 4$

om ekvivalensrelationen uppfylls eller ej.

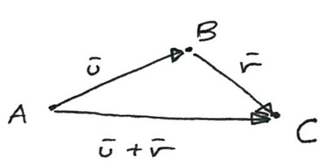
DEF.

Vektor är ett element i ett vektorrum.

$\overrightarrow{AB}$ (= alla sträckor som är ekvivalenta med AB lika långa, samma riktning)

$\overrightarrow{BC}$ = (—— " ——)

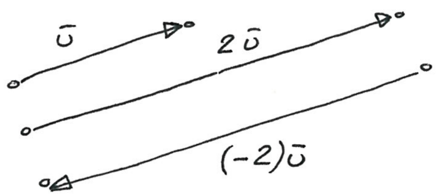
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}$ ⇦ korrekt definition.



om $a > 0$ då är $a \cdot \overrightarrow{AB}$ den vektor som har samma riktning som $\overrightarrow{AB}$ och längden $a \cdot |\overrightarrow{AB}|$

om $a < 0$ — " —

motsatt riktning — " —



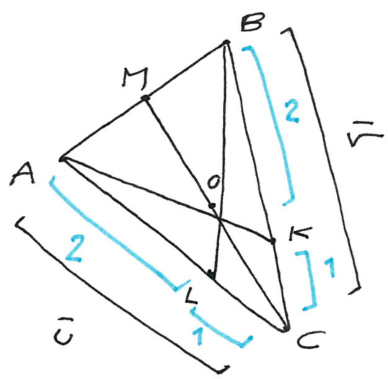
om $a = 0$ då är

$a \cdot \overrightarrow{AB} = 0 = \{(AA)\}$

längd är noll! vektor från pkt till sig själv.

TILLÄMPNING:

betrakta ABC



$|AM| = |MB|$

$|BK| = 2|KC|$

$|AL| = 2|LC|$

visa att MC, AK, BL skär varann i samma punkt.

PROOF:

låt $O \in MC$ och $|MO| = |OC|$ dvs i mitten.

$\overrightarrow{CA} = \bar{u}$

$\overrightarrow{CB} = \bar{v}$

$\overrightarrow{AB} = -\bar{u} + \bar{v}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\bar{v} - \bar{u})$

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \bar{u} + \frac{1}{2}(\bar{v} - \bar{u})$

$= \frac{1}{2}\bar{v} + \frac{1}{2}\bar{u}$

$\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CM}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\bar{v} + \frac{1}{2}\bar{u}\right) = \boxed{\frac{1}{4}\bar{v} + \frac{1}{4}\bar{u}}$

$AO = -CA + CO$

$= -\bar{u} + \frac{1}{4}\bar{v} + \frac{1}{4}\bar{u} = \boxed{\frac{1}{4}\bar{v} - \frac{3}{4}\bar{u}}$

$\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CK}$

$= -\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \boxed{-\bar{u} + \frac{1}{3}\bar{v}}$

om $\overrightarrow{AK} = a \cdot \overrightarrow{AO}$

då ligger A, K, O på samma linje

$\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AO}$

$(-\bar{u} + \frac{1}{3}\bar{v}) = \frac{4}{3}(-\frac{3}{4}\bar{u} + \frac{1}{4}\bar{v})$

alltså AK går igenom O (som är mitten av $\underline{\underline{MC}}$)

övning:
visa att BC går igenom O.

visa att vi använder egenskaper av vektorer ex. distributiv lag

VEKTORER / VEKTORRUM.

MATRISER.

Dagens exempel $\mathbb{R}^n := \overbrace{\{\text{matriser } 1\times n\}}^{\text{mängd av}}$

$:= \left\{ \begin{array}{c} \text{kolumnvektorer} \\ \text{av storlek } n \end{array} \right\}$

DEF.

Linjär kombination av vektorer $\{v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots v_m\}$

v är linjär kombination av $v_1, \ldots\ldots v_m$

om det finns sådana tal $a_1, \ldots\ldots a_m$

att $v = a_1 v_1 + \ldots\ldots + a_m v_m$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

där $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}$ linjär kombination av v_1, v_2

för att $v = 2v_1 + v_2$

OBSERVATION:

Det måste ej vara att $a_1, \ldots\ldots a_m$

ex. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = v_1 + v_2 = 3\cdot v_1 + 0\cdot v_2$$

$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad$ eller $\quad a_1 = 3 \quad a_2 = 0$

SATS.

Mängd av alla linjära kombinationer av $(v_1, \dots, v_m)$ är ett vektorrum m.a.p ("+", "α·")

DEF.

Mängd av alla linjära kombinationer av $v_1 \dots v_m$ kallas (linjärt) hölje (linear span)

OBS.

samma sak att säga "v är linjär kombination av $v_1 \dots v_m$"
eller "v tillhör hölje av $v_1 \dots v_m$"

Stor Fråga: $v \in \text{span}(v_1 \dots v_m)$

hör v till span $(v_1 \dots v_m)$?

ex. 1

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

frågan är alltså om det finns x_1, x_2, x_3 sådana att $v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 \\ x_1 + 2x_3 \\ 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 0 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

NU: se om detta system är lösbart.

alltså $v_1 \; v_2 \; v_3 \quad v$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{\underline{1}} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{\underline{1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

OLÖSBART!

alltså, $v \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$

ex. 2.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är v linjär kombo' av v_1, v_2, v_3, v_4?

dvs $v \in \operatorname{span}(\{ \quad \})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) (-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & -1 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{6} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{\underline{1}} & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{\underline{1}} & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{1}} & 3/2 & -1/6 \end{array}\right)$$

har lösning!

$v \in \operatorname{span}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$

DEF.

om $v_1 \dots v_m$ är sådana att alla vektorer i V som är deras linjära kombinationer går att skriva på endast 1 sätt (exakt) så kallas $\{v_1 \dots v_m\}$ ett linjärt OBEROENDE system.

Fråga:

avgör om ett givet system är linjärt beroende/oberoende.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{se förra!}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

fast med homogent HL

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{\underline{1}} & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{1}} & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{1}} & 3/2 & 0 \end{array}\right)$$

minst 1 lösning om systemet homogent!

system har oändligt många lösningar, mer än 1

alltså $\boxed{\text{beroende}}$

dvs.

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0$$

har mer än 1 (uppenbar) lösning

dvs $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

$\{v_1 \ldots v_m\}$ är EJ oberoende om det finns $(a_1 \ldots a_m) \neq (0 \ldots 0)$ sådana att $a_1v_1 + \ldots + a_mv_m = 0$

DEF.

Om $\{v_1 \ldots v_m\}$ är linjärt oberoende system sådant att $\operatorname{span}(\{v_1 \ldots v_m\}) = V$ (hela rummet!) så kallas det BAS-system.

dvs lösning skrivs på exakt 1 sätt!

ex.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är bas i $\mathbb{R}^3$ — 3 dimensioner

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SATS:

om system $\{v_1 \ldots v_m\}$ är linjärt beroende, går det att hitta k,

$$v_k \in \operatorname{span}(\{v_1 \ldots v_{k-1}, v_{k+1} \ldots v_m\})$$

sådan att v_k är linjär kombo av resten av vektorerna i systemet

ex.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & \overset{\text{OBS!}}{v_4} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right)$$

$$v_4 = 1/2\, v_1 - v_2 + 3/2\, v_3$$

alltså v_4 linj. kombination av

v_1, v_2, v_3

Betrakta V ett vektorrum

samt $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ och $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ två <u>baser</u> i V

Sats.

$n = m$ (där n och m är storlekar på två baser i ett vektorrum)

påstående:

om $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ är ett linjärt oberoende system där e_j är linjära kombinationer av $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ så är $n = m$

bevis av sats genom påstående:

$n \leq m$ och $m \leq n$

betrakta $\{e_j\}_{j=1}^{n}$: den är linjärt oberoende per definition av bas.

för varje j: $e_j \in V$ så är e_j en linjär kombination av $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ (för att $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ är bas)

påstående 1 ger att $n \leq m$.

betrakta $\{f_k\}_{k=1}^{m}$: den är linjärt oberoende. (☆)

för varje k : $f_k \in V$ så är f_k en linjär kombination av $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ (för att $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ är bas) (☆☆)

(☆) och (☆☆) uppfyller villkor i påstående 1

(för $\{f_k\}_{k=1}^{m}$, $\{e_j\}_{j=1}^{n}$)

dvs. påstående blir

om $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ är linj. oberoende system

(uppfyllt (☆)) där f_k är linjära kombinationer

av $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ (uppfyllt (☆☆))

så är $m \leq n$

alltså då vi bevisat att $n \leq m$ samt

$m \leq n$ så är slutsatsen att $n = m$.

OBSERVERA sats säger att alla baser

i ett rum har samma storlek (samma antal vektorer)

DEF.

Antal element i en bas (vilken som helst)

i ett vektorrum V kallas dimension av V.

ex.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$$

$\mathbb{R}^3$ har dimension 3

för att det finns

bas $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\{a_j\}_{j=1}^{n} := \{a_1, a_2, \ldots\ldots a_n\}$$

bevis av påstående 1.

betrakta e_j: är en linjär kombination av $\{f_k\}_{k=1}^{m}$

dvs. det finns sådana tal $\{a_{jk}\}_{k=1}^{m}$ att

$$e_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} f_k = a_{j1} f_1 + \ldots\ldots + a_{jm} f_m$$

betrakta system av sådana tal $\{a_{jk}\}_{j=1,\,k=1}^{n\,m}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{tion}]{\text{Gauss elimina-}} \begin{pmatrix} \underline{\underline{1}} & & \\ 0 & \underline{\underline{1}} & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

anta att $m > n$ (motsägelsebevis)

i en reducerad matris $n \times m$

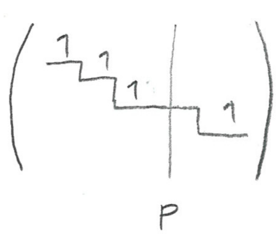
finns det max ett PIVOTELEMENT

i varje rad.

så det finns inte mer än n pivot element i matrisen (då det är n rader)

det finns alltså minst en kolumn utan pivotelement (då vi antog $m > n$)

betrakta mest vänstra kolumnen <u>utan</u> pivot element



betrakta $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \\ a_{np} \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & & \\ \vdots & & & & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & & & p & 0 \end{array}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & b_1 \\ & 1 & & b_2 \\ & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & & & \vdots \end{array}\right)$$

Om vi tänker på ekvationssystem betyder det att

$$\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{p-1}b_{p-1} = a_{1p} \\ a_{n1}b_1 + \dots\dots + a_{n-1}b_{p-1} = a_{np} \end{cases}$$

betrakta

$$b_1e_1 + b_2e_2 + \dots + b_{p-1}e_{p-1} =$$

$$b_1(a_{11}f_1 + \dots a_{1m}f_m) + \dots$$

$$+ b_{p+1}(a_{p-1}f_1 + \dots\dots + a_{m(p-1)}f_m)$$

$$= (b_1a_{11} + \dots\dots + b_{p-1}a_{p-1})f_1 + \dots\dots$$

$$= a_{1p}f_1 + \dots\dots + a_{mp}f_m = e_p$$

dvs e_p är linjär kombination av $e_1, \dots\dots e_{p-1}$

det strider mot att $\{e_j\}_{j=1}^{m}$ är linjärt oberoende.

VSV

KOORDINATER.

$$\left\{ V, \text{bas}\{e_j\}_{j=1}^{n} \right\} \Longleftrightarrow \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}^n$$

varje $v \in V$ går att skriva

som $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$

på ett entydigt sätt.

så vi kan identifiera

$$v \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

identifiera vektorn $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

om

a) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{x_1 = 1 \quad x_2 = 2}$$

b) $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = 5}$$

SKALÄR PRODUKT.

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

ingen riktning
bara TAL!

DEF.

$$v \cdot u := v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + v_3 \cdot u_3$$

skalärprodukt

egenskaper:

1. $v \cdot u \in \mathbb{R}$
2. $u \cdot v$
3. $(a \cdot u) \cdot v = a \cdot (u \cdot v)$ om $a \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$
4. $v \cdot v \geq 0$
5. $v \cdot v = 0 \overset{\text{OM och endast OM}}{\iff} v = 0$
6. $v(u + w) = v \cdot u + v \cdot w$

bevis av 4.

$$v \cdot v = v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + v_3 \cdot v_3 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \geq 0$$

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0 \iff v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

DEF.

$$\underbrace{\|v\|}_{\text{beteckning av "norm av v"}} := \underbrace{\sqrt{v \cdot v}}_{\text{vi vet att} \oplus \text{tal}} = \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)^{1/2}$$

kallas norm av v

egenskaper

1. $\|v\| \geq 0$ och $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|a \cdot v\| = |a| \cdot \|v\|$ där $a \in \mathbb{R}$, $v \in V$
3. $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ triangelolikhet

Bevis av triangelolikheten.

$$\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = (u+v, u) + (u+v, v)$$

$$= \underbrace{(u,u)}_{\|u\|^2} + (v,u) + (u,v) + \underbrace{(v,v)}_{\|v\|^2}$$

$$= \|u\|^2 + 2(v,u) + \|v\|^2$$

$$(HL)^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 = \|u\|^2 + 2\cdot\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2$$

Cauchy-Schwartz olikhet

$$|u\cdot v| \leq |u|\cdot|v|$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$\Updownarrow$$

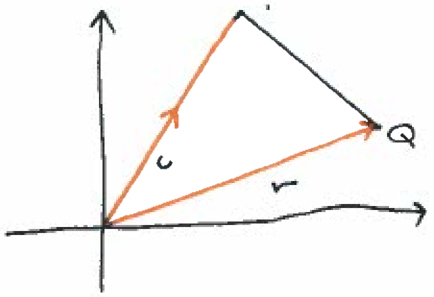
$$\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\|u\|^2 + 2(u,v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2$$

$$\Updownarrow$$

$$(u,v) \leq \|u\|\cdot\|v\|$$



vill hitta punkt på u som ligger närmast v

P ligger på linjen definerad av u

$v = \overrightarrow{OQ}$

vilket är kortast möjliga $|PQ|$?
avstånd

$\overrightarrow{OP} = t \cdot u \qquad t \in \mathbb{R}$

en skalär

$\overrightarrow{PQ} = -t \cdot u + v$

$|\overrightarrow{PQ}| = \| -tu + v \|$

gör som funktion

$f(t) = |\overrightarrow{PQ}|^2 = \langle -tu + v, -tu + v \rangle$

$= t^2 \langle u,u \rangle - 2t \langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle$

jämför: $f(t) = at^2 + bt + c$

$f(t) \geq 0$ då $|\overrightarrow{PQ}| \geq 0$ (ej negativ sträcka)

$f(t) \geq 0 \iff b^2 - 4ac \leq 0$ max 1 st lösning

så

$(-2\langle u,v \rangle)^2 - 4(\langle u,u \rangle, \langle v,v \rangle) \leq 0$

$4(\langle u,v \rangle)^2 \leq 4(\langle u,u \rangle, \langle v,v \rangle)$

$(\langle u,v \rangle)^2 \leq (\langle u,u \rangle, \langle v,v \rangle)$

$|\langle u,v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ V.S.V.

