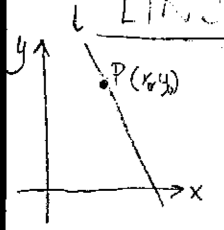
LINJÄR ALG.
FÖ.

25 kr

LINJÄR ALGEBRA - Föreläsning



Punkt i planet ~ talpar (x,y)

linje i planet ~ ekvationen för en linje i planet

$$ax + by + c = 0$$

$P \in l \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + c = 0$

geometriskt arbetande — algebraiskt arbetande

l_1, l_2 räta linjer i planet $\quad l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$
$\quad l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Skär de varandra? $\Leftrightarrow$ Finns det en punkt vars koordinater satisfierar båda ekvationerna?

$\Leftrightarrow$ Finns det lösning till ekv.systemet $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$?

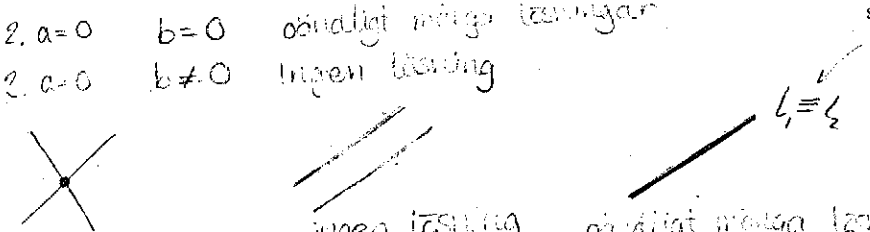
Plan i rummet: $ax + by + cz + d = 0$

Gemensamt: (linjära) ekvationer

alla variabler är av graden 1

Linjära ekvationssystem LES

1. $ax = b \quad a \neq 0 \quad x = \frac{b}{a}$ Entydig lösning
2. $a = 0 \quad b = 0$ oändligt många lösningar
2. $a = 0 \quad b \neq 0$ Ingen lösning

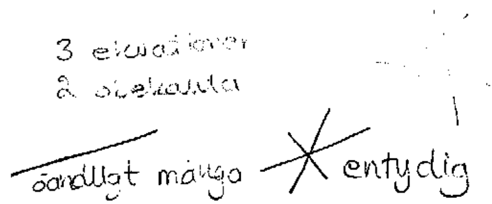


$l_1 \equiv l_2$ sammanfaller med

entydig lösning — ingen lösning — oändligt många lösningar

1

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3 \end{cases}$ 3 ekvationer, 2 obekanta



oändligt många — entydig lösning — ingen lösning

Beroende på antal ekvationer, finns det normal fall, och specialfall.

Linjära ekvationssystem

$1,1$ ekvation — variabel

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m ekvationer
n obekanta
$m \times n$ LES

Om $m = n$, så är LES kvadratiskt

Hypotes: noll, en eller oändligt många lösningar?

Gauss' Elliminationsmetod

Förväntningar: (ekv, obekanta)

- $m = n$ entydig lösning
- $m < n$ oändligt många
- $m > n$ ingen lösning

Vilka LES ser vi helst?: Diagonala LES

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{22}x_2 = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad \dots \\ \quad\quad\quad + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (m=n)$$

Triangulär trappstegsform

Lösning:

$$\begin{cases} x_1 & = c \\ x_2 & = c_2 \\ \dots \\ x_n & = c_n \end{cases}$$

Metoder: bygger på en algoritm som gör att man från det ursprungliga systemet kommer till lösningen via ekvationssystem som är ekvivalenta med det givna i bemärkelsen att de har samma lösningsmängd.

Tillåtna operationer för system - Elementära Ekvationen

Ekvationssystem omvandlas i ekvivalenta ekvationssystem, vid följande operationer:

1) Man låter två ekvationer byta plats
2) Man multiplicerar en ekvation med konstant $\neq 0$!
3) Man adderar till en ekvation en annan ekvation multiplicerad med konstant.

Elementära ekv.system (gäller även icke-linjära)

För LES operationer 1)-3) räcker för att lösa systemet.

$$\begin{cases} 1x - 2y + z = 1 \\ 2x + 1y + z = 0 \\ -x - y + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ +5y - z = -2 \quad |\cdot 3 \\ -3y + 3z = 4 \quad |\cdot 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 15y - 3z = -6 \\ -15y + 15z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 & 1 \\ \cancel{15}5y - \cancel{3}z = -\cancel{6}2 & 2 \\ 0 \quad +\cancel{12}z = \cancel{14} \\ \quad 6z = 7 & 3 \end{cases}$$

3): $z = \frac{7}{6}$ 2): $5y = -2 + z = -2 + \frac{7}{6} = -\frac{5}{6}$

1): $x = 1 + 2y - z = \frac{6 - 2 - 7}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{\begin{matrix} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{6} \\ z = \frac{7}{6} \end{matrix}}$$

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \\ \cancel{0x + 0y + 0z} = 0 \end{cases}$$

påverkar ej lösningen

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = (b \neq 0) \end{cases}$$

Har ingen lösning

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - y - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 \dots = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

1) $x + y + z = 1$

Två fria variabler, och en bunden variabel.

$$\begin{cases} z = t \\ y = s \\ x = 1 - s - t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 3x+y-z=2 & \cdot(-4),\ \cdot(-2) \\ 4x+y-2z=1 & \cdot(+3) \\ 2x+y \quad = a^2 & \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+y-z=2 \\ -y-2z=-5 \\ y+2z=-4+3a \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+y-z=2 \\ -y-2z=-5 \\ 0=-9+3a \end{cases}$$

- Ekv. systemet har ALDRIG en entydig lösning.
- Om $a=3$ $\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ y+2z=5 \\ 0=0. \end{cases}$ oändlig många lösningar, en frivariabel

  $z=t \quad y=5-2t \quad x=\dots$

- Om $a\neq 3$ $\begin{cases} \dots \\ \dots \\ 0=a+3a\neq 0 \end{cases}$ omöjligt $\Rightarrow$ ingen lösning

  Finns det ingen lösning till en av ekvationerna, har hela systemet ingen lösning.

ALGEBRA

Vektorer

6/9/2001

Jan Petersson – bok i linjär algebra alt.

Objekt som bestäms av ett mätetal och en riktning kallas för vektorer.

Ex: krafter, hastigheter, förflyttningar, elektriska och magnetiska fältstyrkor.

Objekt som bestäms av ett mätetal kallas skalärer.

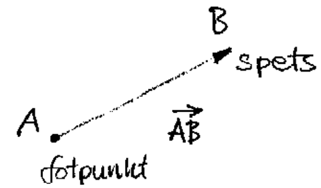
Ex: Massa, volym, ...

Matematisk modell

Vi introducerar (geometriska) vektorer

Def: En riktad sträcka bestäms av:

(1) en storlek
(2) en riktning
(3) en fotpunkt



Def: En vektor u ($\vec{u}$) bestäms av

(1) en storlek
(2) en riktning

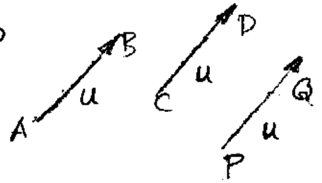
En vektor **u** representeras av varje riktad sträcka med samma riktning och storlek.

Om $\vec{AB}$ är en sträcka, så skriver vi:

$\mathbf{u} = \vec{AB}$

- Om $\vec{CD}$ är en annan med samma riktning och storlek som $\vec{AB}$, så skriver vi också att:

$u = \vec{CD}$



- För varje punkt, så finns en representant för u, med fotpunkt = P

[$\vec{AB}$] klassen av alla riktade sträckor

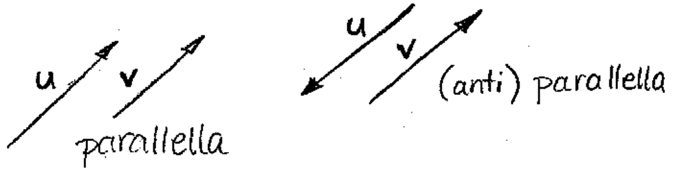
(Var konsekvent. använd en av beteckningarna för vektor i alla anteckningar, räkningar. $\mathbf{u}, \vec{u}, \underline{u}, \vec{AB}, \ldots$)

OBS / $\vec{AB} \neq \vec{BA}$ (har ej samma riktning)

A $\vec{AA}$ = nollsträcka

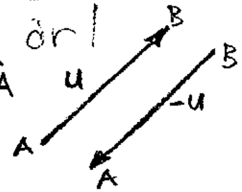
Def: $\mathbb{O} = \vec{\mathbb{O}} = \vec{AA}$ nollvektorn (representeras av alla nollsträckor)

Def: Parallellitet: Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella om de är lika riktade, (eller motsatt riktade)



Vi skriver: $u // v$ (u parallell med v)

Def: Om $\mathbf{u}$ representeras av $\vec{AB}$, så är den motsatta vektorn $-\mathbf{u} = \vec{BA}$



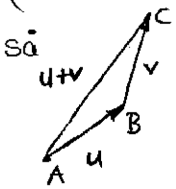
Def: Beloppet eller längden av en vektor $\mathbf{u}$ är dess storlek och betecknas med: $|\mathbf{u}|$

Ex: Krafter. Beloppet: styrkan. Riktningen av u = riktning.

Def 1 Addition (operatorn +)

Summan av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ (betecknas $\mathbf{u}+\mathbf{v}$).

Välj punkterna A, B, C så $u = \vec{AB}$, $v = \vec{BC}$



Då definerar vi

$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

OBS! överensstämmer med de fysikaliska lagarna för addition av krafter som verkar i samma punkt.

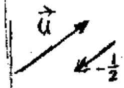
EX: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \mathbb{O}$ nollvektorn!

($-\mathbf{u}$ är den additiva inversen till $\mathbf{u}$)

(Jmfr med $\lambda + (-\lambda) = 0$, $1 + (-1) = 0 \ldots$)

Def: Multiplikation med skalär

Låt λ vara ett reellt tal, och $\mathbf{u}$ en vektor. Då är $\lambda \mathbf{u}$ den vektor som har:



(1) Längden: $|\lambda| \cdot |\mathbf{u}|$

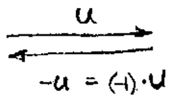
(2) Riktningen: Riktning som $\mathbf{u}$ om $\lambda > 0$

Motsatt riktning om $\lambda < 0$

(OBS! Nollvektorn om $\lambda = 0$)

Ex: $(-1)(\mathbf{u})$ har längden $|-1|\cdot|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|$!

men motsatt riktning, ty $-1 < 0$

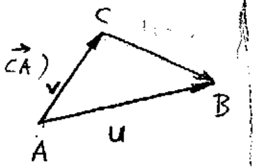


Def: Subtraktion

$\mathbf{u}-\mathbf{v} = \mathbf{u}+(-1)\mathbf{v} = \mathbf{u}+(-\mathbf{v})$ $(-\mathbf{v} = \overrightarrow{CA})$

Antag $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$

Då är $\mathbf{u}-\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$



"Från spets på v till spets på u."

RÄKNELAGAR

(i) a. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ Kommutativa lagen

b. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ Associativa lagen

c. $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$ trivial

(ii) $\lambda\cdot(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\cdot\mathbf{u}$

$1\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}$

$0\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}$ $|0|\cdot|\mathbf{u}| = 0$ ingen riktning/alla riktningar - nollvektorn

$\lambda\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$(-1)\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}$

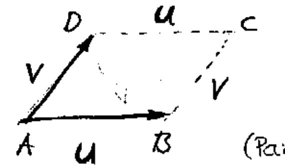
Distributiva lagar:

(iii) $(\lambda+\mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$ Visa m.h.a geometrisk figur! Dela upp i fallen: – λ och μ samma tecken – λ och μ olika tecken

$\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$

Bevis: (i) a. Kommutativa lagen:

Vi ritar ett parallelogram, vars sidor ges av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.



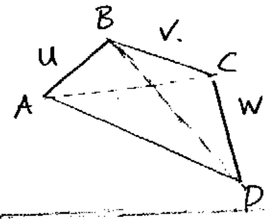
(Parallellförflyttning)

Dvs: $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$

Bevis: (i) b. Associativa lagen:

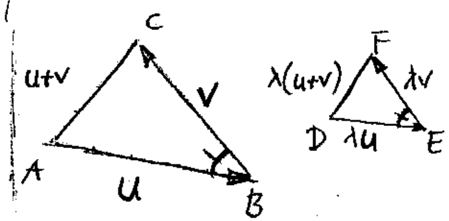
$\left.\begin{aligned} * \ \mathbf{u}+\mathbf{v} &= \overrightarrow{AC} \\ \mathbf{w} &= \overrightarrow{CD} \end{aligned}\right\} (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$



Enl. def av vektor addition

Bevis Distributiv lag 2



• Trianglarna är likformiga, ty vinkeln vid B = vinkeln vid E

• Dessutom:

$\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{DE}|} = \dfrac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{EF}|} = \dfrac{1}{\lambda}$

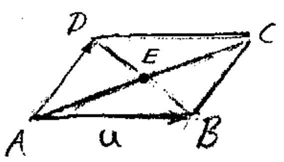
Detta visar att:

$\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{DF}|} = \dfrac{1}{\lambda}$

• Dessutom: $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{DF}$

Dvs: $\overrightarrow{DF} = \lambda\overrightarrow{AC}$ Klart!

Ex: Visa att diagonalerna i en parallellogram skär varandra mitt itu.



Lösn: (i) $\vec{AE} \parallel \vec{AC}$, (ii) $\vec{BE} \parallel \vec{BD}$

(OBS! $\vec{BD} = \mathbf{v}-\mathbf{u}$) ($\vec{AC} = u+v$)

(i) $\Rightarrow \vec{AE} = x(\overbrace{u+v}^{\vec{AC}})$

(ii) $\Rightarrow \vec{BE} = y(\overbrace{v-u}^{\vec{BD}})$

Men: $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = \mathbf{u} + y(v-u)$

Dvs: $x(u+v) = u + y(v-u) \Leftrightarrow$

$xu + xv = u + yv - y\mathbf{u} \Leftrightarrow$

$xu - u + yu = -xv + yv \Leftrightarrow$

$(x+y-1)\mathbf{u} = (-x+y)\mathbf{v} \Leftrightarrow$

$\underbrace{(x+y-1)}_{0}u = \underbrace{(-x+y)}_{0}v$

Bara sant om koeff framför u och v är noll, ty: **u** och **v** har ej samma riktning

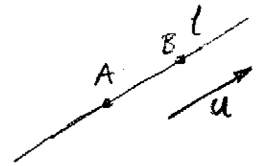
$x+y-1=0$

$-x+y=0$, $y=x$

$2x-1=0$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

mha vektor begreppet.

