## Relevanta definitioner

**Beteckning 1.** En mängd av vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ kallas ibland ett *system av vektorer* och betäknas som $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ [1].

**Definition 2.** Vi säger att vektor $\mathbf{u} \in V$ är en *linjär kombination* av vektorerna $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ om det finns sådana tal $a_1, \ldots a_n$ att $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$ $(= \sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{v}_j)$. Detta betecknas $\mathbf{u} \in span(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\})$, där den linjära höljen $span(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\})$ är mängden av alla möjliga linjära kombinationer av vektorerna $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$.

*Observation* 3. Talen $a_1, \ldots, a_n$ är inte nödvanligt unika.

*Observation* 4. Om för $\{\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_p}\} \subset \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ gäller $\mathbf{u} \in span(\{\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_p}\})$ så gäller också $\mathbf{u} \in span(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\})$.

**Definition 5.** Ett system av vektorer $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ kallas *linjärt oberoende* om varje av vektorer $\mathbf{v}_j$ kan inte skrivas som en linjär kombination av andra vektorer i systemmet.

Ekvivalent till den är följande:

**Definition 6.** Ett system av vektorer $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ kallas *linjärt oberoende* om för alla möjliga koefficienter $\{a_j\}$ likheten $a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ uppfylls endast om $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

**Definition 7.** Ett system av vektorer $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ i ett vektorrum $V$ som är linjärt oberoende, och har hela rummet $V$ som linjärt hölje (dvs. $V = span(\{\mathbf{e}_1 \ldots, \mathbf{e}_n\})$) kallas en *bas* av vektorrummet $V$.

## Definition av dimension av ett vektorrum

**Sats 8.** *Om ett vektorrum $V$ har två baser: $\mathbb{B} = \{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^p$ och $\widetilde{\mathbb{B}} = \{\widetilde{\mathbf{e}_k}\}_{k=1}^q$, så består baserna av samma antal av vektorer, dvs. $p = q$.*

*Bevis.* Vi ska rekursivt bygga upp en sekvens av baser $\mathbb{B}_m$ på sådant sätt att

(1) $\mathbb{B}_0 = \mathbb{B}$;
(2) Vi kan beteckna vektorer i $\mathbb{B}_m$ och $\mathbb{B}_{m+1}$ så att $\mathbb{B}_m = \{\mathbf{f}_j\}_{j=1}^p$, $\mathbb{B} = \{\widetilde{\mathbf{f}_j}\}_{j=1}^p$ och för ngon $k^* \in [1, p]$ gäller $\mathbf{f}_j = \widetilde{\mathbf{f}_j}$, då $j \neq k^*$;
(3) $\mathbb{B}_m$ innehåller minst $m$ vektorer från $\widetilde{\mathbb{B}}$.

Vi börjar med $\mathbb{B}_0 = \mathbb{B}$. Då vi på steg $m$ har skappat $\mathbb{B}_m$ vi ser **om** det finns någon vektor i $\widetilde{\mathbb{B}}$ som är inte med i $\mathbb{B}_m$. Ta den vektor som $\mathbf{e}^*$. Vi vet alltså att $\mathbf{e}^* \in \widetilde{\mathbb{B}}$ och $\mathbf{e}^* \notin \mathbb{B}_m$.

Eftersom $\mathbb{B}_m$ är en bas i $V$, vi kan hitta koefficienterna $\{\alpha_j\}_{j=1}^p$, så att $\mathbf{e}^* = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \alpha_p\mathbf{f}_p = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j\mathbf{f}_j$. Betrakta alla $\mathbf{f}_j$ som ingår i linjär kombinationen med ikke-noll koefficient (d.v.s. $\alpha_j \neq 0$). En del av sådana vektorer kan ingåi $\widetilde{\mathbb{B}}$, men inte alla, för att $\mathbf{e}^*$ kan inte framställas som en linjär kombination av andra vektorer i $\widetilde{\mathbb{B}}$ ($\widetilde{\mathbb{B}}$ är en bas). Låt $k^*$ är nummer på en vektor som har ikke-noll koefficient och inte ingår i $\widetilde{\mathbb{B}}$ (om det finns flera sådana vi tar vilken som helst).

[1] Om ordningen av numreringen är viktigt använder man runda paranteser, så som med matriser: $(\mathbf{v}_j)_{j=1}^n$ som $(a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$.

Vi får nu $\mathbb{B}_{m+1}$ genom att ersätta $\mathbf{f}_{k^*}$ med $\mathbf{e}^*$. Det är uppenbart att villkorna (1),(2),(3) uppfylls, men vi måste kontrollera att $\mathbb{B}_{m+1}$ är en bas.

(1) Om inte $\mathbb{B}_{m+1}$ är linjärt oberoende, då finns det sådana $\{\beta_j\}_{j=1}^p$ att $\beta_1\widetilde{\mathbf{f}_1} + \ldots + \beta_p\widetilde{\mathbf{f}_p} = \mathbf{0}$ och inte alla $\beta_j$ är noll.
   (a) Om $\beta_{k^*} = 0$ så $\beta_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \beta_p\mathbf{f}_p = \beta_1\widetilde{\mathbf{f}_1} + \ldots + \beta_p\widetilde{\mathbf{f}_p} = \mathbf{0}$, vilket kan inte hända då $\mathbb{B}_m$ är en bas.
   (b) Om $\beta_{k^*} \neq 0$ så $\mathbf{0} = \beta_1\widetilde{\mathbf{f}_1} + \ldots + \beta_p\widetilde{\mathbf{f}_p} = \beta_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \beta_{k^*}(\alpha_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \alpha_p\mathbf{f}_p) + \beta_p\mathbf{f}_p$. Efter vi öppnar paranteser i högerled, ser vi att $\mathbf{f}_{k^*}$ ingår med koefficienten $\beta k^*\alpha k^* \neq 0$, vilket kan inte hända då $\mathbb{B}_m$ är en bas.