$f(t) = at^2 + bt + c$

$f'(t) = 2at + b \implies t_{min} = \boxed{\frac{-b}{2a}}$

$f''(t) = 2a$ (positiv

$$\min |\overrightarrow{PQ}|^2 = f(t_{min}) = \langle u,u\rangle \left(\frac{2\langle u,v\rangle}{2\langle u,u\rangle}\right)^2$$

$$- 2\langle u,v\rangle \left(\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}\right) + \langle v,v\rangle$$

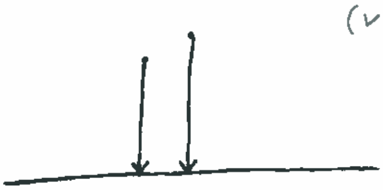
då uppnås $\overrightarrow{OP} = t_{min} \cdot u$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle} \cdot u \qquad \text{om } \langle u,u\rangle = 1$$

dvs $\langle u,v\rangle$ är längden av projektion av v på u.

Def.

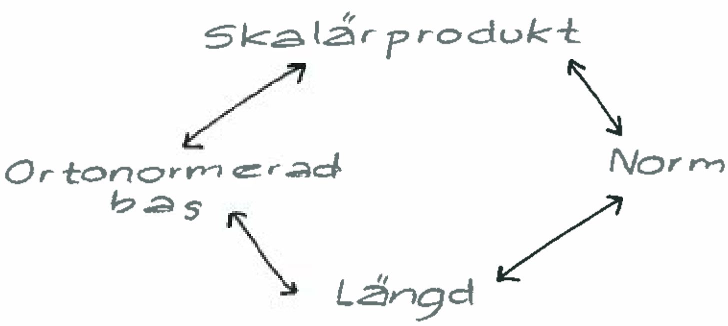
u och v är <u>ortogonala</u> om $\langle u,v\rangle = 0$
(vinkelräta)



Def.

En bas $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ där $\langle e_j, e_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{om } j=k \\ 0 & \text{om } j\neq k \end{cases}$

kallas <u>ortonormerad</u> bas.



1. Skalärprodukt (på kolumn vektor)
2. Geometrisk betydelse av skalärprodukt (tänk hur $\cos\alpha$ hänger med)
3. Bevis av triangelolikhet & Cauchy-Schwartz olikhet.

090914. LINJÄRA AVBILDNINGAR.

Def.
Linjär avbildning är en (vektorvärd) funktion på ett vektorrum som uppfyller följande egenskaper

① $T(\bar{v}+\bar{u}) = T(\bar{v}) + T(\bar{u})$ för alla $\bar{u},\bar{v} \in V$

② $T(a\cdot\bar{v}) = aT(\bar{v})$ för alla $a \in \mathbb{R}$ och $\bar{v} \in V$

$$T : V \longrightarrow W$$
$$\bar{v} \longmapsto T(\bar{v})$$

ex.1. $V := \mathbb{R}^n$, $W := \mathbb{R}^m$

$T(\bar{v}) := A\bar{v}$ där A är en matris $m \times n$

$$A(\bar{u}+\bar{v}) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}}_{n\times 1}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}(u_1+v_1)+a_{12}(u_2+v_2)+\dots a_{1n}(u_n+v_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(u_1+v_1)+\dots\dots+a_{mn}(u_n+v_n) \end{pmatrix}}_{m\times 1}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}u_1+\dots+a_{1n}u_n)+(a_{11}v_1+\dots+a_{1n}v_n) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}u_1\dots \\ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}v_1\dots \\ \\ \end{pmatrix} = A\bar{u} + A\bar{v}$$

Alltså egenskap 1 uppfylls.

Egenskap 2 uppfylls (visa själv!)

Ger att $v \longmapsto Av$ är linjär avbildning.

ex. 2.

I vektorrum av geometriska vektorer på ett plan, rotation är en linjär avbildning.

ex. 3.

Alla deriverbara funktioner på $\mathbb{R}^1$ är ett vektorrum. Derivatan är en linjär avbildning $D: C' \longrightarrow C$

ex. 4.

Polynom av grad $\leq n$ är ett vektorrum P_n.

$p \longmapsto (p(0), p(1), p(2), \dots, p(m))^T$ är linjär avbildning

$P \longrightarrow \mathbb{R}^m$

SATS.

(om en matris av linjär avbildning)

för $(V, \{\mathbb{e}_j\}_{j=1}^n)$ och $(W, \{\mathbb{f}_k\}_{k=1}^m)$

där V och W är vektorrum

och $\{\mathbb{e}_j\}_{j=1}^n$ en bas i V samt

$\{\mathbb{f}_k\}_{k=1}^m$ en bas i W

för varje linjär avbildning motsvarar en och endast en matris $m \times n$ sådant att om $v = \sum_{j=1}^n v_j \mathbb{e}_j$ och

$$T(v) = \sum_{k=1}^m w_k \mathbb{f}_k$$

då $A\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \left((T(v))_F\right)$

Exempel.

Betrakta P_3 (polynom av grad ≤ 3)

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

och naturlig bas $\{x^k\}_{k=0}^{3}$ (dvs $\{1, x, x^2, x^3\}$)

t.ex. $P(x) = 2x^3 + x^2 + 4x + 5$

har koordinaterna $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Betrakta linjär avbildning

$$P \longmapsto P'$$

$$D : P_3 \longrightarrow P_3$$

derivatan blir polynom ≤ 2

t.ex. $P'(x) = 6x^3 + 2x + 4 \in P_3$

$P'(x)$ har koordinater $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vår vektor $P(x)$

dvs derivatan

t.ex. $\underset{4 \times 4}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{4 \times 1}{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \underset{4 \times 1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Betrakta ett godtyckligt polynom i P_3

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

koordinaterna $\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$

matris

kolumn vektor

Betrakta $A \cdot (p)_\beta$ — visar att bas

(alltså $(p)_\beta$ kolumn-vektor av koordinater av p m.a.p. bas $\beta = \{x^k\}_{k=0}^{3}$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2b \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow D(1) \quad \downarrow D(x) \quad \downarrow D(x^2) \quad \downarrow D(x^3)$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{3a \cdot x^2}_{(x^3)'} + \underbrace{2b \cdot x}_{(x^2)'} + c \cdot \underbrace{1}_{(x)'} = p'(x)$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = D(1) \cdot d + D(x) \cdot c + D(x^2) \cdot b + D(x^3) \cdot a$$

$$= D(d + cx + bx^2 + ax^3)$$

Bevis av satsen.

Matrisen A som har $(T(v_j))_F$ kolumner

$A = \left((T(e_1))_F \; (T(e_2))_F \; \ldots \; (T(e_n))_F \right)$ (för oss just 1 st här) passar

där $(T(e_j))_F$ är kolumnvektor av koordinater av $T(e_j)$ i bas $\{f_k\}_{k=1}^{m}$

ex. $D(x) = 1 = 1 \cdot 1$ $\quad (D(x))_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D(x^2) = 2x = 2 \cdot x$

$= 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$

$(D(x^2))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(e_1)_F \cdot v_1 + \dots\dots + T(e_n)_F v_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(\left(v_1 T(e_1) + \dots\dots + v_n T(e_n) \right)_F \right)$$

T är linjär

$$= \left(\left(T(v_1 e_1) + \dots\dots + T(v_n e_n) \right)_F \right)$$

$$= \left(\left(T(\underbrace{v_1 e_1 + \dots\dots v_n e_n}_{\bar{v}}) \right)_F \right) = T(v)_f$$

FÖLJESATS

Det räcker att veta vart basvektorer avbildas för att veta hela linjära avbildningen.

DEF.

Om $X \subset V$ (är delmängd i vektorrum) sådant att för $u, v \in X \Rightarrow (u+v) \in X$

för $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot u \in X$

blir X ett vektorrum m.a.p samma operationer vi hade i V, och X kallas <u>delrum</u> av V.

exempel.

Om T är linjär $T : V \longrightarrow W$

då är $T(V)$ delrum i W

DETERMINANTER.

kvadratiska matriser har determinanter

DEF.

En determinant är ett tal som karaktäriserar en kvadratisk metod.

DEF. — VIKTIGT!

Permutation av n är en ordnad följd av tal 1.....n

ex. $\sigma_1 = (1,3,4,2)$ $\quad P(\sigma_1) = (-1)^2 = 1$

$\sigma_2 = (5,3,1,4,2)$ $\quad P(\sigma_2) = (-1)^7 = -1$

dvs. hur många i fel ordning

Permutation: $(-1)^{(\text{antal omvända par})}$

LEMMA:

Om vi byter plats på två tal i en permutation σ, så byts tecken på $P(\sigma)$

ex. $P((2,3,1)) = (-1)^2 = 1$

av 3 möjliga par står 2 st. i omvänd ordning

$P(1,3,2) = (-1)^1 = -1$

$P(1,2,3) = (-1)^0 = 1$

DETERMINANT

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \Rightarrow \sum_{\sigma \in P_n} P(\sigma) a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$$

alla möjliga permutationer

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = P((1,2)) \cdot a_{11}a_{22} + P((2,1)) a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$P_2 = \{(1,2),(2,1)\}$$

ex. $P_3 = \{(1,2,3),(2,1,3),(1,3,2),(3,1,2),(3,2,1),(2,3,1)\}$

3×3 matris

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = P(1,2,3)a_{11}a_{22}a_{33} + \dots \text{ osv.}$$

med 7 till som tidigare

EGENSKAPER TILL DETERMINANT.

1. om vi byter plats på 2 rader/kolumner byts tecknet på determinanten.
2. om vi adderar en rad/multipel av en rad byts EJ tecken.
3. $\det(A) = \det(A^T)$
4. $j: |a_1+b_1 \; a_2+b_2 \dots a_n+b_n| = |a_1 \dots a_n| + |b_1 \dots b_n|$

jte raden

$t|a_1 \dots a_n| = |ta_1 \dots ta_n|$

FÖR ALLA DESSA

Om 2 rader/kolumner i en matris A är lika så är $\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 6 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 6 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 7 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

(-1) (-1) (-1) (-1) (-3)

$$\sim \begin{vmatrix} -2 & -13 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \sim - \begin{vmatrix} 0 & -13 & -2 \\ 0 & 8 & 7 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 7 \\ 0 & -13 & -2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & 12 \end{vmatrix}$$

(2) (-1)

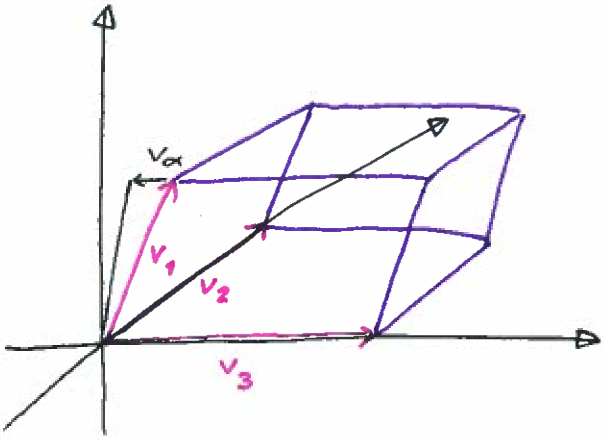
i om byter hela kolumner

försvann då bytte igen

$$\sim \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -9 & 12 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 75 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot 75$$

(9)

nu kan enkelt räkna ut



$$A = \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \\ V_3^T \end{bmatrix}$$

Om man flyttar alla skivor enligt V_α
så ändras ej totala volymen

$$\mathrm{Vol}(V_1, V_2, V_3) = \mathrm{Vol}(V_1, V_2 + V_\alpha, V_3)$$

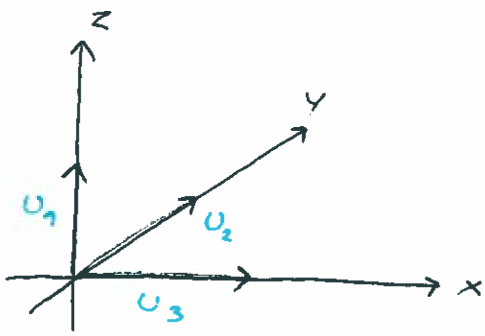
$$\mathrm{Vol}(V_1, V_2, V_3) = \mathrm{Vol}(U_1, U_2, U_3) \Longleftarrow \det\begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \\ V_3^T \end{pmatrix} = \det\begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \\ U_3^T \end{bmatrix}$$

där $\begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \\ U_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

$\mathrm{Vol}(U_1, U_2, U_3)$

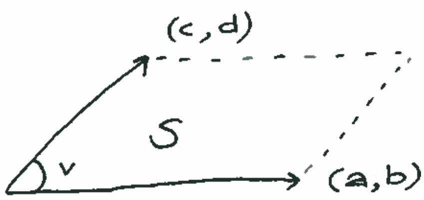
$= \|U_1\| \cdot \|U_2\| \cdot \|U_3\|$

$= \det(A)$



$$\det\begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \\ U_3^T \end{bmatrix} = a \cdot b \cdot c$$

$$S = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |ad - bc|$$



KUNNA:

Determinant, beräkna
Räkneregler, tillämpa
Geometrisk betydelse
Definition av determinant

140414.

Memoreringsregler för DETERMINANT:

2×2 och 3×3

$$\begin{array}{cc} + & - \\ \end{array}\quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ \end{array}\quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}\quad \begin{array}{ccc} - & - & - \end{array}$$

EGENSKAPER.