LINJÄR ALGEBRA LV2 Förel. 3

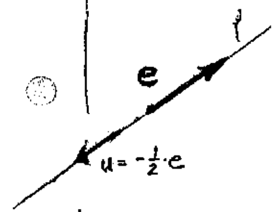


u är en vektor på linjen l, om det finns punkter A och B på linjen, så att $\mathbf{u} = \vec{AB}$

Då är: $\mathbf{u} \parallel l$

Lemma 1 (hjälpsats).

Låt $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ vara en vektor på linjen l.



Då kan varje annan vektor **u** på l skrivas $\mathbf{u} = x\mathbf{e}$

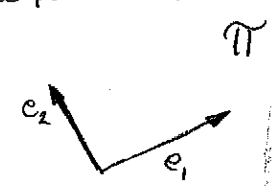
där x är ett entydigt bestämt tal.

Bevis: $\mathbf{u} \parallel \mathbf{e}$ (på samma linje)

Tag $x = \begin{cases} |u|/|e| & \text{om } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{e} \text{ är lika riktade} \\ -|u|/|e| & \text{om } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{e} \text{ är motsatt riktade} \end{cases}$

Sats 2

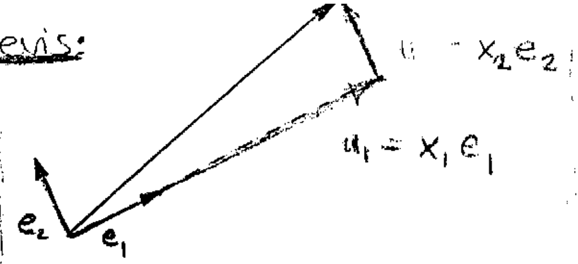
Låt $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ ($\neq \mathbf{0}$) vara två icke-parallella vektorer i ett plan π:



Då gäller för varje vektor $\mathbf{u} \in \pi$ att $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$

med entydigt bestämda tal x_1 och x_2.

Bevis:



Vi har att $u = u_1 + u_2 = x_1 e_1 + x_2 e_2$ Existensen

Entydigheten: Antag:

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 = y_1 e_1 + y_2 e_2$$

Då gäller

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = y_1 e_1 + y_2 e_2$$

$$\underbrace{(x_1 - y_1) e_1 = -(x_2 - y_2) e_2}_{\text{ej parallella}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 = 0 & x_1 = y_1 \\ x_2 - y_2 = 0 & x_2 = y_2 \end{cases}$$

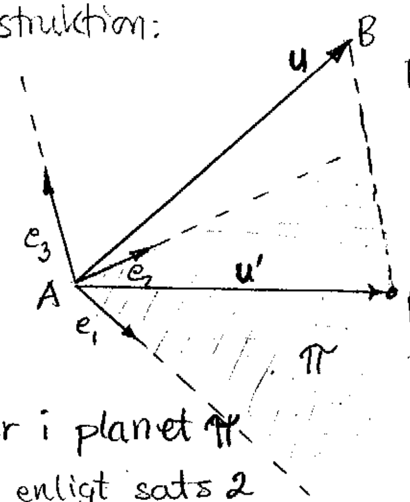
Sats 3:

Antag e_1, e_2, e_3 är tre vektorer i rummet, som ej ligger i samma plan (ej komplana). Då gäller för varje given vektor u i rummet att:

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

med entydigt bestämda tal x_1, x_2 och x_3

Bevis: Konstruktion:



$\vec{BB'} = x_3 e_3$ (enligt lemma 1)

$B' \in$ Planet som innehåller e_1 och e_2, och som går genom punkten A.

u' ligger i planet π

Då finns enligt sats 2 tal x_1 och x_2 så att

$$u' = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

Alltså är: $u = \vec{AB'} + \vec{B'B} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ (Existens)

Entydighet:

Antag $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$

Detta ger: $\overset{(u-u)}{(x_1 - y_1) e_1 + (x_2 - y_2) e_2 + (x_3 - y_3) e_3 = 0}$

$\Leftrightarrow x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = x_3 - y_3 = 0$

ty annars kan vi uttrycka en av vektorerna i termer av de två andra, vilket skulle innebära att alla ligger i ett plan.

Def $e \neq 0 \parallel L$ sägs vara en bas för linjen L.

koordinat

$u = x \cdot e$

e_1, e_2 (ej parallella) sägs vara en bas i planet π. ($\in$ π)

$u = x_1 e_1 + x_2 e_2$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ej komplana - sägs vara en bas för rummet.

$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$

Vi skriver $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

om $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$

Då gäller att:

$\lambda\mathbf{v} + \mathbf{u} = (x_1 + \lambda y_1,\ x_2 + \lambda y_2,\ x_3 + \lambda y_3)$

om

$\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$

$\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$, $\lambda\mathbf{v} = (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3)$

Ex: Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ om $\mathbf{u} = (1,2,3)$ & $\mathbf{v} = (-2,1,-7)$

(en bas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är given)

Då är $\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = (1 + 2\cdot(-2),\ 2 + 2\cdot 1,\ 3 + 2\cdot(-7)) = (-3, 4, -11)$

Def

$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$ $(p = 2, 3 \dots)$ sägs vara <u>linjärt beroende</u> om någon av dem är en linjärkombination av de övriga. I annat fall, sägs de vara <u>linjärt oberoende</u>.

Ex.

$\mathbf{u}_1 = (-1,2,1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,-2,1)$, $\mathbf{u}_3 = (-2,2,3)$ är linjärt beroende, ty $\mathbf{u}_3 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ $\left(\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 - 2\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2}{2}\right)$

Sats 4 Bassatsen

(i) Om $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ ligger i ett plan:

Då gäller

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ är en bas $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ är linjärt oberoende

eller

$\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är parallella $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ är linjärt beroende

(ii) Om $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är vektorer i rummet: Då gäller att

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är en bas $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är linjärt oberoende

eller

(ii)' $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är komplana $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är linjärt beroende

(iii) Fler vektorer än två i planet är linjärt beroende.

Fler vektorer än tre i rummet är linjärt beroende.

Bevis: av (iii) i rummet

Antag $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ är 4 vektorer i rummet.

Då gäller

a. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är linjärt beroende $\Rightarrow$ t.ex $\mathbf{u}_1 = \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + 0\cdot$

eller

b. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är linjärt oberoende $\Rightarrow$ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är en bas för rummet

$\Rightarrow \mathbf{u}_4 = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3$

Sats 5

$u_1, \dots, u_p$ är linjärt oberoende

$\Longleftrightarrow$

Ekvationen $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$ har endast den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$

Ex 10': Avgör om $u_1 = (2,1,-1)$, $u_2 = (3,2,-2)$, $u_3 = (3,1,-1)$ utgör en bas för rummet.

(dvs: är de linjärt beroende, eller ej?)

Lösn: Vi undersöker ekvationen

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \underbrace{\mathbf{0}}_{(0e_1+0e_2+0e_3)}$ (Ett linjärt ekv.syst. m. 3 obekanta)

$\lambda_1(2,1,-1) + \lambda_2(3,2,-2) + \lambda_3(3,1,-1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \cdot(-2) \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_2 = \lambda_3$ sätt $\lambda_3 = t$

$\lambda_1 = -2t - t \Rightarrow \lambda_1 = -3t$

tag $t = 1$, $-3u_1 + u_2 + u_3 = 0$, $u_1 = \frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3$

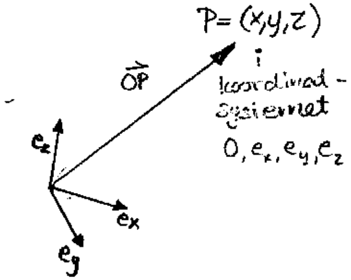
Rummet: Fixera en punkt O (origo) i rummet.

För varje punkt P i rummet så kan vi bilda ortsvektorn $\vec{OP}$.

Låt e_1, e_2, e_3 vara en bas för rummet.

Då finns entydigt bestämda tal x, y, z

Så att $\vec{OP} = x e_x + y e_y + z e_z$



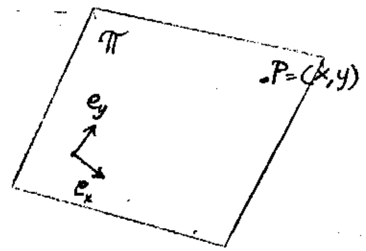
(För att ange en punkt måste man sålunda ha såväl en ort (origo) samt tre enhetsvektorer.)

Planet (i rummet)

$\pi \Rightarrow \vec{OP} = x e_x + y e_y = (x,y)$

$e_x, e_y \parallel \pi$

Men ej $\parallel$ med varandra

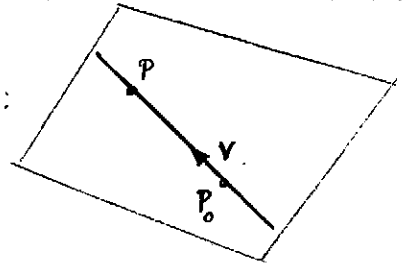


En linje karaktäriseras av:

- en punkt P_0 på linjen, och av:
- en riktningsvektor $\mathbf{v}$

En punkt P ligger på linjen, om:

$\vec{P_0P} = t \cdot \mathbf{v}$ för något reellt tal t



Omvänt: varje punkt P som uppfyller * ligger på linjen

OBS!

$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{P_0P} = \vec{OP_0} + t\mathbf{v}$, $(t \in \mathbb{R})$

Ekvationen för en linje på vektor form

I rummet är $\vec{OP} = (x, y, z)$ och $\vec{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$,

$\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ i basen $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$

Dus:

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(\alpha, \beta, \gamma)$, $t \in \mathbb{R}$

(= Koordinaterna för punkten P / vektorn $\vec{OP}$.)

Dus: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$ Linjens ekvation på parameterform

(även för snedvinkliga koordinatsystem)

I planet får vi:

$\overset{P}{(x, y)} = \overset{P_0}{(x_0, y_0)} + t\overset{\mathbf{v}}{(\alpha, \beta)}$, $t \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

Linjens ekvation på parameterfri form.

(där minst en av α, β, γ ej är noll)

$$t = \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$

Lös ut t:

$$t = \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}x - \frac{1}{\beta}y + \left(\frac{-x_0}{\alpha} + \frac{y_0}{\beta}\right) = 0$$

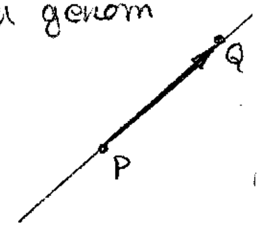
Denna ekvation har formen:

$ax + by + c = 0$

Dus: Linjens ekvation på **affin form**

(om koordinatsystemet är rätvinkligt, kan man även säga: normalform.)

Ex 5' Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $P = (1, 1, 3)$ & $Q = (2, 2, 3)$



L: En riktningsvektor är

$\vec{PQ} = \mathbf{v} = \vec{OQ} - \vec{OP} = (2,2,3) - (1,1,3) =$
$= (1, 1, 0)$

Svar: Linjens ekvation är $\boxed{(x, y, z) = (1, 1, 3) + t(1, 1, 0)}$, $t \in \mathbb{R}$

eller: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$

eller: $\frac{x - 1}{\underbrace{1}_{\alpha=1}} = \frac{y - 1}{\underbrace{1}_{\beta=1}}$, $\underbrace{z = 3}_{\gamma=0}$

Ex 8': Bestäm riktningen för linjen $7x + 2y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ Bestäm riktningsvektorn för linjen.

Lösn: y är en s.k. fri variabel. Sätt $y = -7t$

Då är $\frac{7x}{7} = \frac{3 - 2\cdot(-7t)}{7} \Leftrightarrow x = \frac{3}{7} + 2t$

Dus: $\begin{cases} x = \frac{3}{7} + 2t \\ y = \quad - 7t \end{cases}$ En riktningsvektor är

$\mathbf{v} = (2, -7)$ $(\alpha, \beta) = \left(\frac{3}{7}, 0\right) + t(2, -7)$

Ex 6: Avgör om l_1 och l_2 skär varandra.

$$l_1 \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad l_2 \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 1 - s \\ z = 1 + 2s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

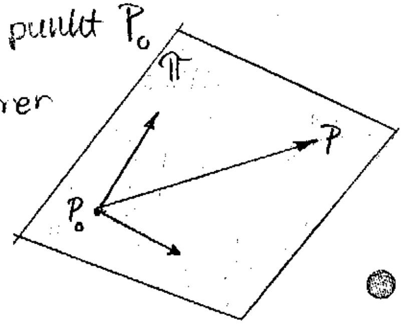
om det finns en skärningspunkt $P = x, y, z$,

så finns tal s och t så att:
$$\begin{cases} x = 1 - t = 2 - s \\ y = 2 + t = 1 - s \\ z = -1 + 4t = 1 + 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s - t = 1 \\ s + t = -1 \\ -2s + 4t = 2 \end{cases}$$

Gausselimination $\Rightarrow$ (hör) ingen lösning!

PLANETS EKVATION

Ett plan π karaktäriseras av en punkt P_0 i planet och två (riktnings-) vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \parallel \pi$, men ej parallella med varandra.



En punkt $P \in \pi$ precis då

$\overrightarrow{P_0P} \parallel \pi$.

Eftersom $\mathbf{v}_1 \nparallel \mathbf{v}_2$ (ej parallell med), så utgör de en bas för vektorer i planet.

Dvs: det finns tal s och t, så att:

$\overrightarrow{P_0P} = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$

Vi introducerar ett koordinatsystem i rummet.

