Addition och Multiplikation av matriser

Definition 1. En matris är en rektangulär tabel av tal, som kan skrivas $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ där $i = 1, ..., n$ är numrering av rader, och $j = 1, ..., m$ är numrering av kolonner. Man säger att matrisen A har dimentionen $n \times m$, då den har n rad och m kolonner.

Definition 2. *Summan* av två $n \times m$ matriser $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ och $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ är $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$

Exempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Obs! *Man kan inte addera matriser som har olika storlek.*

Sats 3. *Matris addition har följande egenskaper:*

(1) $A + B = B + A$ *(kommutativ)*
(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(associativ)*

Bevis. Alla matriser ska vara av samma storlek (annars man kan inte addera dem)

- Låt $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ och $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1}^{n,m} = (b_{ij} + a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} = B + A$$

- Låt $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$, och $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$

$$A + (B + C) = A + (b_{ij} + c_{ij})_{i,j=1}^{n,m} = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))_{i,j=1}^{n,m}$$
$$= ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})_{i,j=1}^{n,m} = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1}^{n,m} + C = (A + B) + C$$

$\square$

Definition 4. Produkten av en $n \times m$ matris $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ och en $m \times p$ matris $B = (b_{jk})_{j,k=1}^{m,p}$ är $n \times p$ matris $A \cdot B = (\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk})_{i,k=1}^{n,p}$.

Exempel

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 7 & 8 \\ -2 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-3) & 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 \\ 1 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) & 1 \cdot 7 + 4 \cdot (-3) & 1 \cdot 8 + 4 \cdot 9 \\ 6 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) & 6 \cdot 7 + 5 \cdot (-3) & 6 \cdot 8 + 5 \cdot 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 5 & 43 \\ -9 & -5 & 44 \\ -16 & 27 & 93 \end{pmatrix}$$

Obs! *Man kan inte multiplisera matriser om inte antalet av kolonner i den frsta är inte samma som antalet av rader i den andra.*

Sats 5. *Matrismultiplication har följande egenskaper*

(1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ *(associativ)*
(2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ *(distributiv vid multiplikation från vänster)*
(3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ *(distributiv vid multiplikation från höger)*

Obs! Matrismultiplikation är inte kommutativ, d.v.s. oftast $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Bevis. (1) Låt $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$, $B = (b_{js})_{j,s=1}^{m,p}$, och $C = (c_{sr})_{s,r=1}^{p,q}$ (om inte antalet av rader i B är samma som antalet av kolonner i A, och antalet av kolonner i B är samma some antalet av rader i C, så går det inte att multiplisera matriser).

$$A \cdot (B \cdot C) = A \cdot (\sum_{s=1}^{p} b_{js}c_{sr})_{j,r=1}^{m,q} = (\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot (\sum_{s=1}^{p} b_{js}c_{sr}))_{i,r=1}^{n,q}$$
$$= (\sum_{j=1}^{m}(\sum_{s=1}^{p} a_{ij}b_{js}c_{sr}))_{i,r=1}^{n,q} = (\sum_{j,s=1}^{m,p} a_{ij}b_{js}c_{sr})_{i,r=1}^{n,q}$$
$$= (\sum_{s=1}^{p}(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{js}c_{sr}))_{i,r=1}^{n,q} = (\sum_{s=1}^{p}(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{js}) \cdot c_{sr})_{i,r=1}^{n,q}$$
$$= (\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{js}))_{i,s=1}^{n,p} \cdot C = (A \cdot B) \cdot C.$$

(2) Låt $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$, $B = (b_{js})_{j,s=1}^{m,p}$, och $C = (c_{sr})_{j,s=1}^{m,p}$ (om inte antalet av rader och kolonner i B och C är samma, så går det inte addera, om inte antalet av kolonner i A är samma som antalet rader i B och i C, så går det inte multiplisera)

$$A \cdot (B + C) = A \cdot (b_{js} + c_{js})_{j,s=1}^{m,p} = (\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(b_{js} + c_{js}))_{i,s=1}^{n,p}$$
$$= (\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}b_{js} + a_{ij}c_{js}))_{i,s=1}^{n,p} = (\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{js} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_{js})_{i,s=1}^{n,p}$$
$$= (\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{js})_{i,s=1}^{n,p} + (\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_{js})_{i,s=1}^{n,p} = A \cdot B + A \cdot C.$$

(3) Beviset går likadant som (2)

□

Definition 6. $n \times n$ matrisen $I_n = (\delta_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$, där $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ kallas *enhets matris* (identitets matris)

Exempel

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obs! *Enhets matris har alltid samma antal av rader som kolonner.*

Sats 7. *Om A är en $n \times m$ matris, så är $I_n \cdot A = A = A \cdot I_m$.*

Bevis. (1) Visar att $I_n \cdot A = A$. Låt $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$.

$$I_n \cdot A = (\sum_{i=1}^{n} \delta_{ki}a_{ij})_{k,j=1}^{n,m} = (\sum_{i=k} a_{ij})_{k,j=1}^{n,m} = (a_{kj})_{k,j=1}^{n,m} = A.$$

(2) Man visar att $A \cdot I_m$ på samma sätt som (1).

□