① $\det\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j + v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ (uppfylls av volymen)

② $\det\begin{pmatrix} v_1 \\ a\cdot v_j \\ v_n \end{pmatrix} = a\cdot\det\begin{pmatrix} v_1 \\ v_j \\ v_n \end{pmatrix}$ (uppfylls av volymen bortsett från tecken, dvs volym ej neg. ju)

③ $\det\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = 1$ volym av kub m. sidorna 1 är 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} (1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} (-1)$$

$$= \begin{vmatrix} -6 & -7 & -8 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} (1) = \begin{vmatrix} -6 & -7 & -8 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Betrakta

$u = (u_1, u_2, u_3) \quad v = (v_1, v_2, v_3)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = a_1 i + a_2 j + a_3 k = \bar{w} := \bar{u} \times \bar{v}$$

kryss-produkt

$$= i\,\underline{u_2 v_3} + j\,\underline{u_3 v_1} + k\,\underline{u_1 v_2} - k\,\underline{v_1 u_2} - i\,\underline{u_3 v_2} - j\,\underline{u_1 v_3}$$

om $i = (1,0,0)$ $j = (0,1,0)$ $k = (0,0,1)$ så är w en vektor

Egenskaper av kryssprodukt.

(1.) $(\bar{w}, \bar{u}) = 0$ eller $(\bar{u} \times \bar{v}, \bar{u}) = 0$

Bevis

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = a_1 i + a_2 j + a_3 k = (a_1, a_2, a_3)$$

$$(\bar{u} \times \bar{v}, \bar{u}) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

(2.) $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle = 0$ (eller $\langle \bar{u} \times \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$)

Bevis:

likadant som ovan.

$\bar{w}$ vinkelrätt mot $\bar{u}$ och $\bar{v}$

$$\langle \bar{w}, a\bar{u} + b\bar{v} \rangle = a\underbrace{\langle \bar{w}, \bar{u} \rangle}_{0} + b\underbrace{\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle}_{0} = 0$$

om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är linjärt oberoende,

så $\{a\bar{u} + b\bar{v}\}$ är ett plan.

alltså är $\bar{w}$ vinkelrät mot planet.

om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ linjärt beroende

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} \bar{v} = 0 \\ \bar{u} = t \cdot \bar{v} \quad \text{för ett tal } t \end{bmatrix}$$

en av dem är noll eller pekar i samma riktning

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left[\begin{matrix} \bar{0} \\ \begin{bmatrix} i & j & k \\ tv_1 & tv_2 & tv_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \end{matrix} \right.$$

noll vektorn!

alltså om $\bar{u}$ & $\bar{v}$ linj. beroende

så är $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{0}$

ex. $\bar{u} = (1,2,3) \quad \bar{v} = (4,5,6)$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{matrix}$$

memorerings regeln

$$= \mathbb{i} \cdot 2 \cdot 6 + \mathbb{j} \cdot 4 \cdot 3 + \mathbb{k} \cdot 1 \cdot 5 - \mathbb{k} \cdot 2 \cdot 4 - \mathbb{i} \cdot 3 \cdot 5 - \mathbb{j} \cdot 1 \cdot 6$$

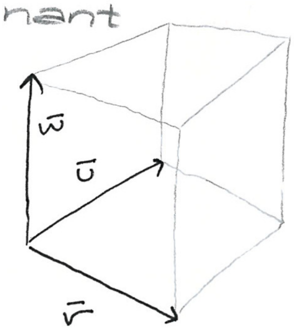
$$= (-3)\mathbb{i} + 6\mathbb{j} - 3\mathbb{k}$$

$$= (-3, 6, -3) \text{ som vektor!}$$

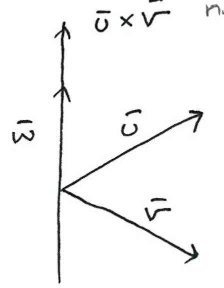
Betrakta $\bar{w}$ som är vinkelrät mot planet genom $\bar{u}$ och $\bar{v}$ och har längd 1.

$$\langle \bar{u} \times \bar{v}, \bar{w} \rangle = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \pm \mathrm{Vol}((\hat{w}, \hat{u}, \bar{v}))$$

geometrisk betydelse av determinant



$= \pm$ arean av parallellogram utbyggd på $\bar{u}$ och $\bar{v}$



nånstans längst med denna

Observera att $\bar{u} \times \bar{v} \parallel \bar{w}$

så $\langle \bar{u} \times \bar{v}, \bar{w} \rangle$

$$= \pm \underbrace{\|\bar{u} \times \bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|}_{}$$

är ju 1

SLUTSATS:

$\bar{u} \times \bar{v}$ är en vektor, som är vinkelrät mot $\bar{u}$ och $\bar{v}$, och har längd lika med arean av parallellogrammet utbyggt av $\bar{u}$ och $\bar{v}$

TRIPPELPRODUKT AV VEKTORER.

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ är ett tal $\langle \bar{u} \times \bar{v}, \bar{w} \rangle$

"i praktiken" är det $\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

dess geometriska betydelse är volym av parallellpiped utbyggd av $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$

Om $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \forall_k \sum_{j=1}^{n} A_{jk} \cdot a_{jk} =$

$A_{1k} a_{1k} + \ldots + A_{nk} a_{nk}$

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} \cdot \det \begin{array}{cc} & k \\ j & \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & a_{jk} & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ & & \text{osv} & & \end{pmatrix}$$

exempel.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot -2 - 4 \cdot -6 + 5 \cdot -4$$

$$= -2 + 24 - 20 \Rightarrow \boxed{2}$$

040421.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2y + z = 3 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. ekvationssystem

    Gauss radreducering

    pivot element
    parametrisk lösning
    entydig lösning
    olösbart system

2. matriser, operationer med dem

$$(\overbrace{v_1, v_2, v_3}^{\text{tal}}) \overbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}}^{\text{tal}} = (v_1 r_1 + v_2 r_2 + v_3 r_3)$$

$$(\overbrace{V_1, V_2, V_3}^{\text{kolumn vektorer}}) \overbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}}^{\text{tal}} = (V_1 r_1 + V_2 r_2 + V_3 r_3)$$

$$(\overbrace{v_1, v_2, v_3}^{\text{tal}}) \overbrace{\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}}^{\text{rad vektorer}} = (v_1 R_1 + v_2 R_2 + v_3 R_3)$$

$$(\overbrace{V_1, V_2, V_3}^{\text{kolumn vektorer}}) \overbrace{\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}}^{\text{rad vektorer}} = (V_1 R_1 + V_2 R_2 + V_3 R_3)$$

③ Vektorrum och linjära avbildningar

Definitioner

Bas $\begin{cases} \text{linjärt oberoende} \\ \text{spänner hela rum} \end{cases}$

t.ex $\mathcal{B} = \begin{cases} e_1 = (1,0,0) \\ e_2 = (0,1,0) \\ e_3 = (0,0,1) \end{cases}$ kanonisk (standard) bas i $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = \begin{cases} e_1 = (1,1,0) \\ e_2 = (2,1,0) \\ e_3 = (-1,0,1) \end{cases}$ är en bas i $\mathbb{R}^3$

TEORI

Om ett vektorrum har en bas av n vektorer så har alla baser i det rummet n vektorer

DIMENSIONER av RUM:

1. $\mathbb{R}^2$ är 2 dimensionell
2. span $\big(\underbrace{(0,1,2,3),(0,1,0,4)}_{\text{dvs de är linjärt oberoende}}\big)$

/delrum / underrum av $\mathbb{R}^4$ p.g.a 4 variabler.

LEMMA.

I n-dimensionellt rum är följande ekvivalent:

1. system av n vektorer är en bas
2. — " — är linjärt oberoende
3. — " — spänner hela rummet

Bevis.

$1 \Longrightarrow 2$ (definition)

$1 \Longrightarrow 3$ (—"—)

$2 \Longrightarrow 1$ påminnelse, vi har visat ett påstående

om $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{n}$ som är linj. oberoende
och $\forall j \quad \mathbf{e}_j \in \operatorname{span}(\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^{m})$
så $\Longrightarrow n \leq m$

betrakta linj. oberoende system av vektorer $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{n}$ i n-dimensionellt vektorrum V

anta att det inte är en bas
dvs $\operatorname{span}(\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{n}) \neq V$

det betyder att finns vektor $\mathbf{e}_{n+1} \in V \setminus \operatorname{span}(\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{n})$

betrakta $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{n+1}$ linj. oberoende system, ty ingen vektor i det kan uttryckas som linj. kombination av föregående

betrakta $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^{n}$ en godtycklig bas av V

använd påståendet $n+1 \leq n$ (?!)

$3 \Longrightarrow 1$

betrakta system

$\{\mathbb{V}_j\}_{j=1}^n$ sådant att $\text{span}(\{\mathbb{V}_j\}_{j=1}^n) = V$

ifall linj. oberoende $\Longrightarrow$ bas

anta att $\{\mathbb{V}_j\}_{j=1}^n$ är linj. oberoende

dvs. finns $1 \leq k \leq n$

sådant att $\mathbb{V}_k = a_1\mathbb{V}_1 + \dots + a_{k-1}\mathbb{V}_{k-1}$

för $a_1 \dots a_{k-1} \in \mathbb{R}$

$\text{span}(\{\mathbb{V}_1 \dots \mathbb{V}_{k-1}\ \mathbb{V}_{k+1} \dots \mathbb{V}_n\})$

dvs $\mathbb{V}_k$ ej med

$= \text{span}(\{\mathbb{V}_1 \dots \dots \mathbb{V}_n\}) = V$

ty om $\mathbb{U} = x_1\mathbb{V}_1 + \dots + x_n\mathbb{V}_n$

$x_k\mathbb{V}_k = \mathbb{V}_k(a_1\mathbb{V}_1 + \dots + a_k\mathbb{V}_k)$

så $\mathbb{U} = (x_1 + x_k \cdot a_1)\mathbb{V}_1 + \dots$

$+ (x_{k-1} + x_k a_{k-1})\mathbb{V}_{k-1}$

$+ x_{k+1}\mathbb{V}_{k+1} + \dots + x_n\mathbb{V}_n$

$\Longrightarrow U \in \text{span}(\{\mathbb{V}_j\}_{j=1}^n\ j \neq k)$

betrakta godtycklig bas $\{\mathbb{U}_k\}_{k=1}^n$

använd påstående

$(\{\mathbb{U}_k\}_{k=1}^n)$ linj. oberoende och varje $\mathbb{U}_j$ ligger i $\text{span}(\{\mathbb{V}_j\}_{j=1}^n\ j \neq k)$

$n \leq n-1$ (?!)

om linj. oberoende MEN spänner ej hela

spänner hela MEN ej linj. oberoende

[illegible] Linjär algebras huvudsats

sats 2.8

Låt A vara $n \times n$ matris,
då är följande ekvivalent

a) A har en invers (inverterbar)

b) A ger en $n \times n$ identitetsmatris efter Gauss radreducering $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

c) A har n pivot element

d) $A\bar{x} = 0$ har en enda lösning, $\bar{x} = 0$

e) kolumnvektorer av A är linjärt oberoende

f) linjär avbildning som har matris A är ett-mot-ett (injektiv)

g) $A\bar{x} = b$ är lösbar för alla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$

h) kolumnvektorer av A spänner $\mathbb{R}^n$

i) $\bar{x} \longrightarrow A\bar{x}$ surjektiv

j) $\exists$ $n \times n$ matris C sådant att $CA = I_n$

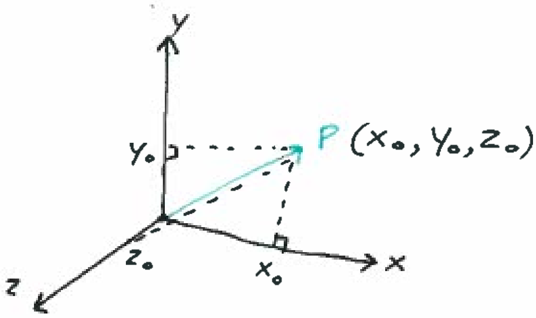
k) $\exists$ $n \times n$ matris D sådant att $AD = I_n$

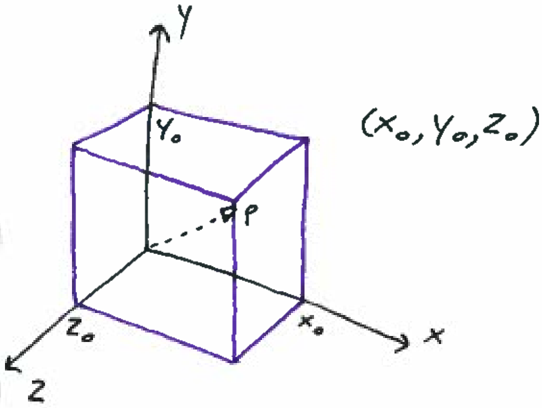
l) A^T inverterbar

m) $\det(A) \neq 0$ geometriskt: volym av 3 vektorer ej noll

040924

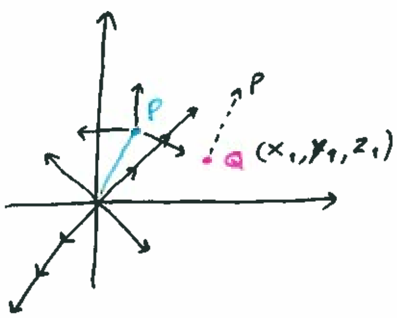
ANALYTISK GEOMETRI.





linjen $t \cdot \bar{v}$ där $\bar{v}$ är en vektor

(går genom origo



kan "flytta på origo"

P blir nytt origo

P hade koordinater (x_0, y_0, z_0)

om Q hade koordinater (x_1, y_1, z_1)

ges Q's nya koordinater av vektorn $\overrightarrow{PQ}$

dvs. $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

alltså ekvation av en linje i $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} t \implies \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} t}$$

parametrisk form

där $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ riktningsvektor

och linjen går igenom $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

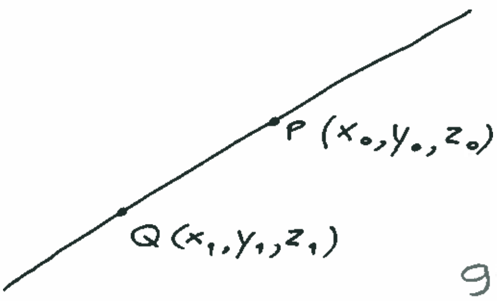
$a, b, c \neq 0$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \iff \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = t \\ \dfrac{y - y_0}{b} = t \\ \dfrac{z - z_0}{c} = t \end{cases} \iff \underbrace{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}} = \frac{z - z_0}{c} \quad (= t)$$

(om t.ex 2 dim. riktningskoefficient för dessa $\frac{b}{a}(x - x_0) = y - y_0$)

alltså linjen genom (x_0, y_0, z_0) riktningsvektor (a, b, c)



där $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$

formeln för linjen som går i riktning (a, b, c) genom P ser annorlunda ut än för linjen som går i riktning (a, b, c) genom Q men de beskriver samma linje

t.ex. $\ell = \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 3}{1} = \dfrac{z - 2}{4} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

samma!