$(O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$

För en punkt $P \in \pi$ gäller att

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + s\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2$

Antag att:
$$\overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$$
$$\mathbf{v}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$$
$$\mathbf{v}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

och att: $\overrightarrow{OP} = (x_1, \beta_1, \gamma_1)$. Då får vi:

$$\overset{P=}{(x, y, z)} = (x_0, y_0, z_0) + s(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + t(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

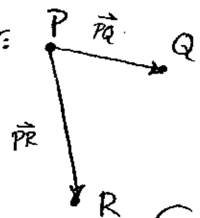
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 t \\ y = y_0 + \beta_1 s + \beta_2 t \\ z = z_0 + \gamma_1 s + \gamma_2 t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

Planets ekvation på parameterform

Ex: Bestäm planet genom punkten

$P = (1,2,0) \quad Q = (3,1,3), \quad R = (1,-2,3)$

Lösn: Vi behöver två riktningsvektorer:



$\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{PQ} = \overset{\overrightarrow{OQ}}{(3,1,3)} - \overset{\overrightarrow{OP}}{(1,2,0)} = (2,-1,3)$

$\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{PR} = (1,-2,3) - (1,2,0) = (0,-4,3)$

Svar: Planets ekvation är:

$$(x, y, z) = \overset{P}{(1,2,0)} + s(2,-1,3) + t(0,-4,3)$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 - s - 4t \\ z = 3s + 3t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

<u>**Sats 2a**</u> Ekvationen $ax+by+cz+d=0$ beskriver ett plan i rummet.

(minst ett av talen $a, b, c \neq 0$)

<u>**Bevis:**</u> $a \neq 0$

Sätt $y = -as$, $z = -at$ (fria variabler)

På är

$$ax = -d - by - cz = -d - abs + act$$

$$\begin{cases} x = -\frac{d}{a} + bs + ct \\ y = \quad -as \\ z = \quad -at \end{cases}$$

ett plan genom punkten $(-\frac{d}{a}, 0, 0)$ med riktningsvektorer $v_1 = (b, -a, 0)$ & $v_2 = (c, 0, -a)$

<u>**Sats 2b**</u> Ekvationen för ett plan på parameterform kan skrivas på formen: $ax + by + cz + d = 0$

(dvs. på affin form)

Ex: Antag att vi har planet π_0.

$$\pi_0 \begin{cases} 2s = x - t \\ s + 4t = -y + 2 \\ 3s + 4t = z \end{cases} \quad (\cdot 2) \; (-3) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} s + 4t = -y + 2 \\ -8t = x + 2y - 5 \\ -8t = 3y + z - 6 \end{cases} \quad (-1)$$

$$\begin{cases} s + 4t = -y + 2 \\ -8t = x + 2y - 5 \\ 0 = -x + y + z - 1 \end{cases}$$

Ekvationen för planet är:

$-x + y + z - 1 = 0$

$x - y - z + 1 = 0$

Sedit kan bestämmas genom återsubstitution, alla ekv. som uppfyller samtidigt uppfyller samtidigt även den ...

23

Geometrisk tolkning av linjära system.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 & : \pi_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 & : \pi_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 & : \pi_2 \end{cases}$$

Varje ekvation beskriver ett plan i rummet (givet ett bestämt koordinatsystem).

Följande fall kan inträffa:

(fall 1: *alla planen parallella, eller: *Två av planen bilder en linje, som är parallell med det tredje)

1. Saknar gemensamma punkter (= ingen lösning)
2. Skär varandra i en punkt (= entydig lösning)
3. Skär varandra längs en linje:

   : Vi har då en enparametrig lösning

   $$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(\alpha, \beta, \gamma)$$

4. Alla plan är identiska

   : Vi har en tvåparametrig lösning (= planets ekvation på parameterform)

   $$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + t(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

För två plan: kan ej fall 2 inträffa.

Planen π_1 och π_2 är parallella om.m

$$(a_2, b_2, c_2) = k(a_1, b_1, c_1)$$

dvs: endast en konstant (d) får skilja dem åt.

Detta motsvarar fall 1 el. 4 ovan.

24

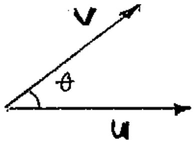
ALGEBRA FÖRELÄSNING 5 2001/9/17

4. Skalärprodukt
Ortogonalitet
ON-baser
projektion
avstånd
Spegling

Def: SKALÄRPRODUKT

Skalärprodukten av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$

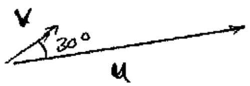
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos(\theta)$



θ = minsta vinkeln mellan $\mathbf{u}$ & $\mathbf{v}$

$0 < \theta \leq \pi \qquad [\mathbf{u},\mathbf{v}] = \theta$

Ex: $|\mathbf{u}|=3$, $|\mathbf{v}| = \frac{1}{2}$



$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\cos(30°)}_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Ex2:

Arbetet som uträttas är:

$W = F\cdot r = \underbrace{\left(|F|\cdot\cos(\theta)\right)}_{\text{(kraftens storlek i vägens riktning)}}|r|$

OBS!

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0 \Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (här är cos positiv)

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ (här är cos negativ)

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ Ortogonala!

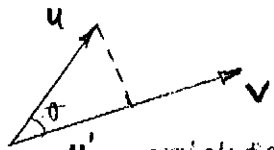
Def: Om $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$

Så säger vi att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala (= vinkelräta).

Vi skriver $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

25

Sats: (Projektionsformeln)



$\mathbf{u}'$ = projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\cdot\mathbf{v}$$

Bevis: $\mathbf{u}' \parallel \mathbf{v}$ riktning

$|\mathbf{u}'| = |\mathbf{u}|\cdot|\cos(\theta)|$ längd

Samma riktning som $\mathbf{v}$, om $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$
motsatt riktning som $\mathbf{v}$ annars

DVS:

$VL = \mathbf{u}' = |\mathbf{u}|\cdot\cos(\theta)\cdot\underbrace{\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}}_{\text{har längden 1}}$

$HL = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}^2|}\cdot\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos(\theta)}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v} = \mathbf{u}'$ OK!

$\left(\left|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}|\mathbf{v}| = 1 \quad ; \; |\lambda\mathbf{v}| = |\lambda|\,|\mathbf{v}|\right)$

Sats 2: (Räkneregler)

(i) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$ $\quad |\mathbf{u}|\,|\mathbf{u}|\cdot\cos(0) = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{u}|\cdot 1$

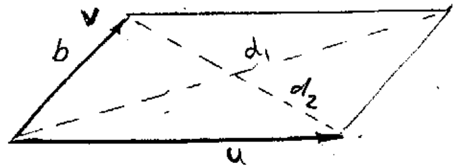
(ii) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ (Kommutativ)

(iii) $(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}$

(iv) $(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}\mathbf{v})$ $\quad \lambda\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ / $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har samma vinkel mellan sig

26

Ex 5



$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2+b^2)$

$L: |u| = a, \quad |v| = b,$

$|u+v| = d_1, \quad |u-v| = d_2.$

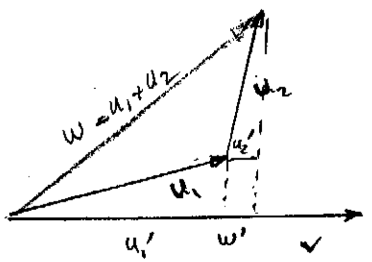
$\underline{VL} = |u+v|^2 + |u-v|^2 = (u+v)(u+v) + (u-v)(u-v)$

$= (u+v)u + (u+v)v + (u-v)\cdot u - (u-v)v$

$= u\cdot u + \cancel{v\cdot u} + \cancel{u\cdot v} + v\cdot v + u\cdot u - \cancel{v\cdot u} - \cancel{u\cdot v} - u\cdot v$

$= 2(|u|^2 + |v|^2) = HL$

Bevis: (iii)



$\left(x_1 v = y_1 v \Rightarrow x_1 = y_1 \right.$
$\left. (\text{om } v \neq 0) \right)$

w' = projektionen av w på v.

(*) $= u_1' + u_2'$

Men $w' = \frac{w\cdot v}{|v|^2}\cdot v \overset{(*)}{=} \frac{1}{|v|^2}\left((v_1+v_2)\cdot v\right) v$

& $\begin{pmatrix} u_1' = \frac{u_1\cdot v}{|v|^2} v \\ u_2' = \frac{u_2\cdot v}{\dots} v \end{pmatrix}$ Alltså är: $(u_1+u_2)\cdot v = (u_1\cdot v + u_2\cdot v)$

Alltså: är, efter identifiering av koefficienter framför v,

Tricket: ligger i figuren.

ORTONORMERADE BASER

Om

$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$

$\vec{v} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$

$\left(\begin{matrix}\vec{e}_1; \vec{e}_2 \\ \text{bas i planet}\end{matrix}\right)$

Då är:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1y_1\vec{e}_1\vec{e}_1 + x_1y_2\vec{e}_1\vec{e}_1 + x_2y_1\vec{e}_2\vec{e}_1 + x_2y_2\vec{e}_2\vec{e}_2$

$= x_1y_1 + x_2y_2$ om

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = 0 \quad (e_1 \perp e_2)$

$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$

Om $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$

$\vec{v} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$

Då är:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1y_1\vec{e}_1\vec{e}_1 + x_1y_2\vec{e}_1\vec{e}_2 + x_1y_3\vec{e}_1\vec{e}_3 +$
$x_2y_1\vec{e}_2\vec{e}_1 + x_2y_2\vec{e}_2\vec{e}_2 + x_2y_3\vec{e}_2\vec{e}_3 +$
$x_3y_1\vec{e}_1\vec{e}_3 \cdot x_3y_2\vec{e}_2\vec{e}_3 + x_3y_3\vec{e}_3\vec{e}_3 =$

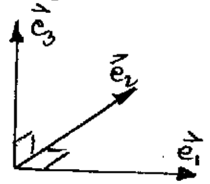
$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ om $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{om } i \neq j \\ 1 & \text{om } i = j \end{cases} = \delta_{ij}$

Dvs: $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$

$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$

Def: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sägs vara en ON-bas om

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad \left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{om } i \neq j \\ 1 & \text{om } i = j \end{cases} \right)$$



Ex: $\vec{u} = (2,-1,7)$, $\vec{v} = (1,2,1)$

koordinater i en ON-bas

Då är $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 7\cdot 1 = 7$

$|\vec{u}| = \sqrt{2^2+1^2+7^2} = \sqrt{4+1+49} = 3\sqrt{6}$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2+2^2+1} = \sqrt{6}$

Anmärkning:

Om $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ i en ON-bas

$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

forts:

Men: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta = 3\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cos(\theta)$

$= 18\cos(\theta) = 7 \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{7}{18}$

$\theta = \arccos(\frac{7}{18})$

Sats 4:

Om $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ i en ON-bas $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$,

så är:

$x_k = \vec{u} \cdot \vec{e}_k \qquad k = 1,2,3$

Bevis:

$u = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_2 = x_1 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_{=0} + x_2 \underbrace{\vec{e}_2 \vec{e}_2}_{=1} + x_3 \underbrace{\vec{e}_3 \vec{e}_2}_{=0}$$

För($k=2$): $\Rightarrow x_2$

Ex: Bestäm Projektionen av $\vec{u} = (1,-2,1)$ på $\vec{v} = (7,-1,2)$

Projell. $\vec{u}'$ = "projektionen av $\vec{u}$" $= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{7+2+2}{49+1+4}(7,-1,2)$

$= \frac{11}{54}(7,-1,2)$

(affin form)

Planen

$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1y + d_1 = 0$ (1) $(a \neq 0)$

$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2y + d_2 = 0$ (2)

är parallella om.m

$(a_2, b_2, c_2) = k(a_1, b_1, c_1)$

(riktningsvektorerna (på parameterform) blir då lika.)

Bevis: (i) De saknar gemensamma punkter

(iv) De är identiska

$\Rightarrow (a_2, b_2, c_2) = k(a_1, b_1, c_1)$

I fall (i): multiplicera (1) med $-\frac{a_2}{a_1}$ och addera till 2,

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$\Rightarrow 0 \cdot x + \underbrace{\left(b_2 - \frac{a_2}{a_1} b_1\right)}_{\text{om } \neq 0} y_1 + \underbrace{\left(c_2 - \frac{a_2}{a_1} c_1\right)}_{\text{om } \neq 0} z + d_2 - \frac{a_2}{a_1} d_1 = 0$$

2 fria variabler = oändligt många lösningar.

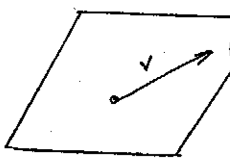
Så finns lösningar

Men lösningar saknas. (Vet från början)!

Dvs: $b_2 = \underbrace{\frac{a_2}{a_1}}_{=k} b_1$, $c_2 = \underbrace{\frac{a_2}{a_1}}_{=k} c_1$, $a_2 = \underbrace{\frac{a_2}{a_1}}_{=k} \cdot a_1$

$$\left.\begin{aligned} \pi &: ax + by + cz + d = 0 \\ \pi_0 &: ax + by + cz = 0 \end{aligned}\right\} \pi \,//\, \pi_0$$

$\vec{v} = (\alpha_1, \beta_1, \delta) \,//\, \pi$ om $\vec{v} \,//\, \pi_0$

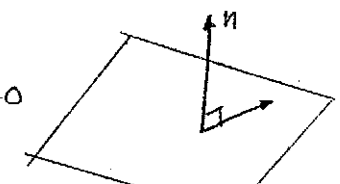


$(\alpha, \beta, \delta) \in \pi_0$ precis då $a\alpha + b\beta + c\delta = 0$

Punkten ligger i planet, precis då $\vec{v}$ är parallell m. planet, vilket ger ekvationen: $a\alpha + b\beta + c\delta$.

$v \perp n = (a, b, c)$

$v \cdot n = a\alpha + b\beta + c\delta = 0$



$ax + by + cz + d = 0$

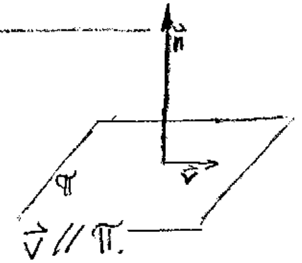
Ett plan:

$\pi : ax + by + cz + d = 0$ $\quad \pi \,//\, \pi_0$!

