Relevanta definitioner

Beteckning 1. En mängd av vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ kallas ibland ett *system av vektorer* och betäknas som $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ [1].

Definition 2. Vi säger att vektor $\mathbf{u} \in V$ är en *linjär kombination* av vektorerna $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ om det finns sådana tal $a_1, \ldots a_n$ att $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$ $(= \sum\limits_{j=1}^{n} a_j\mathbf{v}_j)$. Detta betecknas $\mathbf{u} \in span(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\})$, där den linjära höljen $span(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\})$ är mängden av alla möjliga linjära kombinationer av vektorerna $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$.

Observation 3. Talen $a_1, \ldots, a_n$ är inte nödvanligt unika.

Observation 4. Om för $\{\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_p}\} \subset \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ gäller $\mathbf{u} \in span(\{\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_p}\})$ så gäller också $\mathbf{u} \in span(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\})$.

Definition 5. Ett system av vektorer $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ kallas *linjärt oberoende* om ingen av vektorer $\mathbf{v}_j$ kan skrivas som en linjär kombination av andra vektorer i systemmet.

Ekvivalent till den är följande:

Definition 6. Ett system av vektorer $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ kallas *linjärt oberoende* om för alla möjliga koefficienter $\{a_j\}$ likheten $a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ uppfylls endast om $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Definition 7. Ett system av vektorer $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ i ett vektorrum V som är linjärt oberoende, och har hela rummet V som linjärt hölje (dvs. $V = span(\{\mathbf{e}_1 \ldots, \mathbf{e}_n\})$) kallas en *bas* av vektorrummet V.

Definition av dimension av ett vektorrum

Sats 8. *Om ett vektorrum V har två baser: $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^r$ och $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^q$, så består baserna av samma antal av vektorer, dvs. $r = q$.*

För att bevisa satsen behöver vi följande påstående.

Påstående 9. *Om varje vektor i $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ är en linjär kombination av vektorerna $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, och $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ är ett linjärt oberoende system, så måste $n \geq m$.*

Bevis av satsen 8 med hjälp av Påstående 9. Betrakta basen $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ det ett linjärt oberoende system (se definitionen av bas). Eftersom $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^q$ är en bas går det att skriva varje vekor ur V, deribland varje $\mathbf{e}_j$ som en linjär kombination av vektorerna $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^q$. Alltså, vi kan tillämpa Påstående 9 med $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^r$ som $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ och $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^q$ som $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Påstående 9 säger då att $q \geq r$. Likadant kan vi tillämpa Påstående 9 med $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^q$ som $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ och $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^r$ som $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ och få att $r \geq q$.

$q \geq r$ och $r \geq q$ medför att $q = r$. □

Bevis av Påstående 9. Eftersom varje $\mathbf{u}_j$, $j = 1, \ldots, m$ är en linjär kombination av vektorerna $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ kan vi hitta sådana $\{a_{k,j}\}_{k,j=1}^{n,m}$ att $\mathbf{u}_j = a_{1,j}\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{n,j}\mathbf{v}_n$

[1] Om ordningen av numreringen är viktigt använder vi runda paranteser, så som med matriser: $(\mathbf{v}_j)_{j=1}^n$ som $(a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$

$(=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,j}\mathbf{v}_k)$. (Observera att valet av tal kan ibland vara inte unik, men vi tar vilken som helst som passar.)

Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$. Om vi utför Gauss radredusering får vi en reduserat matris B där varje rad eller börjas med några (möjligen inga) noll, sedan ska det ha ett pivot element (och sedan möjligen några tal till) eller bestå av endast nollar.

Eftersom det finns inte mer en ett pivot element i varje rad finns det inte mer än n pivot element i reduserade matrisen. **Anta att** $n < m$**.** Då finns det ett kolonn utan pivot element. Betrakta ett sådant kolonn som ligger lngst till vänster i matrisen (låt det är kolonn p).

Betrakta matris $A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{array}\right)$ som består endast av första p kolonner av matrisen A. Efter samma Gauss radreduseringen blir matrisen A_p samma som B_p som består av första p kolonner av B, dvs. pga. valet av p innehåller alla första $(p-1)$ kolonner ett pivot element (som då står på diagonalen) och kolonn p har ingen pivot element. Om vi nu slutför Gauss radredusering får vi matrisen $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{p-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$. Om vi betraktar matrisen A_p som en utvidgat matris av ett linjärt ekvationsystem, så ser vi att $\begin{cases} a_{1,1}b_1 + \ldots + a_{1,p-1}b_{p-1} & = & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}b_1 + \ldots + a_{n,p-1}b_{p-1} & = & a_{n,p} \end{cases}$.

Nu ser vi att

$$\begin{aligned} b_1\mathbf{u}_1+\ldots+b_{p-1}\mathbf{u}_{p-1} &= b_1(a_{1,1}\mathbf{v}_1+\ldots+a_{n,1}\mathbf{v}_n)+\ldots+b_{p-1}(a_{1,p-1}\mathbf{v}_1+\ldots+a_{n,p-1}\mathbf{v}_n) \\ &= (a_{1,1}b_1 + \ldots + a_{1,p-1}b_{p-1})\mathbf{v}_1 + \ldots + (a_{n,1}b_1 + \ldots + a_{n,p-1}b_{p-1})\mathbf{v}_n \\ &= a_{1,p}\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{n,p}\mathbf{v}_n = \mathbf{u}_p. \end{aligned}$$

Alltså, vektorn $\mathbf{u}_p$ är en linjär kombination av andra vektorer från $\{\mathbf{u}_j\}_{j=1}^m$. Detta är omöjligt för att systemmet $\{\mathbf{u}_j\}_{j=1}^m$ är (efter satsens antagande) linjärt oberoende. Motsägelsen visar att den enda tidigare i bevis gjort antagande (dvs. $n < m$) är faskt. Därmed har vi bevisat att $n \geq m$. $\square$