$\ell = \dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y - 4}{1} = \dfrac{z - 6}{4} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

UNDANTAG

om a, b eller c är noll

ät $b=0$

$$\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = 0 \\ z - z_0 = ct \end{cases} \iff \begin{matrix} \dfrac{x-x_0}{a} = t \\ y - y_0 = 0 \\ \dfrac{z-z_0}{c} = t \end{matrix}$$

$$\iff \frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{c}, \quad y = y_0 \text{ alltid!}$$

- linjen kan ha många riktningsvektorer (alla parallella)

- ex.

$$\ell = \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{4} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\ell = \frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-6}{8} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

påminnelse, i $\mathbb{R}^2$

linjen $\dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{x-x_0}{a}$

- linjen $ay + bx = c$ normal $2-1=1$

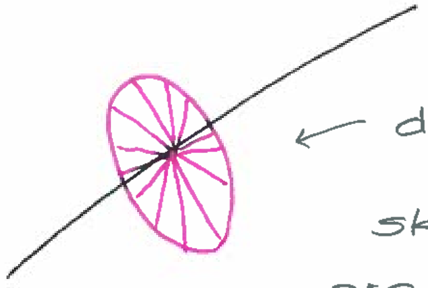
- MEN i $\mathbb{R}^3$ $3-1=2$

ekvation $ax + by + cz = d$

$\bar{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normalvektor

skalärprodukt $\langle (a,b,c), (x,y,z) \rangle = d$

dvs. projektion av (x,y,z) på (a,b,c)



← dvs. som ett plan sådär.

skrivs

längd av denna då

$\text{proj}_{a,b,c}\,(x,y,z) \cdot |(a,b,c)|$

ekvation på ett plan i normalform

$ax + by + cz = d$

där (a,b,c) är normalvektor (vinkelrät mot planet)

om vi vet normalvektor, hur kan vi skriva ekvation av ett plan gnm en given pkt?

exempel $\bar{n} = (1,2,3)$ $\quad p = (4,5,6)$

$1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = d$

punkten är alltså lösningen, då ligger i planet! sätt in som koordinater

$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$

$d = 32$

$\boxed{x + 2y + 3z = 32}$ ekvationen till planet

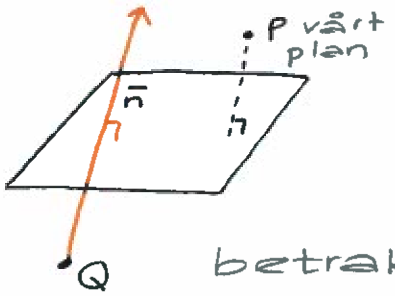
$\langle (1,2,3), (x,y,z) \rangle = \langle (1,2,3), (4,5,6) \rangle$

skalärprodukt

avstånd från en punkt till ett plan.

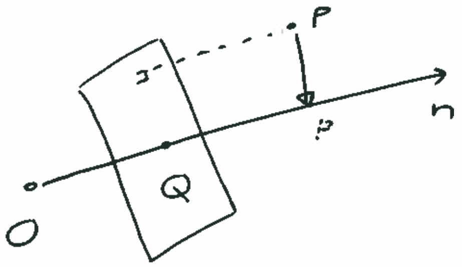
ex. $P = (2,3,4)$

plan $3x + 4y + 5z = 10$



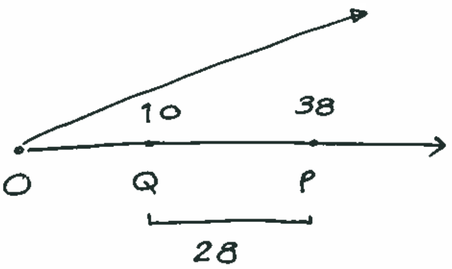
normal vektorn $\bar{n} = (3,4,5)$ är ju vinkelrät mot planet.

betrakta projektion $\boxed{\text{på } \bar{n}}$



$1-1=0$ så bara 1 pkt.

gångra skalär $((3,4,5),(2,3,4)) = 38$
$\quad n \qquad\qquad P$



projektion $=$

$$\frac{\text{skalärprodukt } m.\bar{n}}{\underset{\text{längd av } \bar{n}}{|\bar{n}|}}$$

skalärprodukt $m.\bar{n}$ $=$ projektion $\cdot\ |\bar{n}|$
$((3,4,5),(2,3,4))$

avstånd från P till planet
$3x + 4y + 5z = 10$

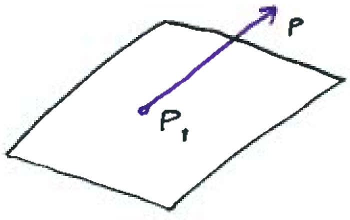
$$\frac{38-10}{|(3,4,5)|} = \frac{28}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} = \frac{28}{5\sqrt{2}} = \boxed{\frac{28\sqrt{2}}{10}} = \frac{14\sqrt{2}}{5}$$

SAMMANFATTNING

avstånd från $P(x_0, y_0, z_0)$ till planet $ax + by + cz = d$ är

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Parametrisk ekvation av planet.



en vektor som går i normal vektor
kan alltså hitta P

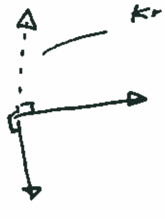
plan på parametrisk form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} s$$

om vi vill ha plan vill vi ha 2 vektorer

vi vet 2 vektorer som är parallella med plan, och en punkt genom vilken planet går. vi behöver en 3:e som är vinkelrät mot båda ... alltså en normalvektor som är kryssprodukt av vektorer parallella med plan.

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$



exempel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} s \implies n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)i - (-3)j + (-1)k$$

GLÖM EJ!!

determinant jue.

$$= (-2, 3, -1)$$

nollvektorn

ekvationen är

$(-2)x + 3y + (-1)z = d$

sätt in $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$-2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1 \qquad d = 1$

$$\boxed{-2x + 3y - z = 1}$$

övning 1.

punkt $P(2,3,5)$

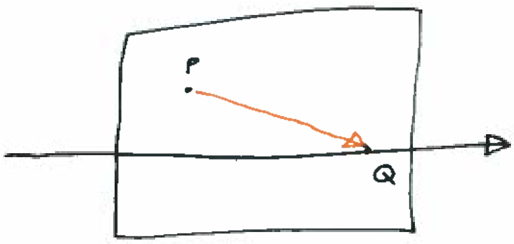
linjen $\ell : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{1}$

finn ekvation av plan π som går genom P och ℓ.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ riktningsvektor

då linjen börjar

$$Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \ell$$



för att

$$\frac{2-2}{3} = \frac{-1+1}{2} = \frac{-2+2}{1}$$

stämmer!

$P \in \pi \quad Q \in \ell \subset \pi$

$\Downarrow$

$Q \in \pi \implies \boxed{\overline{PQ} \parallel \pi}$

parallellt mot plan

$$\overrightarrow{PQ} = \underset{Q}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}} - \underset{P}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

riktningsvektor till ℓ är $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

alltså

$(3,2,1) \parallel \pi$ och $(0,-4,-7) \parallel \pi$

kan alltså finna normalvektorn för planet genom dessa två.

$\bar{n} = (3,2,1) \times (0,-4,-7)$ är vinkelrät mot de 2 linjärt oberoende vektorer som är parallella med 2-dim planet

så $n \perp \pi$

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} k$$

$$= -10 + 21 - 12 = (-10, 21, -12)$$

vårt plan går igenom $(2,3,5)$ ju.

$$-10x + 21y - 12z = -10\cdot 2 + 21\cdot 3 - 12\cdot 5$$

$$= -20 + 63 - 60$$

$$= \boxed{-17}$$

alltså planet's ekvation

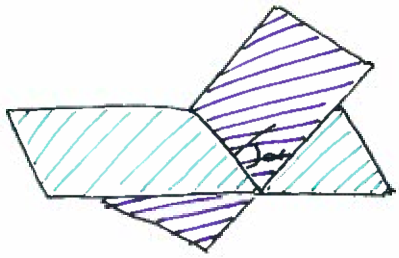
$$\boxed{-10x + 21y - 12z = -17}$$

övning 2.

ett plan π_1 har ekvation $3x + 4y + 5z = 10$

ett plan π_2 — " — $y - z = 2$

hur stor är vinkeln emellan dem? π_1 π_2



steg I.

vinkeln mellan π_1 och π_2 är lika stor som vinkeln mellan deras normaler.

$\bar{n}_1 = (3, 4, 5)$

$\bar{n}_2 = (0, 1, -1)$

$$\frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|} = \cos\alpha$$

$$\frac{-1}{10} = \cos\alpha$$

$$\langle \bar{n}_1, \bar{n}_2 \rangle = |\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|\cdot\cos\alpha$$

$$-0.1 = \cos\alpha$$

$$\langle (3,4,5), (0,1,-1) \rangle = -1$$

$$\alpha = \pm\arccos\left(-\frac{1}{10}\right) + 2\pi n$$

$$|\sqrt{3^2+4^2+5^2}|\cdot|\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}| = \sqrt{9+16+25}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{100} = 10$$

vinkeln mellan de π_1 π_2 är $\arccos\left(\frac{1}{10}\right)$

i $\mathbb{R}^3$ har vi punkter $P(\underbrace{x_0, y_0, z_0}_{\text{koordinater}})$

i $\mathbb{R}^3$ har vi vektorer $\overrightarrow{OP} = (x_0, y_0, z_0)$

$= x_0 e_1 + y_0 e_2 + z_0 e_3$

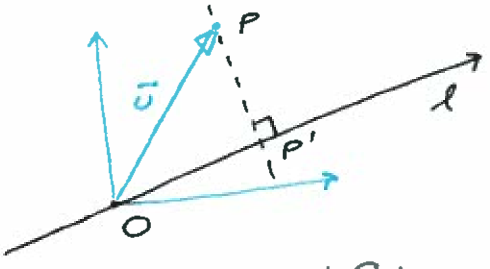
där e_1, e_2, e_3 bas-vektorer.

UPPGIFT 1

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ är linjen ℓ

$P(1,0,-1)$ är en pkt.

finn projektion av P på ℓ



skalärprodukt

↳ slags projektion

$$\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

riktningsvektor till ℓ är $v = (2,3,1)$

$\bar{u} = \overline{OP} = (1,0,-1)$

$(\bar{v}, \bar{u}) =$ "längd" (projektion av u på v) $\|v\|$

$(\bar{v}, \bar{u})\bar{v} =$ "vektorprojektion av u på v" $\|v\| \cdot \|u\|$

$$\text{proj}_v \bar{u} = \frac{(u,v)}{\|v\|^2} \cdot v$$

$$\text{proj}_v u = \frac{((1,0,-1),(2,3,1))}{(2^2+3^2+1^2)} \cdot (2,3,1)$$

$$= \frac{1}{14}(2,3,1)$$

$\overline{OP}' = \text{Proj}_v u$

$= \frac{1}{14}(2,3,1)$

så P' har koordinater

$$\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}, \frac{1}{14}\right)$$

UPPGIFT 2.

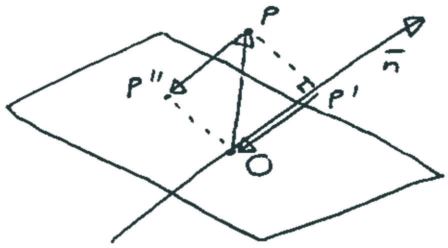
$2x + 3y + z = 0$

är ett plan π

$P(1,0,-1)$ är en punkt

finn projektion av P på π

$\bar{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$



projektionen parallell mot normalvektorn

kolla in uppgift 1 !

$\overline{OP'} = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}, \frac{1}{14}\right)$

$\overline{PP''} = \overline{P'O} = -\overline{OP} = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{14}, -\frac{1}{14}\right)$

$\overline{OP''} = \overline{OP} + PP'' = (1,0,-1) + \left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{14}, -\frac{1}{14}\right)$

$= \left(\frac{6}{7}, -\frac{3}{14}, -\frac{15}{14}\right)$

alltså projektion av P på planet är

$\left(\frac{6}{7}, -\frac{3}{14}, -\frac{15}{14}\right)$

vi har fått formel

$\mathrm{proj}_{\pi}(\overline{OP}) = \overline{OP} - \mathrm{Proj}_{\bar{n}}(\overline{OP}) = \overline{OP} - \frac{(\overline{OP}\,\bar{n})\bar{n}}{\|n\|^2}$

Vektorrum.

Delrum:

om X är ett vektorrum och $Y \subset X$ dvs. Y består av element (vektorer) ur X

om Y är vektorrum själv (m.a.p samma "+", "α." som X)

så kallas Y delrum i X.

ex. $V_1, V_2, V_3 \in V$

då är span$\{V_1, V_2, V_3\}$ ett delrum i V.

Sats.

delrum är en delmängd av vektorer, sådant att om $V_1, V_2 \in Y$ så $V_1 + V_2 \in Y$

och om $V \in Y$ och är ett tal så att

$a \cdot V \in Y$.