$\pi_0 : ax + by + cz = 0$

$\vec{v} = (\alpha, \beta, \delta) \,//\, \pi \overset{\text{om}}{\Longleftrightarrow} \vec{v} \,//\, \pi_0 \Rightarrow a\alpha + b\beta + c\delta = 0$

flytta v till origo (som ligger i π_0)



Om vi har ett **ON**-system $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

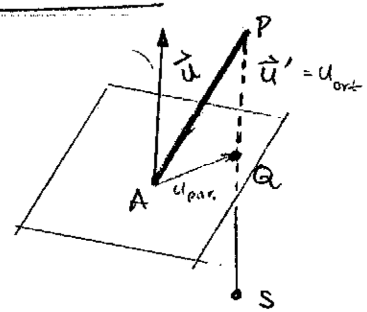
Då är $a\alpha + b\beta + c\delta = (0) = (a, b, c) \cdot (\alpha, \beta, \delta)$
$= \vec{n} \cdot \vec{v}$

Dvs: $\vec{v} \perp \vec{n}$ gäller för alla vektorer $\vec{v} \,//\, \pi$.

n kallas normalvektorn till planet π.

n kan avsättas från vilken punkt som helst i π.

Projektion och Spegling



Sätt $\vec{u} = \vec{AP}$

Vi har att: $\vec{u} = \vec{QP}$

= "Projektionen av $\vec{u}$ på $\vec{n}$"

$= \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot n$

Koordinaterna för Q $= \vec{OQ} = \vec{OP} - \vec{u}'$

$\vec{OS} = \vec{OP} - 2\vec{u}$

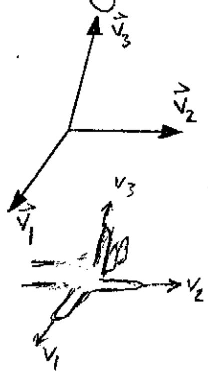
$u_{parallell} = \vec{u} - u_{ortog.}$

OBS! Bara i ett ON-system kan normalvektorn hittas lätt.

Kapitel 5 Vektorprodukt

positiv/negativ orientering
Vektorprodukt (kryssprodukt) $\vec{u} \times \vec{v}$
Skalär trippelprodukt $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

<u>def:</u> Antag att v_1, v_2, v_3 ej är komplana (L.O.B)



Vi säger att v_1, v_2, v_3 är <u>positivt orienterade</u>, om:
den minsta vridning som överför v_1 i v_2:s riktning ser ut att ske moturs (motsols), sett från spetsen på v_3.

Annars är de <u>negativt</u> orienterade.

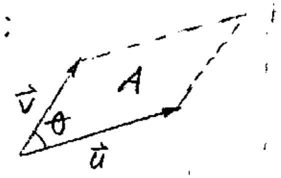
Kontroll m. högerhanden; eul. ovan.
Negativ orientering: Samma fingerordning, fast för vänster hand.

<u>Lemma:</u> Om $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ är pos. orienterade

$\Leftrightarrow$ $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1$ — " —
$\Leftrightarrow$ $\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ — " —
$\Leftrightarrow$ $\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3$ är neg. orienterade
$\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2$ — " —
$\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1$ — " —

<u>def:</u> Om $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ så defineras

$\vec{u} \times \vec{v}$ (vektorprodukt) enligt:



<u>Längd</u>
(i) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\theta)$

$A = \text{basen} \times \text{höjden}$
$= |\vec{u}| \cdot \underbrace{h}_{|\vec{v}| \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}$
$= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\theta)$

(Arean av det parallelogram som spänns upp av $\vec{u}$ och $\vec{v}$.)

<u>Riktning:</u>
(ii) $\vec{u} \times \vec{v}$ är $\perp$ $\vec{u}$ & $\vec{v}$
<u>Riktning v_3</u>
(iii) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ är positivt orienterade

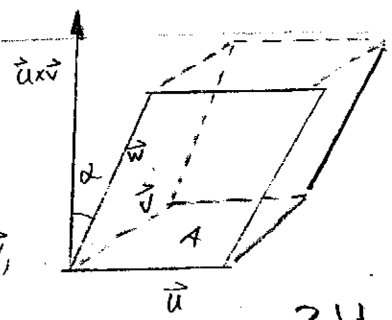
<u>OBS!</u> $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$
(Vektor-produkten är <u>ej</u> Kommutativ)

- Om $\vec{u}$, el. $\vec{v}$ är 0, är $\vec{v} \times \vec{u}$ nollvektorn.
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, ty $\sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow$ längden $= 0$.

<u>def</u> <u>Den skalära trippelprodukten</u> är <u>talet</u> (volymprodukt)

$$v(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

$v(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$
$= \underbrace{|\vec{u} \times \vec{v}|}_{\text{basen}} \cdot \underbrace{|w| \cos\alpha}_{\text{höjden}}$ = volymen av parallellopiped som spänns upp av $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$,



Om $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är positivt riktade.

Sätt W = volymen

teori uppg tenta

Sats 2.

volymfunktionen av

$$V(\vec u,\vec v,\vec w)=\begin{cases} W & \text{om } \vec u,\vec v,\vec w \text{ är pos. orienterade} \\ -W & \text{om } \text{— " —} \quad \text{neg. — " —}\end{cases}$$

Följdsats (sats 3)

$$(\vec u\times\vec v)\cdot\vec w = (\vec v\times\vec w)\cdot\vec u = (\vec w\times\vec u)\cdot\vec v \qquad \text{(positivt orienterade)}$$

$$= -(\vec v\times\vec u)\cdot\vec w = -(\vec w\times\vec v)\,\vec u = -(\vec u\times\vec w)\cdot\vec v \qquad \text{(negativt — " —)}$$

Räknelagar för vektorprodukt

(i) $\vec u\times\vec v = \vec 0$ om $\vec u /\!/ \vec v$

(ii) $\vec u\times\vec v = -\vec v\times\vec u$

(iii) $(\vec u_1+\vec u_2)\times\vec v = \vec u_1\times\vec v + \vec u_2\times\vec v$

teori uppg. tenta
svår att bevisa

(iv) $(\lambda\vec u\times\vec v) = \lambda(\vec u\times\vec v)$

Hjälpsats (för att bevisa (iii))

$\ast$ Om $\vec u\cdot\vec r = \vec v\cdot\vec r$ för alla vektorer $\vec r$

$\Longleftrightarrow \vec u = \vec v$

Distributiv lag för skalärprodukt

Bevis: $\ast \Rightarrow \vec u\cdot\vec r - \vec v\cdot\vec r = 0,$

$(\vec u-\vec v)\cdot\vec r = 0$ för alla $\vec r$

Vi kan speciellt välja $\vec r = \vec u-\vec v$

Detta ger:

$(\vec u-\vec v)\cdot(\vec u-\vec v) = 0$

$|\vec u-\vec v|^2 = 0 \Rightarrow \vec u-\vec v = \vec 0$

Dvs: $\vec u = \vec v$

Bevis av (iii) Plausibel tentates!!!

Tag en (godtycklig) vektor $\vec r$.

Då är:

$$(\underbrace{\vec u_1+\vec u_2}_{=\vec u}\times\vec v)\,\vec r \underset{\text{Sats 3}}{=} (\vec v\times\vec r)\cdot(\vec u_1+\vec u_2) \underset{\text{distributiv lag för skalärprodukt}}{=}$$

$$= (\vec v\times\vec r)\cdot\vec u_1 + (\vec v\times\vec r)\cdot\vec u_2 = [\text{Sats 3}]$$

$$= (\vec u_1\times\vec v)\cdot\vec r + (\vec u_2\times\vec v)\cdot\vec r = (\vec u_1\times\vec v + \vec u_2\times\vec v)\cdot\vec r$$

Enligt hjälpsatsen följer att

$(\vec u_1\times\vec v + \vec u_2\times\vec v) = \vec u_1\times\vec v + \vec u_2\times\vec v$

$\Longleftrightarrow (\vec u_1+\vec u_2)\times\vec v = \vec u_1\times\vec v + \vec u_2\times\vec v$ ∎

Antag att $\vec u = x_1\vec e_1 + x_2\vec e_2 + x_3\vec e_3 =$

$= (x_1, x_2, x_3)$ i basen $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$

$\vec u = y_1\vec e_1 + y_2\vec e_2 + y_3\vec e_3$

$= (y_1, y_2, y_3)$ i basen $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$

Då är:

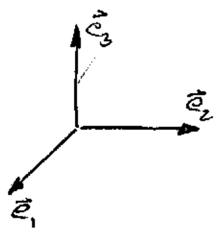
$$\vec{u}\times\vec{v} = x_1y_1\underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_1)}_{=\vec{0}} + x_1y_2\,\vec{e}_1\times\vec{e}_2 + x_1y_3\underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_3)}_{=-\vec{e}_3\times\vec{e}_1}$$

$$+ x_2y_1\underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_1)}_{=-\vec{e}_1\times\vec{e}_2} + x_2y_2\underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_2)}_{=\vec{0}} + x_3y_2\,\vec{e}_2\times\vec{e}_3$$

$$+ x_3y_1\,\vec{e}_3\times\vec{e}_1 + x_3y_2\underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_2)}_{-\vec{e}_2\times\vec{e}_3} + x_3y_3\underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_3)}_{=\vec{0}} \qquad (*)$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2)\,\vec{e}_2\times\vec{e}_3 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\vec{e}_3\times\vec{e}_1 + $$
$$+ (x_1y_2 - x_2y_1)\,\vec{e}_1\times\vec{e}_2$$

Om $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ är en högerorienterad (pos. ori.) ON-bas



Då gäller att:

$$\vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \vec{e}_1$$
$$\vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2$$
$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

Se fr. spetsen på e_2, vrid e_3 kortaste sträckan (motsols) mot e_2. Blir e_2, e_1 $-e_2$

$$(x_1, x_2, x_3)\times(y_1, y_2, y_3) = HL : (*) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

def $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 2×2 - determinant

(Stryk raden som e_1 står i)

$$= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{e}_3$$

$(x_2y_3 - x_3y_2)$ $\quad (x_1y_3 - x_3y_1)$ $\quad (x_1y_2 - x_2y_1)$

Ex $(1,0,2)\times(1,2,3)$ (Beräkning av kryssprodukt)
(Givet i en ON-bas)

$$(1,0,2)\times(1,2,3) = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = (-4, 3-2, 2) = (-4, -1, 2)$$

ALGEBRA FÖRELÄSNING 7 2001/9/24

Kap 7 Matriser

Ex: $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ x-y-2z=2 \\ 2x-4y+z=3 \end{cases}$ $\begin{matrix} (-1) & (-2) \end{matrix}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2y-3z=1 \\ 2y-z=1 \end{cases}$

Koefficientmatrisen är:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix}(-1)\\(-2)\end{matrix} \underset{\text{rad-ekvivalent med}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) (-) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2y-3z=1 \\ 2z=0,\ z=0 \end{cases}$ $\quad x = 1+\frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, $\quad y=\frac{1}{2}$

- Bokföringen av elementära radoperationer blir enklare mha koefficientmatriser!

Om vi sätter

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

vi kan skriva ekvationssystemet ovan på matris-form:

$$A\underline{X} = B$$

där vi med $A\underline{X}$ avser kolonnvektorn vi erhåller där varje rad i A skalärmultipliceras med

$$A\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{rad} \cdot \underline{X}^T \\ \text{rad } 2 \cdot \underline{X}^T \\ \text{rad } 3 \cdot \underline{X}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y+z \\ x-y-2z \\ 2x-4y+z \end{pmatrix}$$

Def 1. En matris är ett rektangulärt schema av tal. 3×1 matris 3 rader 1 kolonn

rad, kolonn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

typ: $m \times n$

m = antal rader

n = antal kolonner

$m \cdot n$ = antal element

Vi skriver också $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ $\quad 1 \le i \le m$ rader, $1 \le j \le n$ kolonner

matriselement

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{e} & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ av typ: 2×3 $\quad a_{22} = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 4×1 kolonnvektor $\qquad \underset{\substack{1\times5 \\ \text{radvektor}}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}} = (1,2,3,4,5) \in \mathbb{R}^5$

$= \{1\times5 \text{ matriser}\}$ mängden av alla

$= \{5\times1 \text{ matriser}\}$

Def: RÄKNEOPERATIONER

Addition (+); Antag att typ A = typ $B = m\times n$. Då är

$$C = A+B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (\underbrace{a_{ij}+b_{ij}}_{=c_{ij}})$$

Ex:

$$\underset{2\times3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} + \underset{2\times3}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+3 & 2+1 \\ 0+(-1) & 1+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \underset{2\times3}{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

Anmärkning: Två matriser $A=(a_{ij})$ och $B=b_{ij}$ är lika precis då de är av samma typ! Och $a_{ij}=b_{ij}$

II Multiplikation med skalär. $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda A = (\lambda a_{ij})$

$\underset{m \times n}{0 \cdot A} = \underset{m \times n}{\mathbb{O}}$ nollmatrisen av samma typ som A (nollor på alla platser)

Ex: $3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

III Multiplikation

Ex $\underset{2\times 3}{\overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}} \underset{3\times 2}{\overset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 2+4+3 & 0+4+21 \\ \cdot & \\ +1-1+0 & 0-1+0 \end{pmatrix} = \overset{AB}{\begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$

rad 1 × k 1

måste vara lika

En matris av typen 2×2 fås

Antag typ $A = m \times p$, typ $B = p \times n$

Då är $A \cdot B$ den matris som är av typ $m \times n$, och dess element på plats ij är skalärprodukten av i:te raden i A med j:te kolonnen i B, Dvs.

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$BA = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}} \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1·2+0·1 1·4+0·0 1·3+1·0

av typ 3×3

$AB \neq BA$

matrismultiplikation är EJ kommutativ!!

41

Räknelagar (Sats)

(i) $A + B = B + A$

$(A+B)+C = A+(B+C)$

$A + \vec{0} = A$

$A + (-1)A = \vec{0}$

(ii) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

$1 \cdot A = A$

$0 \cdot A = \mathbb{O}$

$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

iii) * $(AB)C = A(BC)$

$(A+B)C = AC + BC$

$A(B+C) = AB + AC$

Bevis av *

	A	B	C
typ	$m \times p$	$p \times q$	$q \times n$

Antag $A = A = (a_{11}, a_{12}, \dots a_{1p})$ $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$ $C = (c_{11})$

typ $1 \times p$, $p \times 1$, 1×1

Då är $G = AB$ $(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1p}b_{p1})$

$H = BC = \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} \\ b_{21}c_{11} \\ \vdots \end{pmatrix}$ Dvs: $(AB)C = (a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + \dots a_{1p}$

42

$A(BC) = (a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + \dots + a_{1p}b_{p1}c_{11})$

Dvs. LIKA !!