   Alltså är $\mathbb{B}_{m+1}$linjärt oberoende.

(2) Betrakta $\mathbf{x} \in V$. Den kan skrivas som $\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + \ldots + x_p\mathbf{f}_p$. Men $\mathbf{f}_j = \widetilde{\mathbf{f}_j}$ för $j \neq k^*$ och $\mathbf{f}_{k^*} = \frac{1}{\alpha_{k^*}}(\alpha_1\widetilde{\mathbf{f}_1} + \ldots + (-\widetilde{\mathbf{f}_{k^*}}) + \ldots + \alpha_p\widetilde{\mathbf{f}_p})$. Så $\mathbf{x} \in \mathit{span}(\{\widetilde{\mathbf{f}_j}\}_{j=1}^p$. Eftersom $x$ valdes godtyckligt från $V$, betyder detta att $\mathit{span}(\mathbb{B}_{m+1}) = V$.

Alltså på varje steg i vår konstruktionen får vi en bas.

Vi kan inte ha mera än $q$ steg för att det finns bara $q$ vektorer i $\widetilde{\mathbb{B}}$. Men konstruktioner stannar påsteg $m$ endast om det finns inga vektorer i $\widetilde{\mathbb{B}}$ som är inte med i $\mathbb{B}_m$. Det betyder att för den steg på vilken vi stanar $\widetilde{\mathbb{B}} \subset \mathbb{B}_m$. Om det finns $\mathbf{f}_j \in \mathbb{B}_m$ sådan att den är inte är i $\widetilde{\mathbb{B}}$, då $\mathbf{f}_j \in V = \mathit{span}(\widetilde{\mathbb{B}})$, vilket betyder att $\mathbf{f}_j$ är en linjärt kombination av andra vektorer ur $\mathbb{B}_m$ (vilket kan inte hända då $\mathbb{B}_m$ är en bas). Alltså måste $\widetilde{\mathbb{B}} = \mathbb{B}_m$, och då har de lika många elementer, d.v.s. $p = q$. $\square$

Satsen gör det möjligt för oss att införa följande definitionen.

**Definition 9.** Antal av elementer i en bas av ett vektorrum $V$ kallas *dimension* av $V$ och betecknas $\mathit{dim}(V)$.

**Påstående 10.** *Ett system* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\} \subset V$ *är alltid linjärt beroende om* $m > \mathit{dim}(V)$.

**Obs!** Ett system *kan* vara linjärt beroende till och med om $m < \mathit{dim}(V)$.

*Bevis med ett fel.* Anta att systemmet $\mathbb{U} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ är linjärt oberoende. Om inte $\mathit{span}(\mathbb{U}) = V$, det finns $\mathbf{u}_{m+1} \in V$, sådan att $\mathbf{u}_{m+1}$ är inte linjär kombination av $\mathbb{U}$. Betrakta $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U} \cup \{\mathbf{u}_{m+1}\}$.

Om $\mathbb{U}_1$ är linjärt beroende då det finns $\{\alpha_j\}_{j=1}^{m+1}$ sådana att $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{u}_m + \alpha_{m+1}\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{0}$ och inte alla $\alpha_j$ är noll.

(1) Om $\alpha_{m+1} = 0$ då $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$, så$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, för att $\mathbb{U}$ är en bas. Alltså $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \alpha_{m+1} = 0$, vilket är inte valet av $\{\alpha_j\}_{j=1}^{m+1}$.

(2) Om $\alpha_{m+1} \neq 0$ då $\mathbf{u}_{m+1} = \frac{-\alpha_1}{\alpha_{m+1}}\mathbf{u}_1 + \ldots + \frac{-\alpha_m}{\alpha_{m+1}}\mathbf{u}_m$, d.v.s. $\mathbf{u}_{m+1}$ är en linjär kombination av vektorerna ur $\mathbb{U}$, vilket var inte valet av $\mathbf{u}_{m+1}$.

Så $\mathbb{U}_1$ är linjärt oberoende.

Fortsätt så. Då vi stannar är $\mathbb{U}_k$ linjärt oberoende och $\mathit{span}(\mathbb{U}_k) = V$. Alltså är $\mathbb{U}_k$ en bas.

Nu, å ena hand har $\mathbb{U}_k$ exakt $\mathit{dim}(V)$ elemeter för att den är en bas i $V$. Åandra hand har vi fått $\mathbb{U}_k$ genom att lägga några elementer till $\mathbb{U}$. Så

$$\mathit{dim}(V) < m \leq m + k = \mathit{dim}(V)(?!)$$

Det bevisar att systemmet $\mathbb{U}$ är linjärt beroende. $\square$

**Övning.** Hitta felet och gör ett riktigt bevis. *Tips:* Man kan fixa en bas i $V$ och göra som i beviset av Satsen 8.