övning:

visa att span$(\{v_1 \ldots v_n\})$ är ett delrum i V (om $v_1 \ldots v_n \in V$ och V är ett vektorrum)

påminnelse:

en linjär avbildning är en funktion

$L : V \longrightarrow W$ sådan att

$$L(u+v) = L(u) + L(v)$$

samt

$$L(av) = a\,L(v)$$

Sats

varje linjär avbildning $L\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
har (entydig) avbildningsmatris A
sådant att om $v \in \mathbb{R}^n$ så $Av = L(v) \in \mathbb{R}^n$

skiss på bevis:

$$v = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n = (v_1, \ldots v_n)$$

betrakta

$$A = (L e_1, L e_2 \ldots L e_n)$$

vad blir

$$Av = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (L e_1 \ldots L e_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$= \Big(\underbrace{v_1 L(e_1) + v_2 L(e_2)}_{\text{dessa är vektorer}} + \ldots + v_n L(e_n)\Big)$$

$$= \big(L(v_1 e_1) + L(v_2 e_2) + \ldots + L(v_n e_n)\big)$$

$$= L(\underbrace{v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots v_n e_n}_{\text{dessa är ju koordinater på vektor } v})$$

dvs $= L(v)$ V.S.V.

$$P_u(v) = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}\cdot u = \frac{1\, u\cdot(\langle u,v\rangle)}{\|u\|^2}$$

$$= \frac{1}{\|u\|^2}\cdot u\,(u^T v) = \frac{1}{\|u\|^2}\,(u\cdot u^T)\cdot v$$

$$= \frac{1}{\|u\|^2}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}(u_1\, u_2\, u_3)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \frac{1}{\|u\|^2}\begin{pmatrix}u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3\\ u_2u_1 & u_2^2 & u_2u_3\\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3 \qquad 3} \times 1$

$P_u(\mathbb{R}^3) = \{tu : t \in \mathbb{R}\}$ är ett delrum i $\mathbb{R}^3$ (en-dimensionellt)

SATS.

värdemängd av en linjär avbildning är ett delrum i mål-vektorrum

dvs. om $L: V \longrightarrow W$ då är $L(V)$ ett delrum i W.

linjära avbildningar mellan $\mathbb{R}^n$ (och $\mathbb{R}^m$)

$\updownarrow$

matriser

$\updownarrow$

ekvationssystem

finna $\bar{v} : L(\bar{v}) = \bar{b}$

EKVATIONSSYSTEM.

olösbara

$L(\bar{v}) \neq b$

för alla v

entydig lösning

$L(\bar{v}) = b$

det finns entydigt $\bar{v}$

(samma som)

det finns L^{-1} (invers avbildning)

oändligt många lösningar

$\exists\, v_1 \neq v_2$:

$L(v_1) = L(v_2) = \bar{b}$

$\Downarrow$

$L(v_1 - v_2) = \bar{b} - \bar{b} = 0$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad L(t(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)) = \bar{0}$

VIKTIGT:

$\{\bar{v} : L(\bar{v}) = 0\}$ kallas $\boxed{\text{nollrum}}$

så att alla $\bar{v} = 0$

OBS:

nollrum är delrum i rum från vilket avbildning är definerat $(L : V \longrightarrow W)$

exempel.

om L är vinkelrät projektion på linjen $\{tu : t \in \mathbb{R}\}$

skalärprodukt

nollrummet är $\{v : \langle u, v \rangle = 0\}$

vinkelrät mot u plan

Sats.

om $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

då $\dim(N(L)) + \dim(L\mathbb{R}^n) = n$

$\dim(\text{Noll}(L)) + \dim(L(\mathbb{R}^n)) = n$

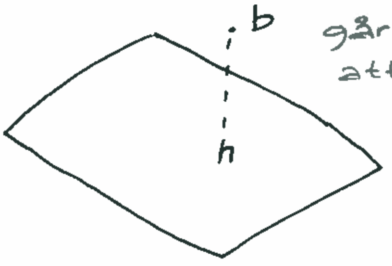
där noll(L) är nollrum

olösbara system

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ x + z = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (V_1 V_2 V_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{span}(\{V_1, V_2, V_3\})$$



går ej att lösa

MEN kan hitta den näst bästa

$Ax \in$ kolumnrum

$\exists\ \hat{b}$ ($\in$ kolumnrum) närmast till b

då $\Longrightarrow$

$b - \hat{b} \perp \text{span}(v_1 \ldots v_n)$

$\Updownarrow$

$b - \hat{b} \perp$ alla kolumner i matris A

$$A^T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix}(b - \hat{b}) = \begin{pmatrix} v_1^T(b-\hat{b}) \\ v_2^T(b-\hat{b}) \\ v_3^T(b-\hat{b}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{b} = Ax$ där x är "lösning"

dvs. $A^T(b - Ax) = \bar{0}$

$$A^T A x = A^T b$$

x är lösning av $A^T A x = A^T b$

i exemplet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T \quad 3\times 4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A \quad 4\times 3} \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}^{x}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

1. Linjära avbildningar
2. Minsta kvadratmetoden

exempel av minsta kvadrat metoden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

systemet ej lösbart. alltså vill hitta närmast lösning!

$$\Longrightarrow \underset{\substack{A^T \\ 3\times 4}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\substack{A \\ 4\times 3}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\substack{x \\ 3\times 1}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{\substack{A^T \\ 3\times 4}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\substack{b \\ 4\times 1}}{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \\ 6 & 8 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 28 \end{pmatrix}$$

om man använder minsta kvadratmetoden så finns alltid lösning!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 13 \\ 2 & 4 & 8 & 15 \\ 6 & 8 & 14 & 28 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \\ \sim \\ -3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 8 & 15 \\ 0 & -10 & -10 & -17 \\ 0 & -10 & -10 & -17 \end{array}\right) -1$$

för det är ju närmast avstånd

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{\underline{2}} & 6 & 8 & 15 \\ 0 & -\underline{\underline{10}} & -10 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 8 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 1.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{-6}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4.8 \\ 0 & 1 & 1 & 1.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

en fri variabel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2.4 \\ 0 & 1 & 1 & 1.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x + z = 2.4$

$y + z = 1.7$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.7 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

det som blir lösning är ju minsta avstånd.

1an + 2an blir 3an eller så

linj. kombo av de 2 andra

då det är en FRI VARIABEL → alltså linj. kombo.. deras span blir ej 3 dim uten 2 dim dvs de "tappar" ett plan varför $t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hat{y} = -1$
$z = 1$

alltså olika lösningar på ekvationen föreställer samma pkt i col (A)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{vad säger detta?}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

borisc2.csbnet.se

DETERMINANT

1. ett tal som tillskrivs till en kvadratisk matris
2. definition av determinant
3. räknelagar

$$\det(V_1\, V_i\, V_j\, V_n) = \det(V_1 \ldots V_i \ldots (V_j + aV_i)\, V_n)$$

samma för rader

$$\det(V_1 \ldots (aV_i) \ldots V_n) = a \cdot \det(V_1 \ldots V_i \ldots V_n)$$

samma för rader

sats (Cramers regel)

om A är kvadratisk matris $(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$
så finns det en entydig (tror vi) lösning av ekvationen $Ax = b$
och $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$ där $A_j = (V_1 \ldots b \ldots V_n)$ (plats j)

och $A = (V_1 \ldots V_n)$

och $\det(A) \neq 0$

lin. alg. huvudsats
$\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow$
det finns entydig lösning till $Ax = b$ för alla b

dvs. INVERTERBAR

Example: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

vi vill lösa
$Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kolla så det. inte är noll

byter rad.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

upper triangle!

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\left(1\cdot(-1)\cdot 1\right) = \boxed{1}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

får genom ta bort 1a kolumn & sätta in b där

$$\det(A_1) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot 1 = \boxed{-2}$$

kallas upper triangle då går uppåt mot rad!

$$x_1 = \frac{-2}{1} = -2$$

delat på determinanten

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{1} = 1 \qquad = -\left(1\cdot(-1)\cdot 1\right) = 1$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{2}{1} = 2 \qquad = 1\cdot 1\cdot 2 = 2$$

DVS. ett alternativt sätt att hitta lösningen

svar: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

kontroll

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bevis för $n=3$

låt x vara en lösning $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

då är

$$\overbrace{x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3}^{\text{linj. kombo'}} = b \quad \text{för att} \quad \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b$$

betrakta $A_1 = \begin{pmatrix} b & V_2 & V_3 \end{pmatrix}$

$$= \Big(\underbrace{\left(x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3 \right)}_{b} V_2 \; V_3 \Big)$$

$$\det(A_1) = \det\Big(\left(x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3 \right) \overbrace{V_2 \; V_3}^{b} \Big)$$

dessa är ju ej multiplicerade

$-x_2$ $\quad$ $-x_3$

byter ej rader eller så, behöver ej byta tecken!

$$= \det\left(x_1 V_1 \; V_2 \; V_3 \right)$$

$$= x_1 \det\left(V_1 \; V_2 \; V_3 \right) = x_1 \det(A)$$

vår ursprungliga matris.

likadant för A_2 A_3

CO-FAKTOR UTVECKLING.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{j1} \cdot A_{j1} + \dots\dots \; a_{jn} \cdot A_{jn}$$

$$\text{där} \quad A_{jk} = (-1)^{j+k} \det \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & a_{jk} & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

exempel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$] identity matrix

$$= \boxed{-1}$$

UDDUCKVCKU att $a_{k1}A_{j1} + \dots + a_{kn}A_{jn} = \underline{\underline{0}}$
$k \neq j$

dvs "tar bort" en del

DEF.

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ & & & \\ A_{n1} & \dots & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

adjungerad matris

$$(adj(A))^T A = \begin{pmatrix} det(A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & det(A) & 0\ 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dvs. $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} (adj(A))^T$

TILLÄMPNINGAR TILL DETERMINANT:

1. Cramers regel
2. Invers matris genom adjungerad matris
3. Geometrisk tolkning: volymändring

LINJÄR AVBILDNING:

- avbildning mellan 2 vektorrum
- uppfyller:

$F(ax) = aF(x)$
$F(x+y) = F(x) + F(y)$

dvs $F(ax + by) = aF(x) + bF(y)$

- direkt följd är att $F(0) = 0$
- exempel på ej linjära:

$x \longmapsto x^2$
$x \longmapsto x + 1$] för reella tal.

går ej genom noll !!

kan tros som rak linje but NO! kallas affin avbildning

sammansättning av linjär avbild. och transformation.
$f(x) = ax + b$

- exempel på linjära:
  - $x \longmapsto kx$ konstant
  - matris $m \times n$ def. avbild från n-dim till m-dim VEKTORRUM
  - derivering & integration
  - Laplace & Fouriertransformation

DEF. co-faktor matris till $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix}$

är matris

$$co(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & & A_{1n} \\ A_{21} & & \\ \vdots & & \\ A_{n1} & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

skriv
sign. TMA660
i förslagslåda

DEF.

$$adj(A) = (co(A))^T$$

exempel:

$\boxed{\text{Inversmatris}}$ med cofaktor / adjungerad matris

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hitta dess invers

nu ej gångra m. t.ex 2,3
för ej utveckl. av det.

$A_{11} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-1) = 1$

$A_{13} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (-1) = -1$

$A_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

iom 1+1 t.ex.

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$A_{22} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

2+2=4
alltså 1

$A_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$

2+3=5
alltså −1

$A_{31} = (1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{33} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$co(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

den adjungerade matrisen är alltså transponat till co (A)

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

nu kan vi utnyttja alla cofaktorer $\Rightarrow$ räkna determinant

$$det(A) = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}$$

utmed första column t.ex

$$= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = \boxed{-1}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)}} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

alltså en formel för A invers

kan göra kontroll

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

identitets-matris !!

detta blir I måste ju vara om A invertible och alltså har invers.

DETERMINANTER:

1. $\det(A) \neq 0 \iff$ radvektorer / kolumnvektorer av A är linjärt oberoende.

   ty $\det(A) = \det(A^T)$

2. kryssprodukt (i $\mathbb{R}^3$)

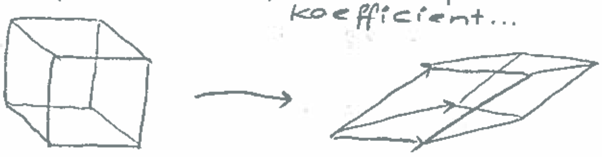
3. $\det(A) \neq 0 \iff$ system $Ax = b$ är lösbar för alla b, Cramers regel

4. $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}$ $\left(\det(A) \neq 0 \iff A \text{ är inverterbar}\right)$

5. A är avbildningsmatris till $L \Rightarrow$

   $\operatorname{Vol}(L(T)) = |\det(A)| \cdot \operatorname{vol}(T)$ där T är en kropp (i 3D)

   koefficient...



KOMPLEXA TAL.

$2 + x = 1$ negativa tal

$1 + x = 1$ talet 0 (noll)

$2x = 1$ bråk, rationella tal $(p, q) \sim (np, nq)$

$x^2 = 2$ reella tal irrationella

$x^2 = -1$ PROBLEM! då x^2 alltid $\oplus$

ej reell lösning

komplexa tal

vi börjar från reella tal $\mathbb{R}$

betraktar alla möjliga par $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\mathbb{Z}$

vi definerar a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

b) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

OBS: $(0, 1)(0, 1) = (0, 1)^2 = (-1, 0)$

vi identifierar $\underset{\mathbb{C}}{(a, 0)} \longleftrightarrow \underset{\mathbb{R}}{a}$ så $((0, 1))^2 = -1$

på den imaginära axeln!

vi inför bet. $i = (0, 1)$ (alltså $i^2 = -1$)

observera att med identifieringar ovan har vi:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b\overset{\text{dvs } i}{(0, 1)}$$

$$(a, 0) \to a$$

$$= a + (b, 0)(0, 1) \qquad \Big] \; a + bi$$

$$(b, 0) \to b$$

associativt, distributivt osv.

addition & multiplikation. vanligast: $\boxed{a + ib}$

exempel.

$$(2 + i3)(4 + i) = 2 \cdot (4 + i) + i3(4 + i)$$

$$= 8 + 2i + 12i + 3 \cdot \overbrace{i^2}^{-1}$$

$$= 8 + 14i - 3 \overset{\text{dvs}}{\Longrightarrow} \boxed{5 + 14i}$$

imaginär delen

real delen

nu kan vi addera, subtrahera, och multiplicera komplexa tal.

Def.

om $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ kallas talet $x - iy$ för "konjugat till z"

betecknas:

$$\boxed{\bar{z} = x - iy}$$

OBS:

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + iyx - iyx - (iy)^2$$
$$= x^2 - (i^2 y^2)$$
$$= \underbrace{\boxed{x^2 + y^2}}_{\in \mathbb{R}} \geq 0$$

och reellt!!

Def. absolut belopp av

$z = x + iy$ är $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x, y \in \mathbb{R}$

OBS: $|z| = \sqrt{\underbrace{z \cdot \bar{z}}}$

produkten av konjugaten.