Transponering

Byt plats på rader och kolonner.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}_{4\times 2} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$ Transponatet a A

Def: Om $A = (a_{ij})_{m\times n}$, så är $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$

Dvs. $a^T_{ij} = a_{ji}$

Ex

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Diagonalelementen ändras ej !

$a^T_{21} = a_{12} = 2$

För kvadratiska matriser $(m=n)$

Spegla elementen i huvuddiagonalen.

$X = (1,2,3)$ så är $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Sats 2

$(A^T)^T = A$ $\qquad * (AB)^T = B^T \cdot A^T$ Märk ordningen!

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} -1+2 \\ 1+2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = (1,3)$$

$$B^T A^T = \underset{1\times 2}{(-1,1)} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}} = .$$

Bevis av * Vi visar att $AB = (B^T A^T)^T$

Elementet på plats ij i $(B^T A^T)^T$ är elementet på plats ji i $B^T A^T$ som är skalärprodukten av rad j i B^T med kolonn i i A^T

$= (\text{kolonn } j \text{ i } B) \cdot (\text{rad } i \text{ i } A)$

$=$ elementet på plats ij i AB

KAPITEL 7. EKV. SYSTEM *Föreläsning 8* 27/9/01

Ex:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}$$

$X_1 \; X_2 . \quad B_1 B_2$

$AX = B$ Svarar mot ett ekv. system

$AX_1 = B_1 \qquad AX_2 = B_2$

Utökade koefficientmatrisen är

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right] \begin{matrix} 1 \; -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right] -\frac{1}{2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Ekvations-matrisen $\qquad X$

Sats 3 (Om linjära ekv. system)

Antag att A är en kvadratisk matris av typen $n \times n$
Då gäller:

(i) $AX = 0$ Har bara den triviala lösningen $X = 0$

$\Longleftrightarrow$

(ii) $AX = Y$ har för varje Y en entydig lösning X.

Bevis: Om $A = (a_{ij})_{n \times n}$ så har ekvationen i (i) och (ii) utökade koefficientmatriser:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} x_{11} & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & & x_{nn} & 0 \end{array}\right]$$

Om (i) gäller, så erhåller vi efter elementära radoperationer ett system av typen: $RX = 0$,
då $R = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots \\ 0 & x_{nn} \end{bmatrix}$

Där alla diagonalelement $r_{ii} \neq 0$ $(i = 0, 1, \ldots n)$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
ty annars får vi oändligt många lösningar
$(r_{ii} = 0 \Rightarrow x_i$ fri variabel$)$

Samma radoperationer utförda på systemet $AX = Y$ ger att $RX = \hat{Y}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & \hat{y}_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & \hat{y}_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{n2} & \hat{y}_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} x_{11} & \cdots & & \hat{y}_1 \\ & \ddots & & \hat{y}_2 \\ 0 & & x_{nn} & \hat{y}_n \end{array}\right]$$

Härav följer att vi via återsubstitution kan bestämma
$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \left(x_n = \frac{\hat{y}_n}{r_n} \cdots \right)$

$R\bar{X} = \hat{Y}$; $r_{11}x_1 + \dots r_{nn}x_n = \hat{y}_n$ ☒

Def 5: Den kvadratiska matrisen A (ty $n\times n$) sägs vara **inverterbar** om det finns en matris B så att:

$$AB = BA = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Vi skriver $B = A^{-1}$

Ex:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Då är
$$BA = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3+2 & 6-6 \\ 1-1 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Måste nu visa att AB blir samma, = (enhetsmatrisen)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3+2 & -2+2 \\ -3+3 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alltså är B inversen till A!

OBS! Inversen är entydigt bestämd!

Antag att $\begin{cases} AB = BA = I \\ AC = CA = I \end{cases}$

Då är $C = C\cdot I = C(AB)$
$= (CA)B = IB = B$.

Enhetsmatrisen gånger vilken matris som helst = matrisen i fråga. Fungera "som en etta"

Om det finns en invers, finns den bara en enda!

ÖVNING: $AI = IA = A$

Ex: Betrakta matrisekvationen

$\ast$ $AX = Y$

Om A är inverterbar med inversen A^{-1}, så ger $\ast$ att:

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}Y, \quad X = A^{-1}Y$$

SATS 3 KOMPLETT

(i) $AX = 0$ har bara den triviala lösningen $X = 0$

$\Leftrightarrow$

(ii) $AX = Y$ har för varje Y en entydig lösning X

$\Leftrightarrow$

(iii) A är inverterbar.

Ex Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_2 + 3x_2 = -2 \end{cases} \quad \text{matrisform: } \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \underset{Y}{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Enligt tidigare uträkningar vet vi att:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dvs:

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 21+4 \\ 7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}!$$

Om man har inversen: kanon sätt.

Annars: ta fram inversen, om stort sys. = lättare.

Def: V är en vänsterinvers till A, om $VA = I$ ← enhetsmatris

H är en högerinvers till A, om $AH = I$ ettor på diagonalen, nollor för övrigt

Sats (Lemma 3)

Om A är kvadratisk, så gäller

1. V är en vänsterinvers $\Rightarrow$ A inverterbar, $V = A^{-1}$
2. H är en högerinvers $\Rightarrow$ A inverterbar, $H = A^{-1}$

(Om A är kvadratisk, sänks kraven, och vi behöver endast testa om $V = A^{-1}$ eller $H = A^{-1}$. Om A ej kvadratisk; måste: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ vara uppfyllt = vi måste testa båda håll)

Bevis av 1:

Antag att $VA = I$

Låt X vara en lösning till $AX = 0$

Då gäller att:

$V(A\hat{X}) = V\mathbf{0} = 0$ distributiv lag för matriser →

$V(A\hat{X}) = (VA)\hat{X} = I\hat{X} = \hat{X}$

Dvs: $\hat{X} = 0$

Dvs: Ekvationen $AX = 0$ har bara den triviala lösningen $x = 0$.

49

Enligt Sats 3 finns då en entydig lösning till ekvationen: $AX = I$ (n st högerled var och en ger upphov till)

ex: $AX_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $AX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = [x_1, x_2, \dots x_n]$

Detta ger:

$\underbrace{V(AX)}_{= X!} = VI = V$ Dvs: $V = X$

Dvs: $AV = VA = I$ Dvs: V är inversen till A!

∴ En högerinvers är även vänsterinvers!

Bevis av 2: Antag att $AH = I$

Då är A en vänsterinvers till H, och enligt beviset av 1 ovan, så är då A också en högerinvers till H.

$AH = HA = I$ H är inversen till A.

För att avgöra om A är inverterbar, så löser vi ekvationssystemet: A = typ $n \times n$

$AX = I$ (dvs: undersöker om A har en högerinvers. Detta räcker, ty A kvadratisk)

Om denna ekvation har entydig lösning X, så är A inverterbar, och $A^{-1} = X$.

$\Rightarrow$ A är inverterbar (iii)

50

Bestäm inversen till $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ Om den finns!

Lös ekv. systemet:

$AX = I$, $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Om vi ej får nollrader, el orimligheter $\exists$ en invers!)

$$(AI) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-2)\ (-3) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) (-1)\ \tfrac{1}{3} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \left(\tfrac{1}{2}\right) \sim$$

Vill ha ettor på diagonalen

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \left(-\tfrac{2}{3}\right) (3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) A^{-1}$$

ytterligare räkningar

$x_1 \quad x_2 \quad x_2$ lösningen X

Duggan: t.om kapitel 9.

ÖVNING: Räkne lagarna för inverser. Sats 4 i boken

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ (Sats 5.3)

Definition 9.1 Volym me tecken

$V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) =$ (Volymfunktionen)

$$= \begin{cases} W(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) & \text{om } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \text{ är pos. orient.} \\ W(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) & \text{om } \text{— " —} \text{ neg. orient.} \end{cases}$$

Anm: $V(a_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)$

Kap 9. Determinanter

Lemma 1:

(i) $V(\vec{a}_1' + \vec{a}_1'', \vec{a}_2, \vec{a}_3) = V(\vec{a}_1', \vec{a}_2, \vec{a}_3) + V(\vec{a}_1'', \vec{a}_2, \vec{a}_3)$

(ii) $V(\lambda \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \lambda \cdot V(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \vec{a}_3)$

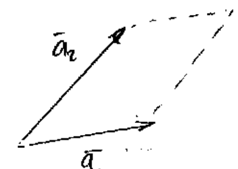
(iii) Om två vektorer i $V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ byter plats,
så byter V tecken.

(iv) Om två vektorer är lika, så är $V(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = 0$

Bevis: Följer av att: $V(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)$ + Sats 5.2 + Sats 5.3

Def: Area med tecken

Låt $\bar{a}$ & $\bar{a}_2$ vara två vektorer som spänner upp en parallelogram. ($\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \pi$)

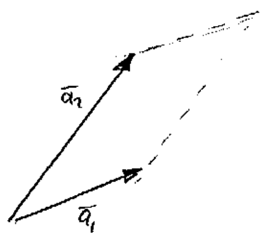


Låt $\hat{e}$ vara en fix normalvektor till π, $|\hat{e}| = 1$

Låt $\vec{e}$ vara $\perp$ $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ så att

$\bar{a}_1 \bar{a}_2$ & $\vec{e}$ är positivt orienterade

om $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ är det

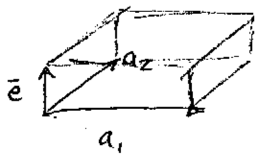


$|\bar{e}| = 1$

Sätt $\overset{\text{area}}{V_a(\bar{a}_1, \bar{a}_2)} = \overset{\text{volym}}{V(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)}$ $\quad xx\,m^2 - xx\,m^3$

$= \text{arean}$ (med tecken) av parallellogrammen!

$= \vec{e}_1 \cdot (a_1 \times a_2)$



Vi utgår ifrån en fix normalvektor.
Byter vi den, ändras volym och area

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (A_1, A_2, A_3)$$

$\quad A_1 \quad A_2 \quad A_3$

Låt $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$ vara en bas sätt $\bar{a}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + a_{31}\bar{e}_3$

$\bar{a}_2 =$

$\bar{a}_3$

Vi undersöker $V(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \bar{a}_1 \cdot (a_2 \times a_3)$

$$a_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) = a_1 \cdot \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_1 \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} \bar{e}_3 \times \bar{e}_1 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 \right)$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \underbrace{\bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)}_{V(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} \underbrace{\bar{e}_2 \cdot (\bar{e}_3 \times \bar{e}_1)}_{= V(e_1, e_2, e_3)} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \underbrace{\bar{e}_3 \cdot (\bar{e}_1 \times \bar{e}_2)}_{V(e_1, e_2, e_3)}$$

byt plats 2ggr

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \times \bar{a}_3 = a_1 \cdot \begin{vmatrix} e_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ a_{12} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{cases} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = \bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_1 \times \bar{e}_2) = 0 \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = \bar{e}_2 \cdot (\bar{e}_1 \times \bar{e}_2) = 0 \end{cases}$$

$$= \left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \right) \cdot V(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}) \cdot V(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

(a_1, a_2, a_3 = vektorer i rummet
A_1, A_2, A_3 = schema av tal)

Def. Determinant

$\underline{\det A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Ex: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}$

$= 1\cdot1\cdot0 + 2\cdot1\cdot3 + 3\cdot0\cdot1 - 3\cdot1\cdot3 - 1\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot0 = -4$

Sarrus regel!

Sats 1: Volymsatsen — Volymen av 3 vektorer

$$V(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = (\det A)\, V(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$A = A_1, A_2, A_3$

ger koordinaterna för vektorn i basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

(vi kan skriva $\bar{a}_1 = \bar{A}_1^T$) o.s.v

Följdsats

det $A \neq 0 \Leftrightarrow \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ är linjärt oberoende

$\Leftrightarrow$ ekvationen $\quad A\bar{X} = 0 \qquad \bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

har endast den triviala lösningen

Ty: $A\bar{X} = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$

$\Leftrightarrow$ A är inverterbar

(Har A en invers? Kolla inversen!)

Räkneregler

Sats2

$\det A^T = \det A$

Gäller endast ... 3x3 determinanter.

Bevis:

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{21}a_{32}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{31} = \det A \,!$$

$\blacksquare$

Sats 3 $\quad A = (A_1, A_2, A_3)$

(A) $\det(A_1' + A_1'', A_2, A_3) = \begin{pmatrix} \text{Volymsatsen och} \\ \text{Lemma 1} \end{pmatrix}$

(gäller v m. det. byt ut stora A mot små a)

$= \det(A_1', A_2, A_3) + \det(A_1'', A_2, A_3)$

55

Ex.
$$\begin{vmatrix} 1+2 & 2 & 3 \\ 1+3 & 1 & 2 \\ 1+7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Forts. Sats3

(B) $\operatorname{Det}(\lambda A_1, A_2, A_3) = \lambda \cdot \det(A)$

(C) Om två kolonner byter plats, så byter determinanten tecken.

Ex: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$

Forts. Sats 3

(E) $\det(A_1 + cA_2, A_2, A_3) = \det(A)$

56

ALGEBRAFÖRELÄSNING 4/10/2001 NR 10

det A : summa av kvoter. Precis Ett element från varje rad, och varje kolonn.

Huvudsatsen: om en av förutsättningarna sann ⇒ alla sanna
en - " - falsk — " — falska
ty ekvivalens råder mellan förutsättningarna.