ÖVNING: $|z|$ uppfyller

1. $|z| \geq 0$
2. $|z| = 0 \implies z = 0$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

   triangel olikhet
4. $\forall a \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}$

   $|az| = |a| \cdot |z|$

   som reellt tal
5. $|1| = 1$

   även som $\mathbb{C}$

   gäller då med

   I guess

vad betyder $\frac{z}{w}$! (där z och w är komplexa tal)

$u = \frac{z}{w} \iff u \cdot w = z$

låt $u \cdot w = z$, då blir $(u \cdot w) \cdot \bar{w} = z \cdot \bar{w}$ likhet fortfarande

$u \cdot (w \cdot \bar{w}) = z \cdot \bar{w}$ associativ lag i multiplication

samma som $|w| = \sqrt{w \cdot \bar{w}} \Rightarrow |w|^2 = w \cdot \bar{w}$

alltså:

$u \cdot |w|^2 = z \cdot \bar{w}$ gångrar m. $\frac{1}{|w|^2}$

$u = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$ DVS $u = \frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \boxed{\frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}}$ ✓ reellt tal

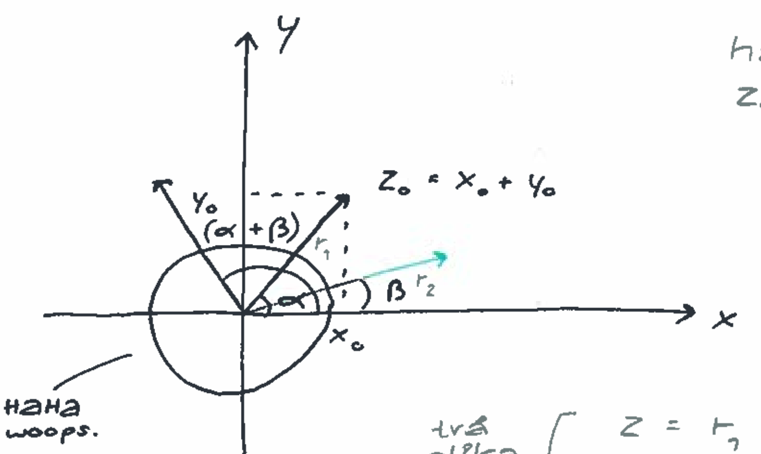
OBS: $w \neq 0$ iom då ej $\bar{w}$ noll heller. vill ej ha noll under

NU kan vi dela med komplexa tal! har funnit reell nämnare

kontrollera:

$u \cdot w = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} \cdot w = \frac{z \cdot \bar{w} \cdot w}{|w|^2} = z \cdot \frac{|w|^2}{|w|^2} = z$

GRAFISK BILD AV KOMPLEXA TAL.



här $z_0 = \underbrace{|z_0|}_{} \cdot \underbrace{(\cos\alpha + \sin\alpha)}_{}$ delta i enhetscirkeln. ger x y håll. och så gånge längd (abs) av z.

polär form

$= r(\underbrace{\cos\alpha}_{\text{realdelen}} + \underbrace{i\sin\alpha}_{\text{är ju imaginärdel i y-ledet}})$

två olika pkt'r: $z = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ och

$w = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$

$z \cdot w = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta$

$- \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$+ i(\sin\alpha \cdot \cos\beta$

$+ \sin\beta \cdot \cos\alpha)$

$\boxed{= r_1 \cdot r_2 (\cos(\alpha+\beta) + i(\sin(\alpha+\beta)))}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

need a very special right-hand side we have!!

not every b has a solution!

do I get a subspace from the x's?

NOPE since ... zero vector doesn't even solve solution.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bunch of solutions

BUT it's a plane or line that doesn't go through the origin!!

SO NO SUBSPACE.

WHAT'S IN THE SUBSPACE:

for example nullspace

1. give a few vectors, take combo's (fill it out)
2. or give a few equations (requires certain x)

BOTH produces sub spaces.

i bonusuppgift : MatLab - del
skapa film ... sekvens av bilder

drawnow + refreshdata
eller plot.

bevis på sista uppgift ska lämnas 15/10

$z = r(\cos\alpha + \sin\alpha)$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha+\beta) + \underline{\underline{i}}\sin(\alpha+\beta))$ (*)

$z_1 = r_1(\cos\alpha + \underline{\underline{i}}\sin\alpha)$

$z_2 = r_2(\cos\beta + \underline{\underline{i}}\sin\beta$

vi kan alltså skriva

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i\sin y)$$

(*) på exponentialform

$$e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} = \left(e^{x_1} \cdot (\cos y_1 + i\sin y_1)\right)\left(e^{x_2} \cdot (\cos y_2 + i\sin y_2)\right)$$

dvs de där formlerna!

$$= e^{x_1} \cdot e^{x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2))$$

$$= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2))$$

$$\boxed{= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}}$$

ALLTSÅ exponentlag $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

gäller

$\left[(e^a)^b = e^{a \cdot b} \right.$

NEJ vi använder ej det nu.$\left.\right]$

om $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $\quad r = e^x$

blir $\quad x = \ln r$

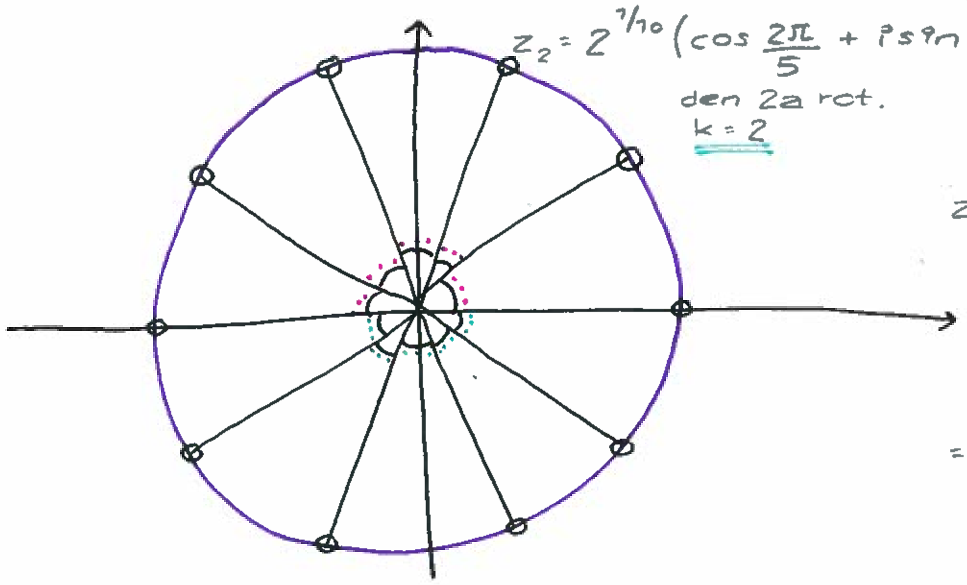
$\ln(z) = \ln(r) + i(\alpha + 2\pi k)$

ej entydigt värde

$z^{10} = 2 \implies 10 \ln z = \ln 2 \qquad e^x \cdot e^{iy}$

$$\ln z = \frac{\ln 2}{10} + i\frac{2\pi k}{10}$$

$$z = e^{\ln z} = e^{\frac{\ln 2}{10} + i\frac{2\pi k}{10}} = 2^{\frac{1}{10}}\left(\cos\frac{2\pi k}{10} + i\sin\frac{2\pi k}{10}\right)$$



$z_2 = 2^{1/10}\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

den 2a rot.

$k = 2$

$z_1^{10} = (2^{1/10})^{10}$ vid $\cos 4\pi$

$\cdot\left(\cos\frac{2\pi\cdot 10}{5} + i\sin\frac{2\pi\cdot 10}{5}\right)$ vid $\sin 4\pi$

$= 2\cdot(1 + i0) = 2$

KOMPLEXA RÖTTER FÖR ETT ALLMÄNT POLYNOM.

$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$

exempel

$p(z) = 2 + iz + (1+i)z^2 + (2+3i)z^3$

POLYNOM DIVISION.

$$\begin{array}{l} \quad x^2 + 3x + 4 \\ \hline x^3 + 2x^2 + x + 3 \quad \big| \; x - 1 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline \quad 3x^2 + x + 3 \\ -(3x^2 - 3x) \\ \hline \quad 4x + 3 \\ -(4x - 4) \\ \hline \quad 7 \end{array}$$

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 3}{x - 1} = x^2 + 3x + 4 + \frac{7}{x - 1}$$

$$x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2 + 3x + 4)(x - 1) + 7$$

Sats:

grad $Q \geq 1$

för varje par av polynom $P(z)$ och $Q(z)$

finns det $T(z)$ och $R(z)$.

sådana att $P(z) = T(z)Q(z) + R(z)$

och $\text{grad}(R) < \text{grad}(Q)$

FÖLJESATS:

om a är en rot till $P(z)$ så finns det

$T(z)$: $P(z) = T(z)(z-a)$

(och $\text{grad}(T) = \text{grad}(P) - 1$)

Bevis. satsen om polynom division (med $Q = (x-a)$)

ger oss att $P(z) = T(z)(z-a) + R(z)$

där $\text{grad}(R) < \text{grad}(z-a) = 1$

så $\text{grad}(R) = 0 \implies R$ är konstant.

sätt in $z = a$

$P(a) = T(a)\underbrace{(a-a)}_{0} + R$ $\qquad P(a) = R$ ← men här 0, tom a är rot

$P(a) = 0$ för att a är en rot av P

så $R = 0$ $\qquad P(z) = T(z)(z-a)$

behöver ej detta.

exempel.

$$x^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x^2 + ix + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$$

$$x^4 + 1 \quad \Big| \quad x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$-\left(x^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x^3\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x^3 + 1$$

$$-\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x^3 - ix^2\right)$$

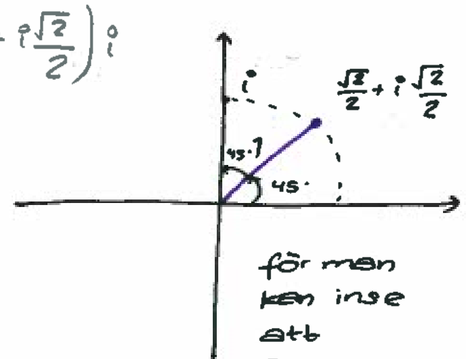
$$ix^2 + 1$$

$$-\left(ix^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)ix\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)ix + 1 \qquad = 1 + i^2 = 0$$

dvs ingen rest!

$$-\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)ix - i^2\right)$$



för man kan inse att $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ är rot.

OM ett polynom P har rötterna $x_1, \dots, x_n$ och $\text{grad}(P) = n$ då $\Longrightarrow P(z) = a_n(z - x_1)\dots(z - x_n)$

kan vara 2 ggr

polynom med reella koefficienter

SATS. om $P(z)$ är ett polynom med reella koefficienter och z är en rot till P $\xrightarrow{\text{då}}$ är $\bar{z}$ också en rot till P

BEVIS. vi vet att $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$

(z är en rot)

ta konjugat på båda sidor av likhet:

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$$\bar{a}_n \cdot (\bar{z})^n + \overline{a_{n-1}} (\bar{z})^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0 = 0$$

konjugat $\overline{x + iy} = x - iy$

$a_n \dots a_0 \in \mathbb{R}$

så $\bar{a}_n = a_n \quad \dots \quad \bar{a}_0 = a_0$

vi kan strunta i konjugat koefficienter

$$P(\bar{z}) = a_n \cdot (\bar{z})^n + \dots + a_0 = 0$$

så $P(\bar{z}) = 0$ dvs $\bar{z}$ är också en rot.

SLUTSATS:

för polynomer med reella koefficienter kommer icke-reella rötter i par.

låt $P(z)$ ha reella koefficienter och en rot $z = x + iy \ (y \neq 0)$

då vet vi att

$$P(z) = Q(z)(z - (x+iy))\underbrace{(z - (x - iy))}_{\text{även konjugat.}}$$

$$= Q(z)\underbrace{\left(z^2 - (2x)z + (x^2 + y^2)\right)}$$

Q har också reella koefficienter. $\Longleftarrow$ har reella koefficienter varje polynom med reella koefficienter går att skriva som produkt av polynom med reella koefficienter av grad ≤ 2 där termer av andra grad inte har några reella rötter

091006.

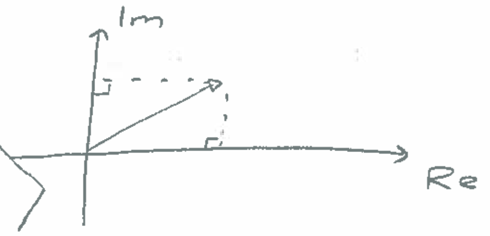
Appendix A. 5 b)

beräkna $\left|\dfrac{3+i}{4+3i}\right|$

kan förlänga m. konjugat med

avståndet

$$\left|\frac{3+i}{4+3i}\right| = \frac{|3+i|}{|4+3i|}$$



$$= \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

längd från (0,0) till

förhållandet mellan...

A. 34 c)

beräkna e^z

$$z = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$$

$$e^{\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{1}{2}\ln 2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\ln\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{1+i}$$

REAL DEL bestämmer storlek

IMAGINÄR DEL bestämmer längd riktning

$$z = \underbrace{\frac{1}{2}\ln 2}_{\text{REAL}} + \underbrace{i\frac{\pi}{4}}_{\text{IMAG.}}$$

Del 1. exempel finns på Maple TA
Del 2.
a) teori frågor ur listan
b) tillämpning på teori
c) lite svårare uppgift
d) svår räkneuppgift

I Ekvationssystem Del 1.
Gauss radreducering, pivot element, fri variabel.

II Vektorrum
- Defitition $(V, "+", "a\cdot")$
  V mängd av vektorer, "+" är operation
  $$V \times V \longrightarrow V$$
  $$(u, v) \longrightarrow u + v$$
  som uppfyller de egenskaper.
  finns def. i 4.1

- Linjära avbildningar
  fkt'er från ett vektor rum till ett vektorrum
  som uppfyller
  a) $L(u+v) = L(u) + L(v) \quad \forall u, v \in V$
  b) $L(au) = a L(u) \quad \forall a \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})\ u \in V$
- Linjärt oberoende/beroende system av vektorer
- Linjära kombinationer /span
  av ett span av vektorer
- Bas
  Sats om antal av vektorer i en bas.
  Def. Dimension av ett vektorrum är antal vektorer i dess bas.
  Sats. I ett vektorrum av dim. n,
  mer än n vektorer är lin. ber.
  mindre än n vektorer spänner inte V

just vektorrummet! dim av matris är annat

Urd. Koordinater av en vektor m.a.p en bas.

ex.

$$2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\6\\3\end{pmatrix}$$

$e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad V$

vektor $\begin{pmatrix}7\\6\\3\end{pmatrix}$ har koordinater $\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ ju

base $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

Om ett vektorrum V har dimension n finns det linjär bijektion mellan V och $\mathbb{R}^n$.

Det betyder att allt vi visar om $\mathbb{R}^n$ gäller för n-dimensionella vektorrum.

n-dimensionellt vektorrum + bas

$\Updownarrow$ (koordinater)

$\mathbb{R}^n$ + standard bas

I $\mathbb{R}^n$ + standard bas (V och en bas)

Linjär avbildning $\Longleftrightarrow$ matris

ex. 1. $T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (kunna skriva avbildningsmatris)

$T(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

sats om matrisen av en linjär avbildning (del 2)

$T(x) = Ax$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

ex. 2.

om $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, bend left, "T"] & \mathbb{R}^2 \arrow[l, bend left, "T^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

inversen.

vi kan hitta matrisen för

$T^{-1} \longleftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ldots$ (*)

OBS!

sammansättningar av linjära avbildningar motsvarar multiplikation av matriser.

(*)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$A = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

Linjär avbildning

Matris

nollrum $\{x : T(x) = 0\}$ $\qquad$ $\{x : Ax = 0\}$ nollrum

värderum $T(V)$ $\qquad$ kolumnrum

rank(T) = dim $T(V)$ $\qquad$ rank(A) = dim.

dess värderum

Gauss reducera och räkna pivot element

Linjär algebra's huvudsats.

CHECK IT OUT i BOKEN!!!

Elementära radreducerings operationer motsvarar till multiplicering med en elementär matris.

Låt $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$

Betrakta $S_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ 0 & & & 1 & & 0 \\ & & & & 1 & \\ & & 1 & & 0 & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\uparrow i \qquad \uparrow j$

$S_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$

RAD BYTE EGENTLIGEN.

Betrakta $S_{ij} A = S_{ij}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_i \\ R_j \\ R_n \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_j \\ R_i \\ R_n \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}$

$S_{j,a} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & a & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$

Betrakta $S_{j,a} A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & a & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_j \\ R_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} R_1 \\ aR_j \\ R_n \end{pmatrix}$ RAD MULTIPLICERING MED ETT TAL.

$$S_{i,j,a} = \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & a & & & 1 \end{pmatrix}$$

Betrakta

$$S_{i,j,a} A = \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ a & & 1 \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_i \\ R_j \\ R_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ aR_1 + R_j \\ R_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}$$

RADOPERATION till vänster.

COLUMNOPERATION till höger.

dvs. vi lägger till en annan rad multiplicerad m. talet a till R_j

DETERMINANTER.

determinant ≈ "volym" — trippelskalärprodukt.

räkneregler:

1) multiplicera rad/kolumn med ett tal
2) byt plats på två rader/kolumner
   determinant byter TECKEN !!!
3) lägga till en multipel på en rad/kolumn till en annan rad/kolumn.
4)
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \dots + a_{jn}A_{jn}$$

$\forall j$ cofaktor utveckling.

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + \dots a_{nj}A_{nj}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

5) Cramers regel

byter ut ex. rad 1 om x_1 mot b, sen det. av det!!

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \quad \text{där} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

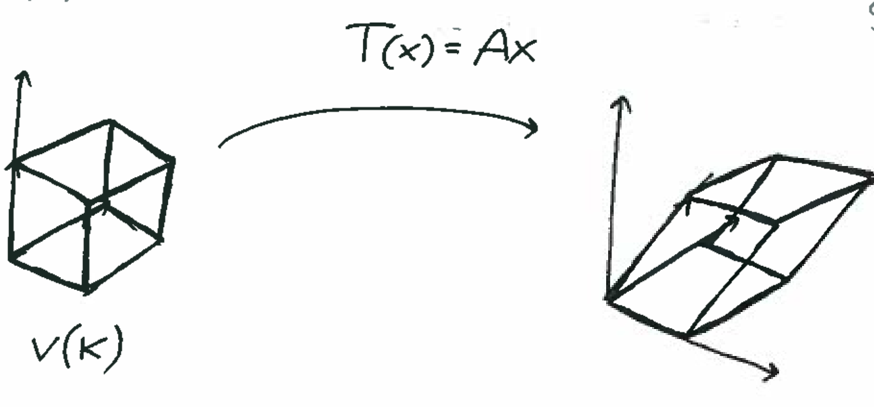
$Ax = b$

$\det(A) \neq 0$

6) inversmatris genom co-factor matris / adjungerade matriser

Läs def. i boken!!

gör alla till cofaktorer (utan koeff. men med tecken) sen transponat ⇨ GER adj A



$$V(T(K)) = \det(A)V(K)$$

vektorrum + skalarprodukt

DEF. dvs ett tal till skillnad från **KRYSSPRODUKT**

skalärprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$

har följande egenskaper

1) $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$

2) $\langle cu, v\rangle = c\langle u, v\rangle$

3) $\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$

4) $\langle u, cv\rangle = c\langle u, v\rangle$ för $\mathbb{R}$

$\tilde{4}$) $\langle u, cv\rangle = \overset{\text{konjugat}}{\bar{c}}\langle u, v\rangle$ för $\mathbb{C}$

5) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ för $\mathbb{R}$

$\tilde{5}$) $\langle u, v\rangle = \overset{\text{konjugat}}{\overline{\langle v, u\rangle}}$ för $\mathbb{C}$

6) $\langle u, u\rangle \geq 0$

7) $\langle u, u\rangle = 0$
$u = 0$

DEF.

i $\mathbb{R}^n$ $\langle u, v\rangle := u_1 v_1 + \dots u_n v_n$ där $u = (u_1 \dots u_n)$
$v = (v_1 \dots v_n)$

i $\mathbb{C}^n$ $\langle u, v\rangle := u_1 \overline{v_1} + \dots u_n \overline{v_n}$

EGENSKAPER.

Cauchy-Schwartz olikhet $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \overset{\text{gånger}}{\cdot} \|v\|$

triangelolikhet $\underbrace{\|u + v\|}_{\text{SITT DJUPT! FFS!}} \leq \|u\| + \|v\|$

DEF.

$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$

dotproduct/scalar produkt — VS cross product perpendicular!!

egenskap $\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha$

geometrisk betydelse av norm är längd
$\|\ \ \|$

7) geometrisk betydelse av skalär produkt

$$\text{Proj}_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

kunna? del 1

kunna bevisa? del 2

8) minsta kvadratmetoden

$A^TAx = A^Tb$

(sannolikt i del 1. annars i del 2.)

$L(1,2,3,4) = 5$

⋮

$L(x) = a_1x_1 + \dots a_4x_4$

$$\begin{cases} a_1 1 + \dots + a_4 4 = 5 \\ \vdots \end{cases}$$

9) polynom (hitta rötter, skriva som produkt, polynomdivision)

10) komplexa tal (operationer, polär form, exponent, konjugat)

11) geometriska tillämpningar ($\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$, kryssprodukt, ekvationer av linjer, plan, projektion)

EXEMPEL PÅ MINSTA KVADRAT METODEN.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{data} \\ \text{parameter}}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{data} \\ \text{resultat}}}$$

anta att resultat beror linjärt på parameter

hitta formeln som bäst passar data.

$$L(P_1, P_2, P_3) = r$$

$$\underbrace{a\underbrace{P_1}_{\substack{\text{data} \\ \text{är känt}}} + bP_2 + cP_3}$$

om system lösbart så blir det ju samma. så behöver ej kolla

vi ska räkna ut a, b, c.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{metoden}]{\text{minsta kvadrat}}$$

vi använder den

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{x} =$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}}_{A^TA} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}}_{A^Tb}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 11 \\ 2 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 13/8 \\ 0 & 1 & 0 & 7/8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 7/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/8 \end{array}\right)$$

041012

SATS. om A och B är kvadratiska matriser $n \times n$ $\Rightarrow$ $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Bevis

fall 1. $\det A = 0$

kolumnerna är linjärt beroende, ej inverterbar matris. bilden på avbildn. $T(A)$ som motsvarar A är ej hela R^n (har dimension mindre än n)

betrakta $A \cdot B$
den motsvarar till avbildning $T_{AB} = T_A \circ T_B$
alltså bilden på T_{AB} har ej dimension större än bilden på T_A.
så bilden på T_{AB} har dimension MINDRE än n, så $\det(AB) = 0$

OBSERVERA att $\det(AB) = 0 = 0 \cdot \det(B)$
$= \det(A) \cdot \det(B)$

fall 2. $\det B = 0$
Likadant. bilden på T_B har dim. MINDRE än n.
linjära avbildningar ökar aldrig dimension.
så bilden av $T_{AB} = T_A \circ T_B$ har dimension mindre än n, dvs. $\det(AB) = 0$
så $\det(AB) = 0 = \det A \cdot 0 = \det A \cdot \det B$

fall 3. om $\det A \neq 0$
låt E vara elementär matris (motsvarar till elementär radreduktion)
om E byter rad, då är $\boxed{\det(EC) = -\det(C)}$ för alla C (matriser $m \times n$)
om E gångrar en rad m. talet a då är $\boxed{\det(EC) = a \cdot \det C}$ $\forall C$
om E lägger till en multipel av en rad till en annan rad så $\boxed{\det(EC) = \det(C)}$

betrakta nu

$$\det(AB) \overset{\text{dessa är lika}}{=} \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(E(AB)) = \det(EA) \cdot \det(B)$$

$$\det(E_k \dots E_1(AB)) = \det(E_k \dots E_1 A) \det B$$

om vi har valt $\{E_j\}$ så att $\underbrace{E_k \dots E_1 A}_{\text{inverterbar}} = I$ radreducerar alltså A till I !

så $\underbrace{\det(E_k \dots E_1(AB))}_{VL} = \det((\underbrace{E_k \dots E_1 A}_{I}) B)$

$$= \det IB = \boxed{\det B}$$

$$\det(E_k \dots E_1 A) \cdot \det B = \det I \cdot \det B$$

$$= \underbrace{\boxed{\det B}}_{HL}$$

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Lemma:

om kolonnvektorer är linjärt beroende så $\det(A) = 0$

Bevis. kolonnvektorer är linjärt beroende

$\Longleftrightarrow \exists j : V_j = a_1 V_1 + \dots a_{j-1} V_{j-1}$ där $A = (V_1 \dots V_n)$

$\equiv$ kombinationer

$$\det(A) = \det(V_1 \dots V_j \dots V_n) = \det(V_1 \dots V_{j-1} (a_1 V_1 + \dots a_{j-1} V_{j-1}) \dots V_n)$$

$-a_1$ $-a_{j-1}$

kolonn radreducering

$$= \det(V_1 \dots \underbrace{(\quad)}_{0} \dots V_n)$$

Def. $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in P_3} p(\sigma) \cdot a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot a_{3\sigma_3}$

summan av alla möjliga permutationer

där P_3 är permutationer av tre element

$$p(\sigma) = (-1)^{\#\left\{(i,j) \,:\, \begin{matrix} i<j \\ \sigma_1 > \sigma_2 \end{matrix}\right\}}$$

exempel

$\sigma = (2,1,3)$

$\#\{(i,j) : \ldots\} = \#\{(1,2)\} = 1$

$p(\sigma) = (-1)^1 = -1$

egenskap 1.

om vi gångrar en rad (eller en kolonn) med ett tal a så => gångras determinant m. samma tal.

Bevis.

titta på definition.

i varje term finns exakt 1 element från en given rad/kolonn, dvs ett element gångrat m. a.

dvs. varje term i summan gångras med a.

distributiv lag

egenskap 2.

om vi byter två närliggande rader så byts tecken på determinant.

Bevis. betrakta en permutation $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

om vi byter 2 "termer" i den, t. ex.

$\sigma_1 \longleftrightarrow \sigma_2$

alla "felriktade" par bevaras utom det som har bytt plats. det par som bytte blev i rätt ordning om det innan var fel, och tvärtom.

dvs. om $\sigma \to \tilde{\sigma}$ så $p(\sigma) = -p(\tilde{\sigma})$

se def.

alla termer är samma, men alla byter tecken.

egenskap 2.

om två rad/kolonn^{er} i en matris A är samma
$\Longrightarrow$ det $A = 0$

Bevis. induktion i avstånd mellan lika rader.

basen: avståndet är 1 dvs raderna är närliggande. byt rader, så får man $\tilde{A} = A$.

$\det(\tilde{A}) = -\det(A)$ dvs $x = -x \Longrightarrow x = 0$ — avstånd blir då -1

$\Updownarrow$

$\det(A)$

så $\det(A) = 0$

STEG. byt rader så minskar avstånd.
$0 = -0$

egenskap 3.

om en rad/kolonn är summa av två vektorer

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ (d+e) & (f+h) & (g+m) \\ r & s & t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ r & s & t \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & h & m \\ r & s & t \end{pmatrix}$$

så är determinant summa av determinanter av matriser som använder motsvarande vektorer.

Bevis.
titta på def, öppna parenteser, samla termer

egenskap $\tilde{3}$.

om man lägger till en multipel av en rad/kolonn till en annan rad/kolonn, så ändras ej det. A.

Bevis.

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d+x\cdot a & f+x\cdot b & g+x\cdot c \\ r & s & t \end{pmatrix} \Longrightarrow \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ r & s & t \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ xa & xb & xc \\ r & s & t \end{pmatrix}$$

$$① \quad x\det\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ r & s & t \end{pmatrix}}_{\text{linj. beroende så noll!!!}} = x\cdot 0 = 0$$

varje sida projiceras...

TIPS för MatLab.
skriv allt på matris-språk

enklast att projicera m.
rektangel. liksidig tetraeder

i 3 dim. kan räkna explicit
n = en normal vektor vart ligger deras hörn
$\cos\alpha$,
$\sin\alpha\cos\beta$,

vinkel mellan plan — multipliceras med det!!