Sats punkt (8):

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Bevis: (För 3x3 determinanter)

$A = (A_1, A_2, A_3)$
$B = (B_1, B_2, B_3)$
$C = (C_1, C_2, C_3)$

Då är: $C = A(B_1, B_2, B_3) = (\underbrace{AB_1}_{C_1}, \underbrace{AB_2}_{C_2}, \underbrace{AB_3}_{C_3})$

T.ex är: $C_1 = AB_1 = (A_1, A_2, A_3)\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = b_{11}A_1 + b_{21}A_2 + b_{31}A_3$

Låt $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vara en bas, och sätt

$\bar{a}_i = \bar{a}_{1i}e_1 + \bar{a}_{2i}e_2 + \bar{a}_{3i}e_3 \quad (i = 1, 2, 3)$

Och sätt $\bar{C}_i = b_{1i}\bar{a}_1 + b_{2i}\bar{a}_2 + b_{3i}\bar{a}_3$
$= c_{1i}\vec{e}_1 + c_{2i}\vec{e}_2 + c_{3i}\vec{e}_3$

Då är enligt volymsatsen: (parallellpiped som spänns upp av vektorerna)

1) $V(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3) = \det(B) \cdot V(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$

(Om $\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3$ ej är en bas = de är komplana (spänner ej upp en parallellpiped. Då är c_1, c_2, c_3 en linjärkombination av a_1, a_2, a_3, som även de är komplana.
Detta ger $VL = HL \iff 0 = 0$)

Volymsatsen igen ger:

(2) $V(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \det(A)\, V(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

Volymsatsen igen ger:

(3) $V(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3) = \underbrace{\det(C)}_{\det(AB)} \underbrace{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}_{\neq 0}$

∴ (1), (2), (3) ger satsen.

Låt $A = (a_{ij})_{n \times n} \quad (n = 2, 3)$

<u>Underdeterminanter D_{ij}</u> till element a_{ij} är determinanten för den matris som erhålls ur A genom att stryka rad i & kolonn j.

<u>Ex:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & \cancel{7} \\ \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 0 & 1 & \cancel{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Vi kan utveckla en determinant längs 1:a kolonnen:

godt. matris

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}D_{11} - a_{21}D_{21} + a_{31}D_{31}$$

Men:

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3$$

$$\det(A) = -\det(A_2\, A_1\, A_3) = \det(A_3\; A_1\; A_2)$$

Vilket ger att:

$$\det(A) = -a_{12}D_{12} + a_{22}D_{22} - a_{32}D_{32}$$
$$= a_{13}D_{13} - a_{23}D_{23} + a_{32}D_{33}$$

- summa av index udda = neg. tecken
- — " — jämnt = pos. tecken

Sats 9.6 Utvecklingssatsen.

Alla operationer gäller såväl för rader som för kolonner, ty $\det(A) = \det(A^T)$

Ex:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \text{(utveckla längs kolonner)}$$

$$= 2(-1)^{1+2}D_{12} + 2(-1)^{2+2}D_{22} + 0(-1)^{3+2}D_{32} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2(-5) + 2(1) = 12$$

Utveckla längs den rad/kolonn med flest nollor.

Faktorn $(-1)^{i+j}D_{ij}$ kallas för det <u>algebraiska komplementet</u> till a_{ij}

Def: ADJUNKTEN TILL A

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} D_{11} & -D_{21} & D_{31} \\ -D_{12} & D_{22} & -D_{32} \\ D_{13} & -D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}$$

$$[\text{adj}\, A]_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ji}$$

SATS 9.7. Om $\det(A) \neq 0$,

så är A inverterbar, och:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}\, A$$

tal, matris

talet multipliceras in på varje plats i matrisen

(*) $(\text{adj}\, A)A = A(\text{adj}\, A) = \det A \cdot I$)

Bevis: Följer av utvecklingssatsen.

ÖVNING: Gör beviset själv!

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $D_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$, $D_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$D_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$ $D_{22} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$, $D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$

$D_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$ $D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -6 & -5 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \begin{bmatrix} \text{utveckling} \\ \text{längs} \\ \text{kolonn 2} \end{bmatrix} = 0\cdot(-3) + 1\cdot(-6) - 1\cdot 5 = -11$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{11} \cdot \text{adj}(A)$$

CRAMERS REGEL SATS 9.8

Antag att $\det(A) \neq 0$

Då gäller att ekv. systemet $AX = Y$

$$\left(A = (a_{ij})_{3\times 3}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$$

har den entydiga lösningen

ersätt en kolonn i taget m. y

$$x_1 = \frac{\det(Y\ A_2 A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_1\ Y\ A_3)}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\det(A_1 A_2 Y)}{\det(A)}$$

(Kräver mer arbete än Gauss el.)

Ex: Bestäm x_2 i lösningen till:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = -\frac{1}{11} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-49}{-11} = \frac{49}{11}$$

Bevis: $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \exists \Rightarrow$ entydig lösning $X = A^{-1}Y$

Dvs:

★ Viktigt $Y = AX = (A_1 A_2 A_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}_{\text{Allt hänger på denna omskrivning}}$!

Då är:

$$\det(Y\ A_2\ A_3) = \det(x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3\ \ A_2\ A_3)$$

$$= (\text{enl. räkneregler}) = x_1 \det(A_1\ A_2\ A_3) + x_2 \det(A_2\ A_2\ A_3)$$

$$+ x_3 \det(A_3\ A_2\ A_3)$$

$$\det(A_1' + A_1''\ A_2\ A_3) = \det(A_1'\ A_2\ A_3) + \det(A_1''\ A_2\ A_3)$$

---

teori på duggan: t.o.m nr 8 på listan.

---

uppg: t.o.m onsdagens övning.

Determinanter av GODTYCKLIG ORDNING

$A = (a_{ij})_{n\times n}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n}$$

där $P = [P_1, P_2, \ldots, P_n]$ är en permutation av $[1, 2, 3, \ldots, n]$

Ex: $[3, 1, 2]$ är en permutation av $[1, 2, 3]$

Jämn perm., ty gör två defekter: $3>1$ och $3>2$

* jämna perm: föregås av +
* udda —"— : —"— −

+ tecken om $P = [P_1, \ldots, P_n]$ är jämn

− tecken om —"— udda.

Läs igenom bokens förklaring.
Satserna kommer dock ej på tentan.

$\exists\ n!$ permutationer av $[1\ 2\ 3\ \ldots\ n]$ tal

hälften udda / hälften jämna

Ex: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-2) \\ (-4) \end{matrix} \sim \begin{vmatrix} -5 & -7 & 9 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ -10 & -14 & 0 & -11 \end{vmatrix}$ Sats 9.12

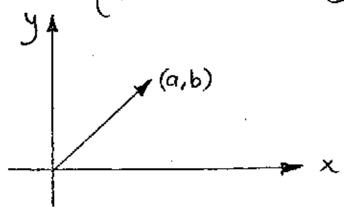
Utveckla, ta underdeterminant, underdeterminant av underdete

ALGEBRA - FÖRELÄSNING Mån. LV 6 2001/10/15

$\mathbb{R}^n$ Komplexa tal

$\mathbb{R}^2 = \{\text{alla talpar}\}$ (mängden av)

$= \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.



$+ \ (a,b) = ((a,b) + (c,d)) = (a+c, b+d)$

$\lambda (a,b) = (\lambda a, \lambda b)$

längd, absolutbelopp:

$|(a,b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Skalärprodukt:

$(a,b) \cdot (c,d) = (ac + bd)$

$\mathbb{R}^3 \ \{\text{alla tripplar}\} =$

$= \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}\}$

+ : komponentvis!

$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

längd: $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Skalärprodukt: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

⋮

$\mathbb{R}^n$ {alla n-tiplar} $= \{\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$

$(= \{$alla $1\times n$ matriser$\})$

$+ \quad \bar{x} + \bar{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

$\lambda \bar{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

längd-absolutbelopp

$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$(|\bar{x}| = 0 \Rightarrow x = \bar{0})$

Skalärprodukt: $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

$(\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ så säger vi att $\bar{x} \perp \bar{y})$

Räknelagar:

$x \cdot y = y \cdot x \quad , \quad (\lambda \bar{x}) \cdot \bar{y} = \lambda(\bar{x} \cdot \bar{y})$

$(\bar{x}+\bar{y}) \cdot \bar{z} =$ "1:a termen i summa $= (x_1+y_1)z_1 = x_1z_1 + y_1z_1$"

$= \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z}$

$\bar{x} \cdot \bar{x} = |\bar{x}|^2 \geqslant 0$ med likhet endast om $\bar{x} = 0$

Sats:

1) $x \cdot y = 0 \Rightarrow |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$

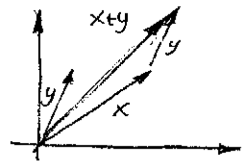
2) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ Triangelolikheten i $\mathbb{R}^n$

3) $|x \cdot y| \leqslant |x||y|$ Cauchy Schwarz olikhet

Bevis:

1) $|\bar{x}+\bar{y}|^2 = (\bar{x}+\bar{y}) \cdot (\bar{x}+\bar{y}) \overset{\text{(räknelagar sk-produkt)}}{=} \bar{x} \cdot \bar{x} + \underbrace{\bar{x} \cdot \bar{y}}_{=0} + \underbrace{\bar{y} \cdot \bar{x}}_{=0} + \bar{y} \cdot \bar{y}$

$= |\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2$



2) $|x+y|^2 = (\bar{x}+\bar{y}) \cdot (\bar{x}+\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{x} + 2\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{y}$

$= |\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2 + 2\bar{x} \cdot \bar{y} \leqslant$ (enl. (3))

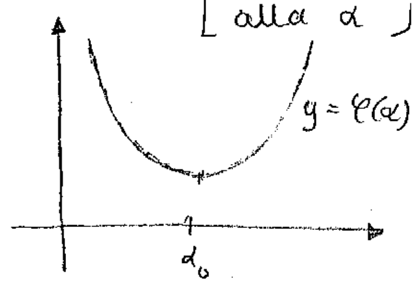
$\leqslant |\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2 + 2|\bar{x}||\bar{y}| = (|x| + |y|)^2$

3) $0 \leqslant |\bar{x} - \alpha\bar{y}|^2 = (\bar{x} - \alpha\bar{y})(\bar{x} - \alpha\bar{y}) = |\bar{x}|^2 + \alpha^2|\bar{y}|^2 - 2\alpha\bar{x}\bar{y}$

$\boxed{y \neq \bar{0}}$

$= \varphi(\alpha)$ [$\varphi(\alpha) \geqslant 0$ för alla α]

en andragradsekvation i α.



Vi söker nollställen till $\varphi(\alpha)$:

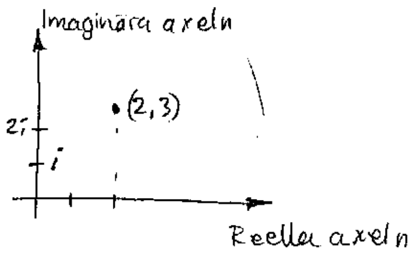
$\varphi'(\alpha_0) = 2\alpha_0|\bar{y}|^2 - 2\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$

$\alpha_0 = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{y}|^2}$

Dvs: $0 \leqslant \varphi(\alpha_0) = |x|^2 + \frac{(x \cdot y)^2}{|y|^{4}} \cdot |y|^2 - 2 \frac{(x \cdot y)^2}{|y|^2} =$

$= |\bar{x}|^2 - \frac{(\bar{x} \cdot \bar{y})^2}{|\bar{y}|^2} \Leftrightarrow (\bar{x} \cdot \bar{y})^2 \leqslant |\bar{x}|^2 \cdot |\bar{y}|^2$

$\mathbb{C} = \{ \text{komplexa tal} \}$ Ex $z = 2+3i$!



" $i = \sqrt{-1}$ "

= Vektorrummet $\mathbb{R}^2$ på vilken det finns en "utvidgad" multiplikation definerad.

Paret $(a,0)$ identifieras med talet $a \in \mathbb{R}$.

$(0,1)$ betecknas ofta med i

Addition $z = (a,b)$, $u = (c,d)$

Då är: $z+u = (a+c, b+d)$

$\lambda z = (\lambda a, \lambda b) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Anmarkning: $z = (a,b) = (a,0) + (0,b) =$

$= (a,0) + b\underbrace{(0,1)}_{=i} = a + ib$

$a(1,0) +$

$\boxed{\text{Ex } (2+3i) + (1-i) = (2+1) + i(3-1) = 3+2i}$

Multiplikation: Denna måste uppfylla

1, $(a,0) \otimes (c,d) = (ac, ad)$

2, $(0,1) \otimes (0,1) = (-1,0)$

Detta ger definitionen:

$(a,b) \otimes (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

$\lambda \cdot z = \lambda(a+bi) = \lambda a + \lambda bi$

$i^2 = -1$, Dvs:

$x = \pm i$ är lösning till

ekv: $x^2 = -1$

OBS! 1 & är 1 & 2 OK!

[illegible] Alla vanliga räkneregler gäller!

med $i^2 = -1$

Vi skriver: $(a,b) = a+ib$!

Utvidgning av de reella talen till de komplexa $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Komplext tal: tal i talplanet.

Omöjligt att utvidga till högre dimensioner!

Sats A3 Räkneregler för Komplexa tal

1. $0 + z = z$
2. $z + u = u + z$
3. $(z+u)+w = z + (u+w)$
4. $z+w = u+w \Rightarrow z = u$
5. $1 \cdot z = z$
6. $z \cdot u = u \cdot z$
7. $(z \cdot u) \cdot w = z \cdot (u \cdot w)$
8. $u \cdot z = 0$, $u \neq 0 \Rightarrow z = 0$
9. $z \cdot (u+w) = z \cdot u + z \cdot w$

Räknereglerna 1-6 följer direkt av räknereglerna för vektoraddition (på $\mathbb{R}$)

6-9 får man jobba lite mer med! (dock överkomligt!)