$\cos\theta$

a) constructing normal equ. $A^TAx = A^Tb$

b) solving for $\hat{x}$ $\qquad x = (A^TA)^{-1}A^Tb$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \underset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}} \underset{4\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}} = \overset{A^TA}{\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix}}$$

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \overset{A^Tb}{\begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

want this in a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 42 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 36 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right) \qquad \hat{x} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

in b)

6.55. all least square for $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

hence $A^TAx = A^Tb$

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \overset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 14 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \cdot(-2) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & -2 & -4 & -24 \\ 0 & -4 & -2 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right) \cdot(-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

RUMMET $\mathbb{R}^2$

linjer  riktningsvektor

linjer  normalvektor

linjer $\dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{x-x_0}{a}$

riktningsvektor

linjen gnm (x_0, y_0) m. riktningsvektor (a,b)

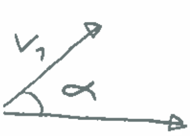
ÄVEN:

$ax+by=c$ bestäms om sätter in pkt på linjen

en linje m. normalvektor (a,b)

låt v_1, v_2 vara vektorer. vinkeln mellan vektorerna är bestämt av

$$v_1 \cdot v_2 = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cos\alpha$$

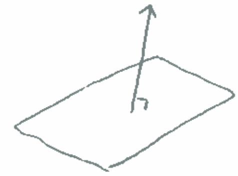


$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

längd av en vektor

RUMMET $\mathbb{R}^3$

linjer "dim." 1  riktn. vektor

plan "co-dim" 1  normal vektor

linjer

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

riktningsvektor

linjen gnm pkt (x_0, y_0, z_0) med riktn. vektor (a,b,c)

$ax+by+cz=d$

ett plan med normalvektor (a,b,c)

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$

$$\cos\alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \|v_2\|}$$

$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

längd av en vektor

om $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ dvs $v_1 \cdot v_2$ är $v_1 \perp v_2$

Samma sak:

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ om och endast om $v_1 \perp v_2$

PÅMINNELSE

- normalform uppstår som

$$\langle (x-x_0, y-y_0, z-z_0), (a, b, c) \rangle = 0$$

- man kan "flytta på origo" i koordinatplan/rum
  koordinater $\neq$ vektorer

$$P \sim \overrightarrow{OP}$$

- snitt av linjer/plan m. givna ekvationer är lösning till ekvationssystem
  ALLTSÅ: en linje som går igenom 2 plan, blir snitt av plan

$\mathbb{R}^2$: om $u, v \in \mathbb{R}^2$ $\quad u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

det. A av matris
arean som spänns av u och v

parallellogram

ligger i planet

$\{ tu + sv \mid 0 \leq t, s \leq 1 \}$

$\mathbb{R}^3$: om $u, v, w \in \mathbb{R}^3$

$u = (u_1, u_2, u_3)$
$v = (v_1, v_2, v_3)$
$w = (w_1, w_2, w_3)$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

(beteckning för)

det A. av matris = volym som spänns av u, v, w

om $u, v \in \mathbb{R}^3$ $\quad u = (u_1, u_2, u_3)$

$v = (v_1, v_2, v_3)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \overset{\text{kryss produkt}}{=} u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3$$

$u \times v \perp u$ och $u \times v \perp v$

dvs. ortogonal till båda faktorer!

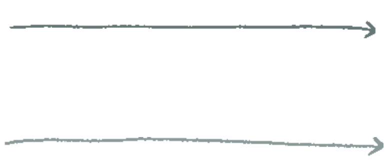
$|u \times v|$ = arean som "spänns" av u och v

$u \times v = - v \times u$

$$\text{proj}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v$$

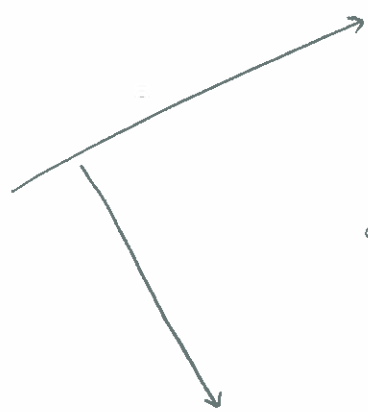
projektion av u på riktning av v

FALL 1.



plan parallellt mot båda linjer.

FALL 2.



$v_1 \parallel v_2$??

3 sätt att kolla om parallella

NR 1.

$\cos \alpha = \pm 1$

dvs

$|\langle v_1, v_2 \rangle| = |v_1||v_2|$

NR 2.

KRYSSPRODUKT!!

$v_1 \times v_2 = 0$

NR 3.

$v_1 = v_2 t$

eller $v_2 = 0$

avståndet mellan linjer är samma som avståndet mellan planen som innehåller motsvarande linjer och är PARALLELLA med båda.

STEG 1.

vi hittar NORMAL till planen som kryssprodukt av 2 riktningsvektorer

STEG 2.

dvs. sätt in x,y,z finn d! får 2 parallella plan.

tar godtycklig pkt på varje linje och skriv ekvation av planet gnm den m. normalvektor ur steg 1.

STEG 3.

$\pi_1 : ax+by+cz=d_1$

$\pi_2 : ax+by+cz=d_2$

tar en godtycklig pkt (x_0, y_0, z_0) från π_2 och räkna avstånd till π_1

t.ex. $$\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

kan ta projektion... på normal!

ELLER

STEG 2'

ta en pkt på l_1 och en pkt på linjen l_2 beräkna deras projektioner på normalvektor.

STEG 3'

räkna längden på skillnaden.

LÖSNING:

$$l_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad l_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

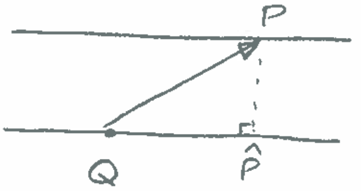
$$d(t,s) = \left\| \begin{matrix} x_0 - x_1 + r_1 t - q_1 s \\ y_0 - y_1 + r_2 t - q_2 s \\ z_0 - z_1 + r_3 t - q_3 s \end{matrix} \right\| \longrightarrow \min$$

FALL 1.

ta en pkt P på ℓ_1 och Q på ℓ_2

$\overline{Q\hat{P}} = \mathrm{Proj}_{\bar{F}}\, \overline{QP}$

$\overline{\hat{P}P} = \overline{QP} - \overline{Q\hat{P}}$



avståndet är $\|\overline{P\hat{P}}\|$

i detta fall är linjerna parallella.

1. Ekvationssystem
2. Vektorer, linjära kombinationer, beroende/oberoende system
3. Avbildningsmatriser
4. Invers matris
5. Determinant
6. Minsta kvadratmetod
7. Räkna i $\mathbb{R}^3$
8. Polynom
9. Skalärprodukt, kryssprodukt

DEL 1.

KOM IHÅG: skriv t.ex. "har oändligt många lösn. som kan skrivas som $(\ )t$ där $t \in \mathbb{R}$"

GÄRNA LITE ORD

det $A \neq 0$ alltså matris är inverterbar.

visa: pivot element, fria variabler!! t.ex

en lösning $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t$] ej delrum ty ej genom noll.

dvs. formulera satser korrekt, kunna bevis

motivera ditt svar, love

DEL 2.

bevis med det:
1. Geometriska vektorer (Euklidisk)
2. Komplexa tal

$Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A x^1 = A^T b$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}}_{A^T b}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 14 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \\ -2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & -2 & -4 & -24 \\ 0 & -4 & -2 & -18 \end{array}\right)$$

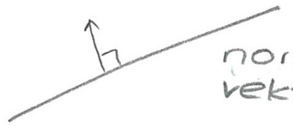
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

071014

RUMMET $\mathbb{R}^2$

linjer  riktnings vektor

linjer  normal vektor

linjer $\frac{y-y_0}{b} = \frac{x-x_0}{a}$

$\underbrace{b}_{\text{rikt.}}$ $\underbrace{a}_{\text{vektor}}$

linjen gnm (x_0, y_0)
m. riktningsvektor
(a,b)

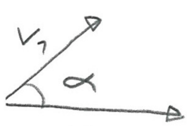
ÄVEN:

$ax+by = c$ bestäms om sätter in pkt på linjen

en linje m. normalvektor (a,b)

låt v_1, v_2 vara vektorer.
vinkeln mellan vektorerna
är bestämt av

$$v_1 \cdot v_2 = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cos\alpha$$

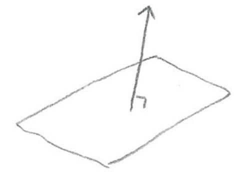


$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

längd av en vektor

RUMMET $\mathbb{R}^3$

linjer "dim." 1  riktn. vektor

plan "co-dim" 1 

normal vektor

linjer

$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

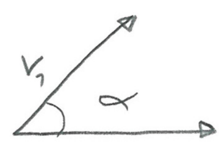
$\underbrace{a}_{\text{rikt.}}$ $\underbrace{b}_{\text{nings}}$ $\underbrace{c}_{\text{vektor}}$

linjen gnm pkt
(x_0, y_0, z_0) med
riktn. vektor
(a,b,c)

$ax+by+cz = d$

ett plan med
normalvektor (a,b,c)

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$



$$\cos\alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \|v_2\|}$$

$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

längd av en vektor

om $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ dvs $v_1 \cdot v_2$ är $v_1 \perp v_2$

samma sak:

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ om och endast om $v_1 \perp v_2$

PÅMINNELSE

- normalform uppstår som

$$\langle (x-x_0, y-y_0, z-z_0), (a, b, c) \rangle = 0$$

- man kan "flytta på origo" i koordinatplan/rum
  koordinater $\neq$ vektorer

$$P \sim \overrightarrow{OP}$$

- snitt av linjer/plan m. givna ekvationer är lösning till ekvationssystem
  ALLTSÅ: en linje som går igenom 2 plan, blir snitt av plan

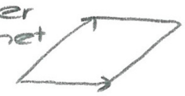
$\mathbb{R}^2$: om $u, v \in \mathbb{R}^2$ $\quad u = (u_1, u_2)$, $\quad v = (v_1, v_2)$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

det. A av matris
arean som spänns av u och v

parallellogram

ligger i planet



$$\{ tu + sv \mid 0 \leq t, s \leq 1 \}$$

$\mathbb{R}^3$: om $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ $\quad u = (u_1, u_2, u_3)$, $\quad v = (v_1, v_2, v_3)$, $\quad w = (w_1, w_2, w_3)$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

(beteckning för)

det A. av matris = volym som spänns av u, v, w

om $u, v \in \mathbb{R}^3$ $\quad u = (u_1, u_2, u_3)$

$v = (v_1, v_2, v_3)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \underset{\text{kryss produkt}}{=} u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3$$

$u \times v \perp u$ och $u \times v \perp v$

dvs. ortogonal till båda faktorer!

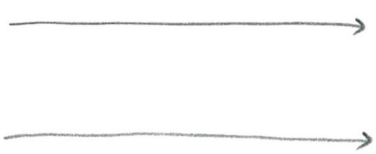
$|u \times v|$ = arean som "spänns" av u och v

$u \times v = -v \times u$

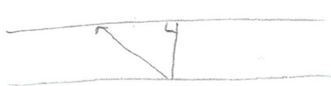
$$\text{proj}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v$$

projektion av u på riktning av v

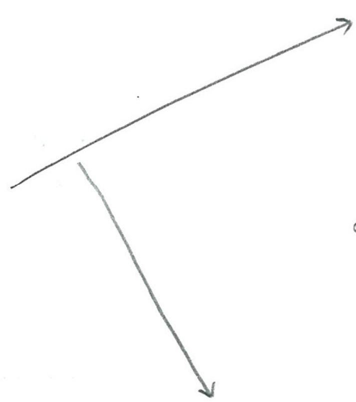
FALL 1.



plan parallellt mot båda linjer.



FALL 2.



$v_1 \parallel v_2$??

3 sätt att kolla om parallella

NR 1.

$\cos \alpha = \pm 1$

dvs

$|\langle v_1, v_2 \rangle| = |v_1||v_2|$

NR 2.

KRYSSPRODUKT!!

$v_1 \times v_2 = 0$

NR 3.

$v_1 = v_2 t$

eller $v_2 = 0$

avståndet mellan linjer är samma som avståndet mellan planen som innehåller motsvarande linjer och är PARALLELLA med båda.

STEG 1.

vi hittar NORMAL till planen som kryssprodukt av 2 riktningsvektorer

STEG 2.

tar godtycklig pkt på varje linje och skriv ekvation av planet gnm den m. normalvektor ur steg 1.

dvs. sätt in x,y,z finn d. får 2 parallella plan

STEG 3.

$\pi_1 : ax+by+cz=d_1$

$\pi_2 : ax+by+cz=d_2$

tar en godtycklig pkt (x_0, y_0, z_0) från π_2 och räkna avstånd till π_1

t.ex. $$\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

kan ta projektion... på normal

ELLER

STEG 2'

ta en pkt på ℓ_1 och en pkt på linjen ℓ_2 beräkna deras projektioner på normalvektor.

STEG 3'

räkna längden på skillnaden.

LÖSNING:

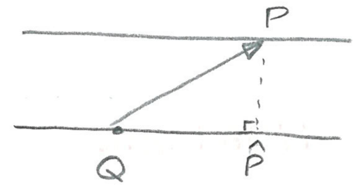
$$\ell_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad \ell_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$d(t,s) = \left\| \begin{matrix} x_0 - x_1 + r_1 t - q_1 s \\ y_0 - y_1 + r_2 t - q_2 s \\ z_0 - z_1 + r_3 t - q_3 s \end{matrix} \right\| \longrightarrow \min$$

FALL 1.

ta en pkt P på l_1 och Q på l_2

$\overline{Q\hat{P}} = \mathrm{Proj}_F\, \overline{QP}$



$\overline{\hat{P}P} = \overline{QP} - \overline{Q\hat{P}}$

avståndet är $\|\overline{P\hat{P}}\|$

i detta fall är linjerna parallella.

1. Ekvationssystem
2. Vektorer, linjära kombinationer, beroende/oberoende system
3. Avbildningsmatriser
4. Invers matris
5. Determinant
6. Minsta kvadratmetod
7. Räkna i $\mathbb{R}^3$
8. Polynom
9. Skalärprodukt, kryssprodukt

DEL 1.

KOM IHÅG: skriv t.ex. "har oändligt många lösn. som kan skrivas som $(\;)t$ där $t \in \mathbb{R}$"

GÄRNA LITE ORD

det $A \neq 0$ alltså matris är inverterbar.

visa: pivot element, fria variabler!! t.ex

en lösning $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t$] ej delrum ty ej genom noll.

dvs. formulera satser korrekt, kunna bevis

motivera ditt svar, love

DEL 2.

bevis med det:
1. Geometriska vektorer (Euklidisk)
2. Komplexa tal