OBS! Vanliga räkneregler gäller!

med $\boxed{i^2 = -1}$

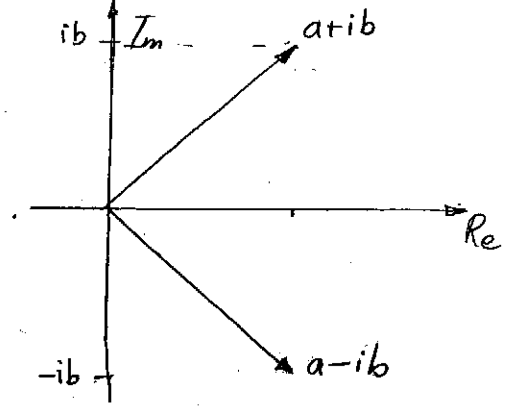
Ex: $(2+3i)(1-i) = 2+3i-2i+(3i)(-i) = 2-3i^2+i = 5+i$

Def: Absolutbelopp: $(z=a+ib)$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Konjugering:

$\bar{z} = a-ib$



OBS! $\bar{\bar{z}} = \overline{a-ib} = a+ib = z$

OBS! $z\cdot\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2-i^2b^2 = a^2+b^2 = |z|^2$

Sats 2,3: $z = a+ib$, $w = c+id$

1, $\overline{(z+w)} = \bar{z}+\bar{w}$

2, $\overline{(z\cdot w)} = \bar{z}\cdot\bar{w}$

3. $|z\cdot u| = |z|\cdot|u|$

4. $|z+u| \leq |z|+|u|$ Triangelolikheten i $\mathbb{R}^2$

Bevis 2):

HL: $\bar{z}\cdot\bar{w} = (a-ib)(c-id) = ac-bd-i(ad+b)$

VL: $\overline{(z\cdot w)} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{ac-bd+i(bc+ad)}$

$= HL$ Ok!

Bevis 3:

$|z\cdot u|^2 = (z\cdot u)\overline{(z\cdot u)} = (\text{enl. } 2) = zu\cdot\bar{z}\cdot\bar{u} = (\text{kommutativ})$

$= (z\cdot\bar{z})\cdot(u\cdot\bar{u}) = |z|^2\cdot|u|^2$ ∎

Ex: $|(2+3i)^2(1-7i)^4| \overset{(3)}{=} |(2+3i)^2|\,|(1-7i)^4| \overset{(3)}{=} |2+3i|^2\cdot|1-7i|^4$

$= (2^2+3^2)^{2/2}\cdot(1^2+(-7)^2)^{4/2} = 13\cdot 50^2$ $(32\,500)$

Division: Def: $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Ex: $\frac{1}{1+3i} = \frac{1}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i}{1^2+3^2} = \frac{1-3i}{10}$

def: $\frac{w}{z} = w\cdot\frac{1}{z}$

Ex: $\frac{1+3i}{1+7i} = \frac{(1+3i)(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)} = \frac{1-21+10i}{50} = \frac{-20+10i}{50} = \frac{1}{5}(-2+i)$

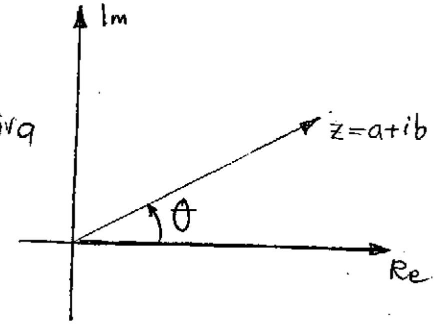
Räkneregler

(1) $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$! övning!

(2) $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$

POLÄR FORM:

$\arg(z) = \theta$ är vinkeln mot positiva reella axeln



$r = |z|$

Då är: $\frac{b}{r} = \sin\theta$, $\frac{a}{r} = \cos\theta$

Dvs: $a + ib = r\cos\theta + i \cdot r\sin\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= r \cdot e^{i\theta}$

Def: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Sats:

$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

ALGEBRA - TORSDAG VECKA 6 11/10/2001

$\mathbb{C} = \{\text{komplexa tal}\} = \mathbb{R}^2 + \text{multiplikation}$

$z = (a,b) = a + ib$

$w = (c,d) = c + id$

$z \cdot w = (a,b) \otimes (c,d)$

$\stackrel{def}{=} (ac - bd,\ ad + bc)$

ger t.ex att: $i^2 = (0,1) \otimes (0,1) = (-1,0) = -1$

$\underbrace{(a,0)}_{=a} \otimes \underbrace{(c,0)}_{=c} = a \cdot c$ $= a \cdot c$

Bevisa: Räknelag 8 själva

Bevis av 9:. $z \cdot (u + w) = z \cdot u + z \cdot w$

Bevis: Sätt $z = (a,b)$, $u = (c,d)$, $w = (e,f)$

Då är: $z \cdot (u + w) = (a,b) \otimes (c+e,\ d+f) \stackrel{def}{=}$

$= (a(c+e) - b(d+f),\ b(c+e) + a(d+f))$

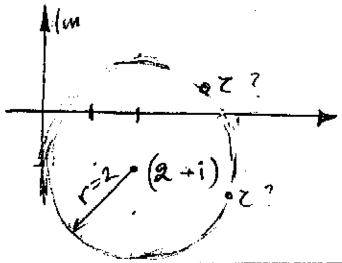
$= (\underline{ac - bd} + \underline{ae - bf},\ \underline{bc + ad} + \underline{be + af}) =$

$= (ac - bd,\ bc + ad) + (ae - bf,\ be + af)$

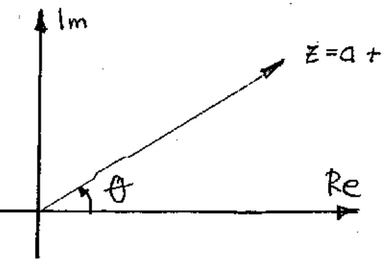
multiplikation baklänges $\stackrel{def}{=} (a,b) \otimes (c,d) + (a,b) \otimes (e,f) = zu + z \cdot w$

Ex: Geometrisk tolkning av $\underbrace{|z-u_0|}_{\text{avstånd fr. spetsen på } z \text{ till spetsen på } u} = r$

Tag: $u_0 = 2-i$, $r = 2$



Cirkel med centrum i $(2-i)$
och med radien 2, har ekv:
$|z-(2-i)| = 2$



POLAR FORM

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

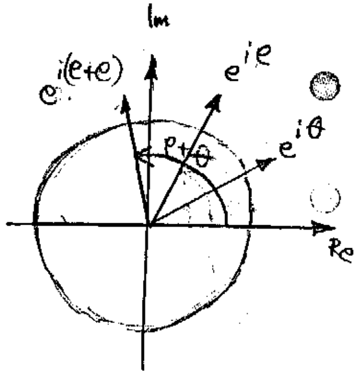
$r = |z|$, $\theta = \arg(z)$

Def. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Sats: $e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$!

OBS! $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$

$e^{i(\varphi+\theta)}$ är $e^{i\varphi}$ vriden θ varv.



De Moivres Formel:

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, n = heltal

$\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$!

$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

73

Bevis av sats:

$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi - i(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi) =$

$= \left[\text{Trigformler}\right] = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)$

$= e^{i(\theta+\alpha)}$

$(e^{i\theta})^2 = e^{i2\theta}$, $(e^{i\theta})^3 = e^{i2\theta}\cdot e^{i\theta} = e^{i3\theta}$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

$z^m = \frac{1}{z^m}$, $(e^{i\theta})^{-m} = \frac{1}{(e^{i\theta})^m} = \frac{1}{e^{in\theta}} = e^{-im\theta}$

De Moivres formler gäller för alla θ, alla m.

konjugat $\rightarrow$ $e^{i\theta} = \frac{\overline{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}\cdot\overline{e^{i\theta}}} = \frac{e^{i\theta}}{|e^{i\theta}|^2} = \overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \partial$

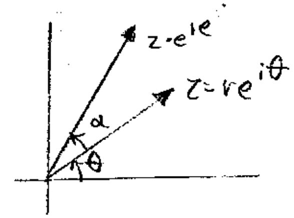
$= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$

Antag $z_1 = r_1 e^{i\theta}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

Då är $z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\cdot e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

= "Adderar argumenten, och multiplicera längderna"

OBS! $z\cdot e^{i\varphi}$ bedyder att z vrids
φ grader MOTSOLS !

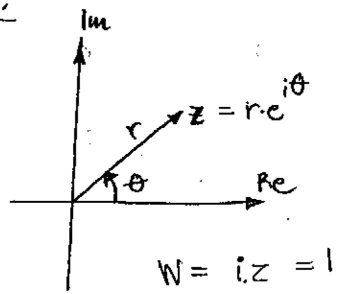


74

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

Def: $e^z = e^{a+bi} \overset{df}{=} e^a \cdot e^{ib}$

Ex:



Vad händer om vi multiplicerar Z med i ? (har vinkeln $\frac{\pi}{2}$ mot realaxeln).

$W = iz = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot re^{i\theta} = r \cdot e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$

Ex: Bestäm en formel för $\sin^3\theta$

Vi utnyttjar Eulers formler.

$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ ←

Då är $\sin^3\theta = \frac{1}{8i^3}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) =$

$= \frac{i}{8}\left((e^{i\theta})^3 - \underline{3(e^{i\theta})^2 \cdot e^{-i\theta}} + 3e^{i\theta} \cdot (e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3 \right) =$

$\left[e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = e^0 = 1 \right] \quad = \frac{i}{8}\left(e^{i3\theta} \underline{- 3e^{i\theta}} + 3e^{-i\theta} - e^{-i3\theta} \right)$

$= \frac{i}{8}\ (\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) - 3\cos\theta - 3i\sin\theta + 3\cos\theta - 3i\sin\theta$
$- \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$

$= \frac{i}{8}\ i(2\sin(3\theta - 6\sin\theta) = \underline{\underline{\frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta)}}$

75

Binomiska ekvationen

Betrakta ekvationen:

$z^n = w$ (Binomisk ekvation av ordningen n

Ex: $z^5 = 2i$

1/ Skriv om z & i ($=w$) på polär form.

$z = re^{i\theta}$, $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

2/ De Moivres formel ger:

$z^5 = (re^{i\theta})^5 = r^5 \cdot e^{i5\theta}$

Dvs $z^5 = 2i$ är ekvivalent med $r^5 e^{i5\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

3/ Detta ger $r^5 = 2$ och

$5\theta = \frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi \qquad m = \text{heltal}$

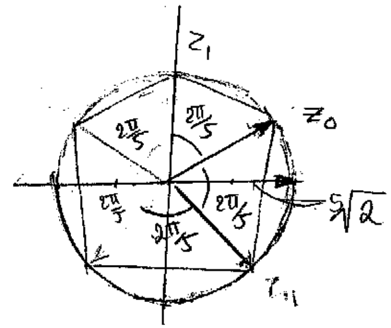
Dvs $r = \sqrt[5]{2}$ (OBS! Alltid positivt)

$\theta_n = \frac{\pi}{10} + m\frac{2\pi}{5}$

4) Lösningarna är:

$z_n = \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\theta_m} = \sqrt[5]{12}\ e^{i\left(\frac{\pi}{10} + m \cdot \frac{2\pi}{5}\right)}$

Rege l bunden 5-hörning.
längden av alla lösningar:
$\sqrt[5]{2}$. De skiljer sig $\frac{2\pi}{5}$
från varandra.



76

Binomiska ekvationer

$z^n = w$

1) $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$

2) De Moivres formel ger:

$r^n \cdot e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi}$

3. $\begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \varphi + m \cdot 2\pi \end{cases}$, m = heltal

$r = \sqrt[n]{\rho}$, $\theta_m = \frac{\varphi}{n} + m\frac{2\pi}{n}$

4. Lösn: $z_m = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\theta_m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Grafiskt sett fås: en regelbunden n-hörning med radien $r = \sqrt[n]{\rho}$

2:a gradsekvationer

$\boxed{\frac{1}{i} = -i \quad \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i}$

Ex:

(*) $iz^2 + (2-2i)z - 6 + 3i = 0$

Lösn:

1) Dela med koefficienten framför z^2

$z^2 + \frac{2-2i}{i}z - \frac{6}{i} + \frac{3i}{i} = 0$

$z^2 - (2+2i)z + 3 + 6i = 0$

2) Kvadrat komplettera!

$\boxed{(1+i)^2 = 2i}$

$\underbrace{(z-1-i)^2 - (1+i)^2}_{z^2-(2+2i)z} + 3 + 6i = 0$

$(z-1-i)^2 = 2i - 3 - 6i = -3 - 4i$

$z = (1+i) \pm$ "$\sqrt{(1+i)^2 - 3 - 6i}$"

= Vi söker ett komplext tal, vars kvadrat är lika med det som står under rottecknet. (Detta skrivsätt är dock odefinerat.)

3) Sätt $z - 1 - i = x + iy$ $(= u)$

Då är: $(z-1-i)^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy = \underbrace{-3-4i}_{=w}$

4. (Vet: två tal lika omm såväl im-delarna som re-delarna är lika.)

Identifiera realdel och imaginär del

$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$ $\quad x^2 + y^2 = |-3-4i| = 5$

(längden av w)

$(x+iy)^2 = w \quad |x+iy|^2 = |w| \iff x^2 + y^2 = |w|$

$2x^2 = -3 + 5 = 2$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$

(Använd ej detta för att beräkna y. Ty produkten av x och y ska bli negativ)

Insättning: $2xy = -4$ ger

$\boxed{x=-1,\ -2y=-4\ ,\ y=2,}\ \boxed{x=1\ \ 2y=-4\ ,\ y=-2}$

5. Vi finner att

$$Z_1 = x_1 + iy + 1 + i = \begin{bmatrix} x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \end{bmatrix} = -1 + 2i + 1 + i = \underline{\underline{3i}}$$

$$Z_2 = x_2 + iy_2 + 1 + i = \begin{bmatrix} x_2 = 1 \\ y_2 = -2 \end{bmatrix} = 1 - 2i + 1 + i = \underline{\underline{2-i}}$$

Divisionsalgoritmen

Ex.

$$p(z) = z^3 - (2-i)z^2 + (5-2i)z + 5i$$

$$q(z) = z^2 + 1$$

$$\frac{p(z)}{q(z)} \qquad \begin{array}{l} z - (2-i) \\ \hline z^3 - (2-i)z^2 + (5-2i)z + 5i \ \big|\ z^2+1 \\ -(z^3 \qquad\qquad\qquad z) \\ \hline 0 \ -(2-i)z^2 + (4-2i)z + 5i \\ -(-(2-i)z^2 \qquad\qquad (2-i)) \\ \hline 0 \quad (4-2i)z + 2 + 4i \end{array} \quad \begin{array}{l} = k(z)\ (\text{kvot}) \\ \\ \\ \\ \\ = r(z)\ (\text{rest}) \end{array}$$

$$\frac{p(z)}{q(z)} = z - (2-i) + \frac{(4-2i)z + 2 + 4i}{z^2+1} = k(z) + \frac{r(z)}{q(z)}$$

grad $r(z) <$ grad $q(z)$!

(Ändlig algoritm.
Varje steg reducerad grad $p(z)$ med ett.)

Sats 1.4.2

Om $p(z)$ och $q(z)$ är två polynom (grad $q(z) \geq 1$) så gäller att det finns polynom $k(z)$ och $r(z)$ så att $\boxed{\text{grad } r(z) < \text{grad } q(z)}$

och

$$p(z) = k(z) \cdot q(z) + r(z)$$

Faktorsatsen:

Om α ($\in \mathbb{C}$) är en rot till $p(z)=0$ (dvs $p(\alpha)=0$) så är $(z-\alpha)$ en faktor i $p(z)$.

$(p(z) = (z-\alpha)\,k(z))$

Bevis: Divisionsalgoritmen ger (vi delar $p(z)$ med $z-\alpha$)

$$p(z) = (z-\alpha)k(z) + \underbrace{r(z)}_{\text{gradtal} < 1} \leftarrow \text{konstant } C$$

$$= (z-\alpha)k(z) + C.$$

Tag $z=\alpha \Rightarrow C=0$

Problem: Har en algebraisk ekvation alltid en lösning?

$$* \; p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

Har ekvationen ovan en lösning?

Ex: $a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_1 = 0$

$\Rightarrow z^n = \dfrac{-a_0}{a_n}$ Denna ekvation är binomisk, och har precis n st lösningar. (Som ligger på en n-hörning)

($a_n - \dots - a_0$ = kan vara komplexvärda)

Algebrans Fundamentalsats

Ekv (*) har minst en lösning (om $n \geq 1$)

(Vi behöver ej kunna bevisa den.
Men kunna.)

Följdsats (sats 9)

(*) har precis n st lösningar, räknat med multiplicitet. Om $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ är rötter, så är

$$p(z) = a_n (z-\alpha_1)^{r_1} \cdot (z-\alpha_2)^{r_2} \dots (z-\alpha_m)^{r_m}$$

α_i har multiplicitet r_i och $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$

Ex: Polynom av gradtal 3 — nollställe m.

$$p(z) = (z-2)^2(z-i) = (z^2-4z+4)(z-i)$$

$$\overset{?}{=} z^3 - (4+i)z^2 + (4+4i)z - 4i$$

Har nollställe $z=2$ med multiplicitet 2.

— " — $z=i$ — " — 1.

Bevis av följdsatsen:

Enligt algebrans fundamentalsats finns en rot α_1 till $p(z)=0$.

Faktorsatsen $\Rightarrow$ Det finns polynom $q_1(z)$ så att

$p(z) = (z-\alpha_1)\, q_1(z)$

OBS! Grad $q_1 = n-1$ Om $n-1 \geq 1$ så säger A.F.S igen att det finns en rot α_2 till $q_1(z)=0$

Faktorsatsen $\Rightarrow$ Det finns polynom $q_2(z)$ så att

$q_1(z) = (z-\alpha_2)\,q(z)$ grad $q_2 = n-2$

OBS! $p(z) = (z-\alpha_1)q_1(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\,q_2(z) = \ldots =$

$= (z-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(z-\alpha_n)\cdot c$

Bevis: Induktion.

Polynom med reella koefficienter.

Ex: $p(z) = z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 4z + 10$

Sats:

Antag $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$

och antag att a_i $(i=0,\ldots,n)$ alla är reella

Då gäller att:

$\alpha = a+bi$ är en rot till $p(z)=0$

$\Rightarrow$ även $\bar{\alpha} = a-bi$ är en rot till $p(z)=0$

Ex: $\alpha = 1+2i$ är ett nollställe till $p(z)$

Bestäm alla nollställen till $p(z)$

Lösn: $p(z)$ har reella koefficienter.

$\Rightarrow \bar{\alpha} = 1-2i$ är ett nollställe.

... delar $q(z)$

83

$q(z) = (z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = (z-1-2i)(z-1+2i)$

$= z^2 - \alpha z - \bar{\alpha} z + \alpha\cdot\bar{\alpha} = z^2 - \underbrace{(\alpha+\bar{\alpha})}_{2\cdot \mathrm{Re}(\alpha)} z + |\alpha|^2$

De komplexa bitarna tar ut varandra

$= z^2 - 2\cdot \mathrm{Re}(\alpha)\cdot z + |\alpha|^2$

Har reella koefficienter!

$= z^2 - 2\cdot 1\cdot z + |1+2i|^2$

$= z^2 - 2z + (1^2+2^2). = z^2 - 2z + 5$

Påståendet: Att z^2-2z+5 delar $p(z)$!

$$\begin{array}{l|l} z^2+2 & \\ \hline z^4-2z^3+7z^2-4z+10 & \underline{z^2-2z+5} \end{array}$$

Reellt polynom delat m. reellt polynom = reella koeff. inga komplexa koefficienter.

Dvs: $p(z) = (z^2-2z+5)(z^2+2)$

övriga nollställen erhålls ur $z^2+2=0$

dvs: $z = \pm\sqrt{2}\,i$ konjugatet

Svar: Samtliga nollställen är:

$z = 1\pm 2i \quad , \quad \pm\sqrt{2}\,i$

Förberedelser

$\overline{u\cdot w} = \bar{u}\cdot\bar{w}, \Rightarrow \overline{z^k} = \bar{z}^k$

$\bar{a} = a$ om $a \in \mathbb{R}$ (a är reellt)

$\overline{u+w} = \bar{u} + \bar{w}$

84

Bevis av Sats A10: (Visa att $p(\bar{\alpha})=0$)

$$p(\bar{\alpha}) = a_n(\bar{\alpha})^n + a_{n-1}(\bar{\alpha})^{n-1} + \dots + a_1\bar{\alpha} + a_0$$

$$\left[\bar{z}^k = \overline{z^k}\right] = a_n\overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + \dots + a_1\bar{\alpha} + a_0 =$$

$$= [a_i \text{ reellt} \iff \bar{a}_i = a_i] =$$

$$= \bar{a}_n\overline{\alpha^n} + \bar{a}_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + \dots + \bar{a}_1\bar{\alpha} + \bar{a}_0 =$$

summa

$$= \overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \dots + \overline{a_1\alpha} + \bar{a}_0 =$$

$$\left[\overline{u+w} = \bar{u}+\bar{w}\right] = \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0} = \overline{p(\alpha)} = \bar{0} = 0$$

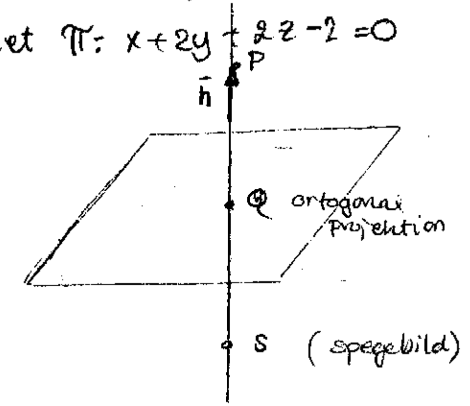
Följdsats:

Varje polynom $p(z)$ med reella koefficienter kan faktoriseras i en produkt av reella 2:a grads & 1:a grads-polynom.

Kap 1 Analysbok: hur hittar man en rationell rot?

ALGEBRA - TISDAG LV7 18/10/2001

1. Bestäm ortogonala projektionen och spegelbilden av punkten $P(1,2,3)$ i planet $\pi: x+2y+2z-2=0$ (ON-system)



Lösn:

$\bar{n}$ = normalen (linjen) till π som går genom P (Q,S)

$Q = n \cap \pi$

$P \in n \qquad n \parallel \underbrace{(1,2,2)}_{\perp \pi}$

$$n \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 3+2t \end{cases}, \quad t \in R$$

$? \; t_0 : (1+t_0, 2+t_0, 3+2t_0) \in \pi$ [Stoppa in i π:s ekv.]

$$(1+t_0) + 2(2+t_0) + 2(3+2t_0) - 2 = 0$$

$$9t_0 + 9 = 0 \Rightarrow t_0 = -1$$

(sk.pkt mellan n och π)

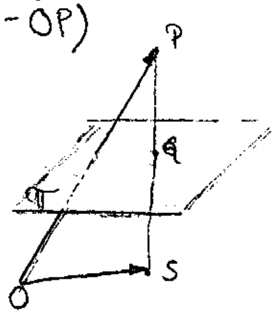
$\Rightarrow Q = n \cap \pi$ har koordinaterna $(0,0,1)$

$\therefore$ Ortogonala projektionen: $(0,0,1)$

$\vec{OS} = \vec{OP} + (\underbrace{2\vec{PQ}}_{=\vec{PS}}) = (1,2,3) + 2(\vec{OQ} - \vec{OP})$

$= (1,2,3) + 2(0-1, 0-2, 1-3) =$

$= (-1, -4, -1)$: S:s koordinater



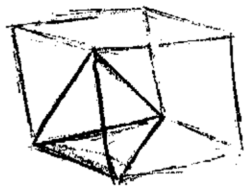
Alt: Mittpunkten Q till sträckan PS ligger i π.

$S(1+t_1, 2+2t, 3+2t_1)$

$M = \frac{\vec{PS}}{2} = \left(\frac{1+(1+t_1)}{2}, \frac{2(2+t_1)}{2}, \frac{3+(3+2_1)}{2} \right) = Q = (0,0,1)$

...

2. Beräkna volymen av den tetraeder som har hörn i punkterna $\underset{A}{(1,1,2)}$, $\underset{B}{(2,4,7)}$, $\underset{C}{(0,1,4)}$ och $\underset{D}{(1,0,4)}$.



Volymen av tetraedern = $\frac{1}{6}$ volymen av den parallellepiped som bygger på samma vektorer. (kanter)

$\cancel{B-A}$

$V_{parallepiped} = |u \cdot (v \times w)|$

$u = \bar{AB} = \bar{OB} - \bar{OA} = (1,3,5)$

$v = \bar{AC} = \bar{OC} - \bar{OA} = (-1,0,2)$

$w = \bar{AD} = \bar{OD} - \bar{OA} = (0,-1,2)$

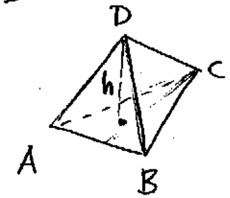
87

$V_{parallell} = \left| \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right| =$

ON-system

$= |0+0+5-(-2)-(-6)| = |13| = 13$

$\Rightarrow V_{tetraeder} = \frac{1}{6} 13 = \frac{13}{6}$



Alt: $\pi \ni A, B, C$

Mha arean av Parallelogram, o.dyl.

3. $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

* Bestäm a så att: $\exists A^{-1}$. Bestäm A^{-1}
* För $a=2$; lös $AX=B$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösn: $\exists A^{-1} \iff \det(A) \neq 0$

Ej sarrus regel.

$\det(A) = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

88

Under determinanten.
Gauss eliminera först.
(Mål: Få nollor mha elimination.) (det ≠ det, det = det dy: ha)
Såväl radvisa som kolonnvisa operationer.

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a \, (-1)^2 \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(triangulär)

$= \ldots = a(a-1)^2 \neq 0$ för att $\exists A^{-1}$

$\Rightarrow \exists A^{-1}$ för $a \neq 0$ och $a \neq 1$

$\nexists A^{-1}$ för $a = 0$, och $a = 1$

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ (Boken: slutet av kap 9)

$\exists A^{-1} \Rightarrow AA^{-1} = E \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 0$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Kräver konstruktivt bevis.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)_{\neq 0}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

$= 3\times 3$ det

89

Räkna ut $AA^{-1} = \ldots = E$! Räkna ut

$\exists ? \ A^{-1}A = E$? Räkna ut

$Adj = (-1)^{i+j} D_{ij}$ Vi har 16 3×3-determinanter

Symmetrisk matris. Alla adjunkter under huvuddiagonalen lika. = 10 st 3×3-determinanter.

Jacobis metod:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a+1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot (-1)$$

$(A|E)$ radoperationer

$(E|A^{-1})$

(Vet att $a \neq 0$, $a \neq 1$. $\Rightarrow$ kan dividera med a)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{a} \\ \cdot\frac{1}{a-1} \\ \cdot\frac{1}{a-1} \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a-1} & -\frac{1}{a-1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1) \\ (-1) \\ (-1) \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a-1} & -\frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a-1} & -\frac{1}{a-1} & 1+\frac{1}{a}+\frac{2}{\ldots} \end{array}\right)$$

90

Om en A^{-1} saknas, upptäcks det i stadiet: $(A \mid E)$
Vi får en nollrad/er $\Rightarrow$ går ej att invertera.

$a = 2 \neq 0, 1$

$X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \quad (a=2) \qquad X = \underbrace{\begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix}}_{4\times 4}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{4\times 2} = \quad 4\times 2\text{-matris}$$

Svår logisk förståelse. tag $r = u - v$

Lemma

$$u \cdot r = v \cdot r \quad \forall r \quad \Leftrightarrow \quad u = v$$

Bevis: $\boxed{\Leftarrow}$ $u = v \,\Big|\, \cdot r$ (båda led) $\Rightarrow u \cdot r = v \cdot r \quad \forall r$

$\boxed{\Rightarrow}$ Givet $u \cdot r = v \cdot r \ \forall r$

$\Rightarrow u \cdot r - v \cdot r = 0 \Rightarrow (u - v) r = 0 \quad \forall r$

$(\forall r)$ distr. lag för skalär tripp.prod. $(u - v \perp r \ \forall r)$

konkret & godt

Välj: $r = u - v \Rightarrow (u-v)\cdot(u-v) = 0$

$(u-v)(u-v) = |u-v| \Rightarrow |u-v| = 0 \Rightarrow u - v = \bar{0}$

$\Rightarrow u = v$

91

14/1 - 2000 Tentatal

5. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & & & & & \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Vill få en triangulär matris

$$= \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = n(-1)^{n-1}$$

[n:te ordningens determinanter: ofta symmetrier.
Går att skriva om som funk. av (n-1):te ord.'s det.]

$$A_n = (-1)(-1)^{n+n} \cdot A_{n-1} + 1 \cdot (-1)^{1+n} \cdot D$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

utv. längs sista raden:
$-(-1)^{n+1} \ (-1)^{n-2}$

radbytet: ger triangulär form. $(-1)^{n-1}$

92